

Nome:

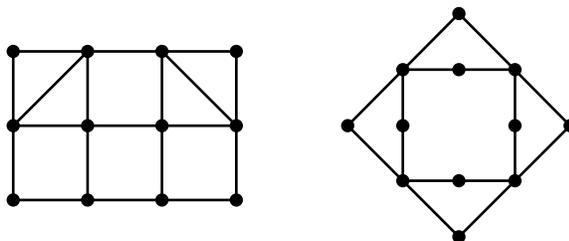
Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

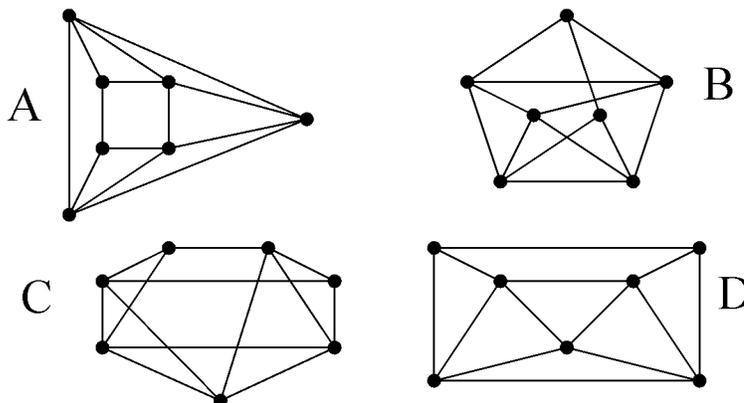
- (1v.) 1. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 tem cadeias abertas eulerianas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- (1v.) 2. Considere os grafos A , B , C e D na figura em baixo.



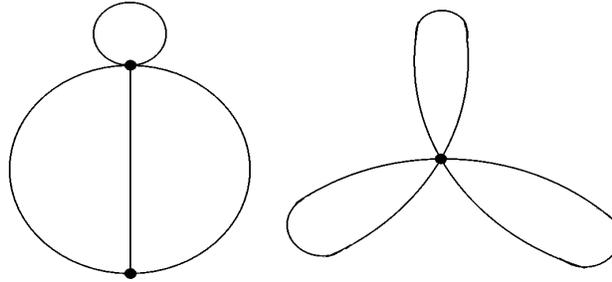
Qual deles não é isomorfo aos restantes?

- A B C D

- (1v.) 3. Seja G um grafo com 12 vértices e 32 arestas. Escolha o maior valor de d para o qual pode garantir que existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a d :

- $d = 3$ $d = 4$ $d = 5$ $d = 6$

4. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



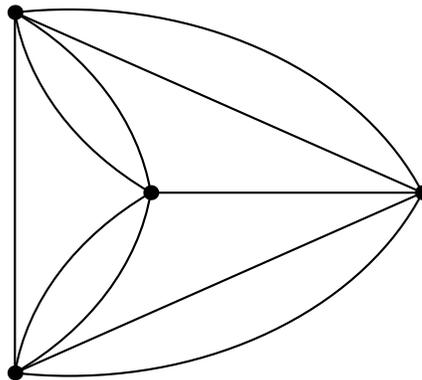
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
O dual de G_1 tem três vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de G_1 tem um lacete.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de G_1 tem pelo menos um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de G_2 tem três vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de G_2 não tem ciclos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de G_2 não tem lacetes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5. Um poliedro convexo P tem 12 vértices, todos de grau 4 e, todas as suas faces têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de faces de grau 3 e y o número de faces de grau 4. Então (1v.)

<input type="checkbox"/>	$x = 10$ e $y = 4$	<input type="checkbox"/>	$x = 4$ e $y = 6$
<input type="checkbox"/>	$x = 8$ e $y = 4$	<input type="checkbox"/>	$x = 8$ e $y = 6$

6. Qual é o índice cromático do seguinte grafo? (1v.)



- 3 4 5 6

- (1v.) 7. Um conjunto de k bolas iguais é distribuído aleatoriamente por dois sacos. Supondo que todas as possíveis distribuições são igualmente prováveis, e que a probabilidade de todas as bolas ficarem num mesmo saco é igual a $1/3$, determine o valor de k .

$$\boxed{\bigcirc} \quad k = 4 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 5 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 6 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 7$$

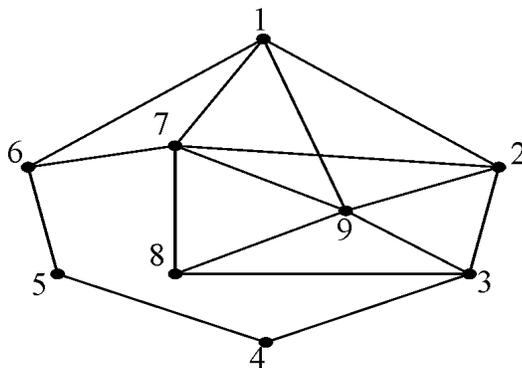
- (1v.) 8. Qualquer arranjo finito de letras será considerado uma *palavra*. Chama-se *anagrama* de uma palavra a qualquer outra palavra obtida permutando as letras da primeira.

Quantos anagramas tem a palavra "AMARRAM"?

Nº anagramas =

II

Seja G o grafo da figura seguinte.

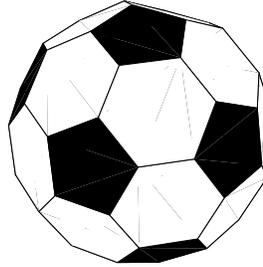


G é um grafo simples de ordem 9 com 16 arestas.

- (1v.) 1. Mostre que G não é planar. Se necessitar utilize o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 1\}$.
- (1v.) 2. Esboce o subgrafo H de G gerado pelo conjunto de seis vértices $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.
- (1v.) 3. Prove que o subgrafo H da alínea anterior tem número cromático quatro.
- (1v.) 4. Qual o número cromático de G ? Justifique.

III

Uma bola de futebol é fabricada costurando $p = 12$ pentágonos com um número h de hexágonos, na forma de um poliedro convexo \mathcal{P} aproximadamente esférico.



Sabendo que

- (1) *todos os vértices de \mathcal{P} têm grau 3,*
- (2) *todo o vértice de \mathcal{P} pertence ao bordo de uma única face pentagonal,*

responda às perguntas seguintes. As três primeiras questões estão encadeadas. Se não responder a alguma pode sempre resolver as seguintes expressando a sua resposta em função dos parâmetros não determinados. Para obter a cotação completa responda apenas à quarta e última pergunta.

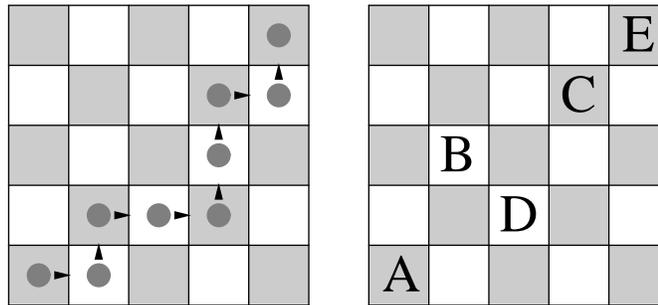
1. Qual o número v de vértices do poliedro? (1v.)
2. Qual o número a de arestas do poliedro? (1v.)
3. Qual o número h de faces hexagonais? (1v.)
4. Admitindo que \mathcal{P} é um poliedro convexo com p faces pentagonais e h faces hexagonais, que satisfaz as propriedades (1) e (2) acima, determine p , h , v e a . (4v.)

IV

Num tabuleiro de xadrez 5×5 um peão tem dois tipos de movimentos:

- i. pode mover-se na horizontal uma casa para sua direita;
- ii. pode mover-se na vertical uma casa para cima.

Chamaremos *caminho* a uma sequência de movimentos de peão. Na figura em baixo à esquerda vem ilustrado um caminho de comprimento 8.



- (1v.) 1. Quantos caminhos há de comprimento 4 a começar na casa A ?
- (1v.) 2. Para cada uma das casas $X = B, C$ e D , veja quantos caminhos há a começar em A passando por X e terminando em E .
- (1v.) 3. Quantos caminhos há a começar em A , passando por alguma das casas B, C ou D , e terminando em E ?
- (1v.) 4. Calcule a proporção de caminhos nas condições da alínea anterior no conjunto de todos os caminhos que começam em A e terminam em E .