Tópicos de Matemática Finita **Data: 22-06-2002**
1ªChamada Correcção **Código: 1C**

Nome:

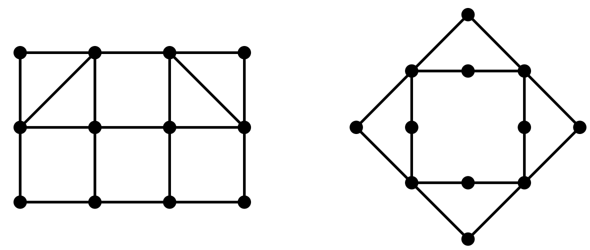
Número: **Curso:**

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

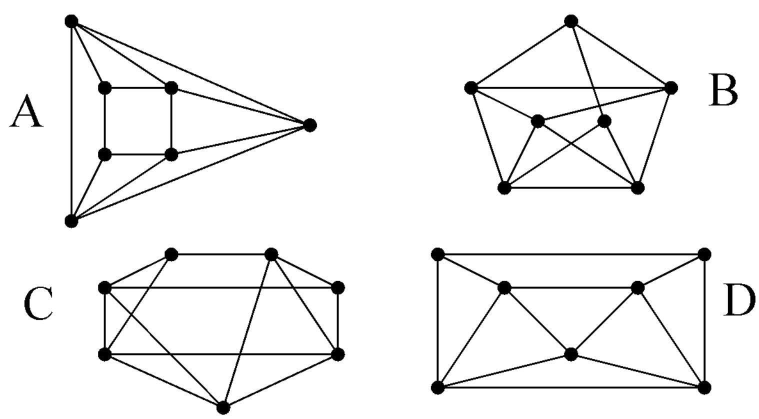
(1v.) **1.** Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 tem cadeias abertas eulerianas.	◉	○
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	◉	○
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	○	◉
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	○	◉

(1v.) **2.** Considere os grafos A, B, C e D na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

○ A ○ B ◉ C ○ D

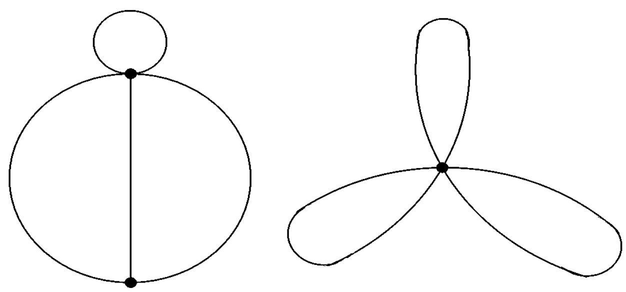
(1v.) **3.** Seja G um grafo com 12 vértices e 32 arestas. Escolha o maior valor de d para o qual pode garantir que existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a d :

○ $d = 3$ ○ $d = 4$ ○ $d = 5$ ◉ $d = 6$

Suponhamos, por absurdo, que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 5$. Então $64 = 2\,a$, o dobro do número de arestas que é igual à soma de todos os graus, seria menor ou igual a $12 \times 5 = 60$. Deste absurdo podemos concluir que existe pelo menos um vértice com grau maior ou igual a $d = 6$. Supondo que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 6$ obtemos, como acima, $64 \leq 12 \times 6 = 72$. Neste caso a conclusão é consistente com a hipótese.

---

4. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
O dual de G_1 tem três vértices.	○	◉
O dual de G_1 tem um lacete.	○	◉
O dual de G_1 tem pelo menos um ciclo.	◉	○
O dual de G_2 tem três vértices.	○	◉
O dual de G_2 não tem ciclos.	◉	○
O dual de G_2 não tem lacetes.	◉	○

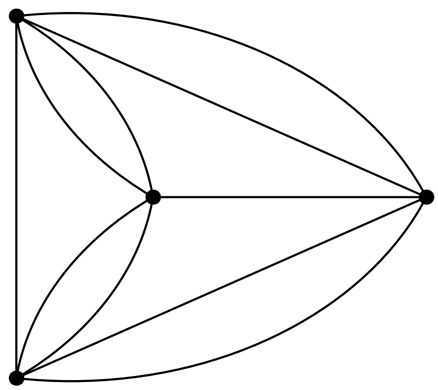
---

5. Um poliedro convexo P tem 12 vértices, todos de grau 4 e, todas as suas faces têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de faces de grau 3 e y o número de faces de grau 4. Então (1v.)

○	$x = 10$ e $y = 4$	○	$x = 4$ e $y = 6$
○	$x = 8$ e $y = 4$	◉	$x = 8$ e $y = 6$

---

6. Qual é o índice cromático do seguinte grafo? (1v.)



☐ ○ 3 ☐ ○ 4 ☐ ◉ 5 ☐ ○ 6

(1v.) **7.** Um conjunto de k bolas iguais é distribuído aleatoriamente por dois sacos. Supondo que todas as possíveis distribuições são igualmente prováveis, e que a probabilidade de todas as bolas ficarem num mesmo saco é igual a $1/3$, determine o valor de k.

☐ ○ $k = 4$ ☐ ◉ $k = 5$ ☐ ○ $k = 6$ ☐ ○ $k = 7$

(1v.) **8.** Qualquer arranjo finito de letras será considerado uma *palavra*. Chama-se *anagrama* de uma palavra a qualquer outra palavra obtida permutando as letras da primeira.

Quantos anagramas tem a palavra "AMARRAM"?

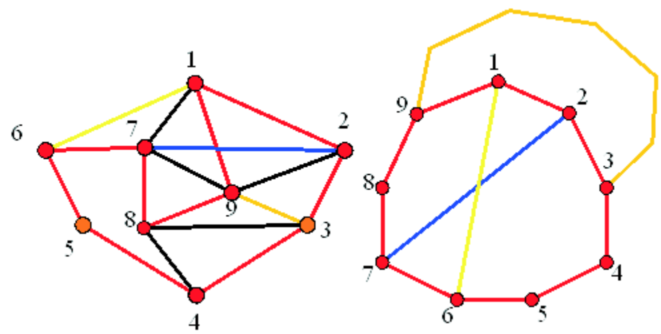
N$^{\text{o}}$ anagramas $= \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$

II

1. Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar. Então G admite uma representação planar toplógica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano

$$\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 1\}$$

é curva simples fechada.



Suponhamos que, nesta representação planar topológica, a aresta que liga os vértices 1 e 6 é interior à curva γ. Partindo desta hipótese podemos tirar as seguintes conclusões.

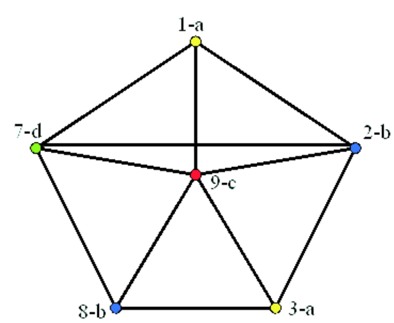
i. $\{1, 6\}$ é interior a γ. (por hipótese);
ii. $\{3, 9\}$ é exterior a γ (por i.);
iii. $\{2, 7\}$ é interior a γ (por ii.);
iv. $\{2, 7\}$ é exterior a γ (por i.).

As duas últimas conclusões, iii. e iv., contradizem-se. Partindo da hipótese contrária, de aresta que liga os vértices 1 e 6 ser exterior a γ, podemos inferir um absurdo semelhante:

i. $\{1, 6\}$ é exterior a γ. (hipótese contrária);
ii. $\{3, 9\}$ é interior a γ (por i.);
iii. $\{2, 7\}$ é exterior a γ (por ii.);
iv. $\{2, 7\}$ é interior a γ (por i.).

Logo G não pode ser planar.

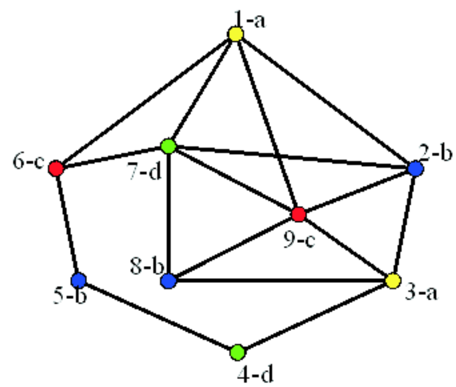
2. Na figura em baixo representamos o subgrafo H com uma 4-coloração de vértices.



3. H admite um subgrafo completo de ordem 4, por exemplo o subgrafo gerado pelos vértices $\{1, 2, 7, 9\}$. Logo o seu número cromático é pelo menos 4. A 4-coloração de vértices na figura acima mostra que H tem número cromático igual a 4.

4. O número cromático de G é maior ou igual a 4, porque G admite o subgrafo

H com esse número cromático. A 4-coloração de vértices de H, da alínea anterior, estende-se facilmente a uma 4-coloração de vértices de G:



Logo G tem número cromático 4.

III

1. Por (2) o número de vértices de $\mathcal{P}$ é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5\,p = 5 \times 12 = 60$.

2. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3\,v = 3 \times 60 = 180$. Logo $2\,a = 180$, o que implica $a = 90$.

3. Pela fórmula de Euler o número de faces de $\mathcal{P}$ é $f = 2 + a - v = 32$. Logo, como $f = p + h = 12 + h$, $h = 20$.

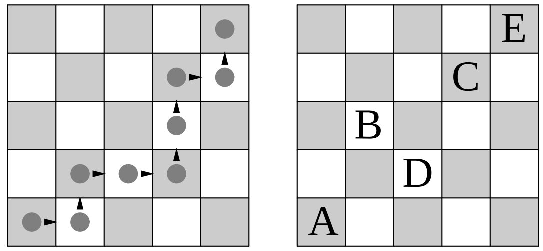
4. Por (2) o número de vértices de $\mathcal{P}$ é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5\,p$. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3\,v = 15\,p$. Logo $2\,a = 15\,p$, o que implica $a = \frac{3\,v}{2} = \frac{15\,p}{2}$. Pela fórmula de Euler o número de faces de $\mathcal{P}$ é

$$f = 2 + a - v = 2 + \frac{15\,p}{2} - 5\,p = \frac{5\,p + 4}{2}\,.$$

Logo, como $f = p + h$, $h = f - p = \frac{3\,p+4}{2}$.

Por outro lado, como a soma dos graus de todas as faces também é igual a duas vezes o número de arestas temos $5\,p + 6\,h = 2\,a$. Substutuíndo h e a pelas expressões acima obtemos a equação $5\,p + 9\,p + 12 = 15\,p$. Resolvendo em ordem a p obtemos o valor $p = 12$. Das expressões anteriores concluímos então que $h = \frac{3\,p+4}{2} = 20$, $v = 5\,p = 60$ e $a = \frac{15\,p}{2} = 90$.

IV



1. O número de caminhos de comprimento 4 que começam em A é igual ao número de palavras de 4 letras no alfabeto $\{H, V\}$, que por sua vez é igual a $2^4 = 16$.

2. Sejam: $\mathcal{C}_{X,Y}$ o conjunto de todos os caminhos da casa X para a casa Y e, $\mathcal{C}_{X,Y,Z}$ o conjunto dos caminhos em $\mathcal{C}_{X,Z}$ que passam pela casa Y.

(1) $|\mathcal{C}_{A,B,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}|\,|\mathcal{C}_{B,E}| = \frac{3!}{1!\,2!}\,\frac{5!}{3!\,2!} = 30$
(2) $|\mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = \frac{6!}{3!\,3!}\,\frac{2!}{1!\,1!} = 40$
(3) $|\mathcal{C}_{A,D,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}|\,|\mathcal{C}_{D,E}| = \frac{3!}{2!\,1!}\,\frac{5!}{2!\,3!} = 30$

3. Observe que $\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,D,E} = \emptyset$,
$|\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}|\,|\mathcal{C}_{B,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = 3 \times 3 \times 2 = 18$ e,
$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}|\,|\mathcal{C}_{D,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = 3 \times 3 \times 2 = 18$.

Logo, pelo princípio de inclusão exclusão, o cardinal da união

$$\mathcal{C}_{A,B,E} \cup \mathcal{C}_{A,C,E} \cup \mathcal{C}_{A,D,E}$$

é igual à soma dos cardinais das partes

$$|\mathcal{C}_{A,B,E}| + |\mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,D,E}|\ ,$$

menos a soma das intersecções

$$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}|\ .$$

Assim o número de caminhos na união é $(30 + 40 + 30) - (18 + 18) = 64$.

4. Observando que $|\mathcal{C}_{A,E}| = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$, a proporção pedida é $\frac{64}{70} = \frac{32}{35}$.