

Nome:

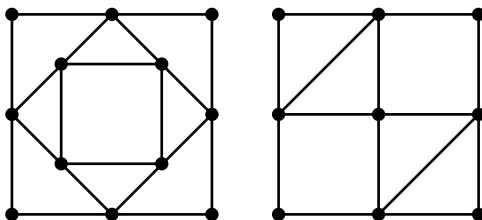
Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

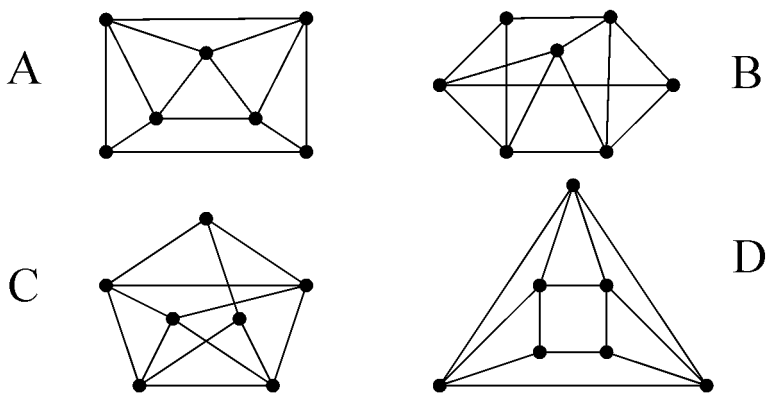
- (1v.) 1. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 tem ciclos eulerianos.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

- (1v.) 2. Considere os grafos A , B , C e D na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

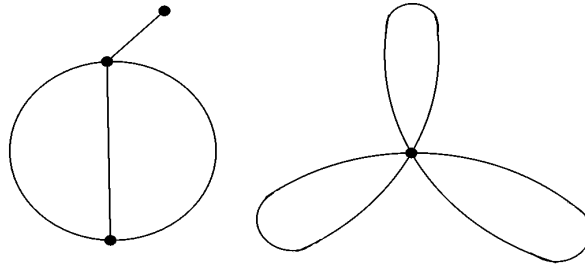
☐ A ☒ B ☐ C ☐ D

- (1v.) 3. Seja G um grafo com 6 vértices e 11 arestas. Escolha o maior valor de d para o qual pode garantir que existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a d :

☐ $d = 2$ ☒ $d = 4$ ☐ $d = 3$ ☐ $d = 5$

Suponhamos, por absurdo, que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 3$. Então $22 = 2a$, o dobro do número de arestas que é igual à soma de todos os graus, seria menor ou igual a $6 \times 3 = 18$. Deste absurdo podemos concluir que existe pelo menos um vértice com grau maior ou igual a $d = 4$. Supondo que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 4$ obtemos, como acima, $22 \leq 6 \times 4 = 24$. Neste caso a conclusão é consistente com a hipótese.

4. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



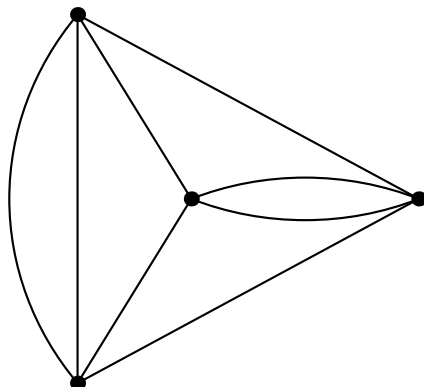
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
O dual de G_1 tem três vértices.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
O dual de G_1 não tem lacetes.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
O dual de G_1 tem pelo menos um ciclo.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
O dual de G_2 tem quatro vértices.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
O dual de G_2 tem pelo menos um ciclo.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
O dual de G_2 não tem lacetes.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

5. Um poliedro convexo P tem 30 vértices, todos de grau 4 e, todas as suas faces têm grau 3 ou 5. Sejam x o número de faces de grau 3 e y o número de faces de grau 5. Então (1v.)

<input type="radio"/>	$x = 18$ e $y = 14$	<input type="radio"/>	$x = 20$ e $y = 8$
<input checked="" type="radio"/>	$x = 20$ e $y = 12$	<input type="radio"/>	$x = 12$ e $y = 12$

6. Qual é o índice cromático do seguinte grafo? (1v.)



3



4



5



6

(1v.)

7. Um conjunto de k bolas iguais é distribuído aleatoriamente por dois sacos. Supondo que todas as possíveis distribuições são igualmente prováveis, e que a probabilidade de todas as bolas ficarem num mesmo saco é igual a $2/7$, determine o valor de k .

 $k = 4$  $k = 5$  $k = 6$  $k = 7$

(1v.)

8. Qualquer arranjo finito de letras será considerado uma *palavra*. Chama-se *anagrama* de uma palavra a qualquer outra palavra obtida permutando as letras da primeira.

Quantos anagramas tem a palavra "BATATA"?

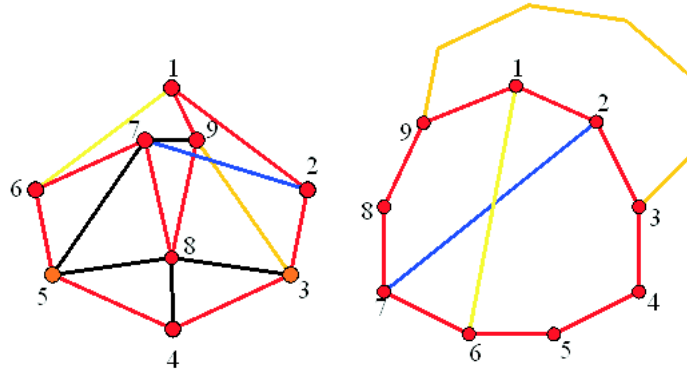
$$\text{N}^\circ \text{ anagramas} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

II

1. Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar. Então G admite uma representação planar topológica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano

$$\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 1\}$$

é curva simples fechada.



Suponhamos que, nesta representação planar topológica, a aresta que liga os vértices 1 e 6 é interior à curva γ . Partindo desta hipótese podemos tirar as seguintes conclusões.

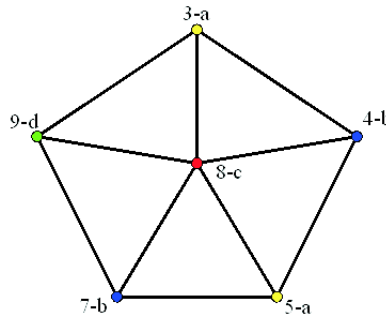
- i. $\{1, 6\}$ é interior a γ . (por hipótese);
- ii. $\{3, 9\}$ é exterior a γ (por i.);
- iii. $\{2, 7\}$ é interior a γ (por ii.);
- iv. $\{2, 7\}$ é exterior a γ (por i.).

As duas últimas conclusões, iii. e iv., contradizem-se. Partindo da hipótese contrária, de aresta que liga os vértices 1 e 6 ser exterior a γ , podemos inferir um absurdo semelhante:

- i. $\{1, 6\}$ é exterior a γ . (hipótese contrária);
- ii. $\{3, 9\}$ é interior a γ (por i.);
- iii. $\{2, 7\}$ é exterior a γ (por ii.);
- iv. $\{2, 7\}$ é interior a γ (por i.).

Logo G não pode ser planar.

2. Na figura em baixo representamos o subgrafo H com uma 4-coloração de vértices.



3. H admite um subgrafo completo de ordem 3, por exemplo o subgrafo gerado pelos vértices $\{8, 3, 4\}$. Logo o seu número cromático é pelo menos 3. Suponhamos, por absurdo, que H tem número cromático igual a 3. Então existe uma 3-coloração de vértices de H . É claro que os vértices 3, 4 e 8 têm nesta coloração cores distintas, digamos a , b e c respectivamente.

- i. 3, 4 e 8 têm, respectivamente, cores a , b e c (por hipótese);

ii. 5 tem a cor a (porque é adjacente aos vértices 8 e 4, e por i. estes vértices têm as cores c e b respectivamente);

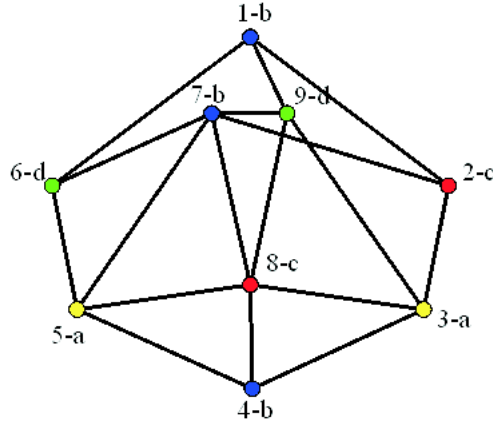
iii. 7 tem a cor b (porque é adjacente aos vértices 8 e 5, e por i. e ii. estes vértices têm as cores c e a respectivamente);

iv. 9 tem a cor a (porque é adjacente aos vértices 8 e 7, e por i. e iii. estes vértices têm as cores c e b respectivamente);

v. 9 tem a cor b (porque é adjacente aos vértices 8 e 3, e por i. estes vértices têm as cores c e a respectivamente).

Da contradição entre iv. e v. podemos concluir a falsidade da hipótese assumida. Logo H tem número cromático maior ou igual a 4. Mas se colorirmos o vértice 9 com uma quarta cor d obtemos a 4-coloração de vértices em H da figura acima. Isto mostra que H tem número cromático igual a 4.

4. O número cromático de G é maior ou igual a 4, porque G admite o subgrafo H com esse número cromático. A 4-coloração de vértices de H , da alínea anterior, estende-se facilmente a uma 4-coloração de vértices de G :



Logo G tem número cromático 4.

III

1. Por (2) o número de vértices de \mathcal{P} é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5p = 5 \times 12 = 60$.

2. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3v = 3 \times 60 = 180$. Logo $2a = 180$, o que implica $a = 90$.

3. Pela fórmula de Euler o número de faces de \mathcal{P} é $f = 2 + a - v = 32$. Logo, como $f = p + h = 12 + h$, $h = 20$.

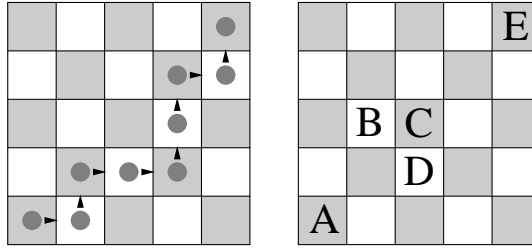
4. Por (2) o número de vértices de \mathcal{P} é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5p$. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3v = 15p$. Logo $2a = 15p$, o que implica $a = \frac{3v}{2} = \frac{15p}{2}$. Pela fórmula de Euler o número de faces de \mathcal{P} é

$$f = 2 + a - v = 2 + \frac{15p}{2} - 5p = \frac{5p + 4}{2}.$$

Logo, como $f = p + h$, $h = f - p = \frac{3p+4}{2}$.

Por outro lado, como a soma dos graus de todas as faces também é igual a duas vezes o número de arestas temos $5p + 6h = 2a$. Substituindo h e a pelas expressões acima obtemos a equação $5p + 9p + 12 = 15p$. Resolvendo em ordem a p obtemos o valor $p = 12$. Das expressões anteriores concluímos então que $h = \frac{3p+4}{2} = 20$, $v = 5p = 60$ e $a = \frac{15p}{2} = 90$.

IV



1. O número de caminhos de comprimento 4 que começam em A é igual ao número de palavras de 4 letras no alfabeto $\{H, V\}$, que por sua vez é igual a $2^4 = 16$.

2. Sejam: $\mathcal{C}_{X,Y}$ o conjunto de todos os caminhos da casa X para a casa Y e, $\mathcal{C}_{X,Y,Z}$ o conjunto dos caminhos em $\mathcal{C}_{X,Z}$ que passam pela casa Y .

$$(1) |\mathcal{C}_{A,B,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}| |\mathcal{C}_{B,E}| = \frac{3!}{1!2!} \frac{5!}{3!2!} = 30$$

$$(2) |\mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,C}| |\mathcal{C}_{C,E}| = \frac{4!}{2!2!} \frac{4!}{2!2!} = 36$$

$$(3) |\mathcal{C}_{A,D,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}| |\mathcal{C}_{D,E}| = \frac{3!}{2!1!} \frac{5!}{2!3!} = 30$$

3. Observe que $\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,D,E} = \emptyset$,

$$|\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}| |\mathcal{C}_{B,C}| |\mathcal{C}_{C,E}| = 3 \times 1 \times 6 = 18 \text{ e,}$$

$$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}| |\mathcal{C}_{D,C}| |\mathcal{C}_{C,E}| = 3 \times 1 \times 6 = 18.$$

Logo, pelo princípio de inclusão exclusão, o cardinal da união

$$\mathcal{C}_{A,B,E} \cup \mathcal{C}_{A,C,E} \cup \mathcal{C}_{A,D,E}$$

é igual à soma dos cardinais das partes

$$|\mathcal{C}_{A,B,E}| + |\mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,D,E}|,$$

menos a soma das intersecções

$$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}|.$$

Assim o número de caminhos na união é $(30 + 36 + 30) - (18 + 18) = 60$.

4. Observando que $|\mathcal{C}_{A,E}| = \frac{8!}{4!4!} = 70$, a proporção pedida é $\frac{60}{70} = \frac{6}{7}$.