Tópicos de Matemática Finita **Data: 22-06-2002**

1ªChamada Correcção **Código: 1D**

Nome:

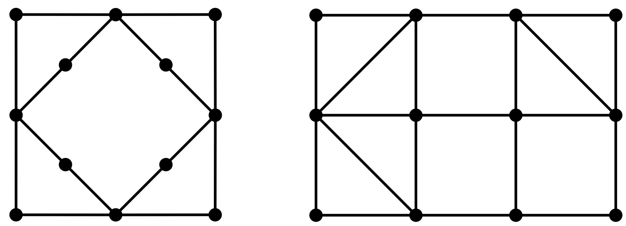
Número: **Curso:**

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

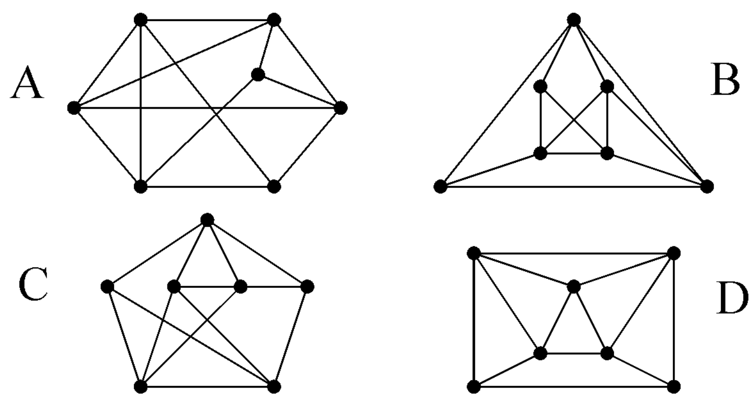
(1v.) **1.** Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	○	◉
G_1 tem ciclos eulerianos.	◉	○
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	◉	○
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	◉	○

(1v.) **2.** Considere os grafos A, B, C e D na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

○ A ○ B ○ C ◉ D

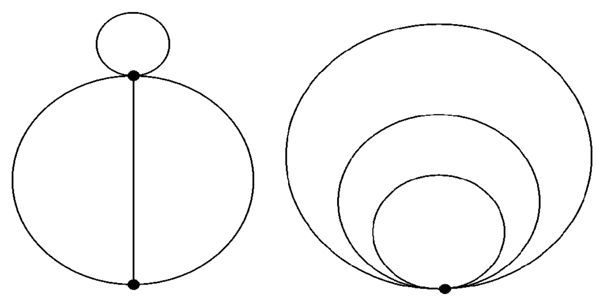
(1v.) **3.** Seja G um grafo com 10 vértices e 22 arestas. Escolha o maior valor de d para o qual pode garantir que existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a d :

○ $d = 3$ ○ $d = 4$ ◉ $d = 5$ ○ $d = 6$

Suponhamos, por absurdo, que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 4$. Então $44 = 2\,a$, o dobro do número de arestas que é igual à soma de todos os graus, seria menor ou igual a $10 \times 4 = 40$. Deste absurdo podemos concluir que existe pelo menos um vértice com grau maior ou igual a $d = 5$. Supondo que todos os vértices têm grau menor ou igual a $d = 5$ obtemos, como acima, $44 \leq 10 \times 5 = 50$. Neste caso a conclusão é consistente com a hipótese.

---

4. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
O dual de G_1 tem quatro vértices.	◉	○
O dual de G_1 não tem arestas paralelas.	◉	○
O dual de G_1 não tem ciclos.	○	◉
O dual de G_2 tem quatro vértices.	◉	○
O dual de G_2 tem pelo menos um ciclo.	○	◉
O dual de G_2 tem arestas paralelas.	○	◉

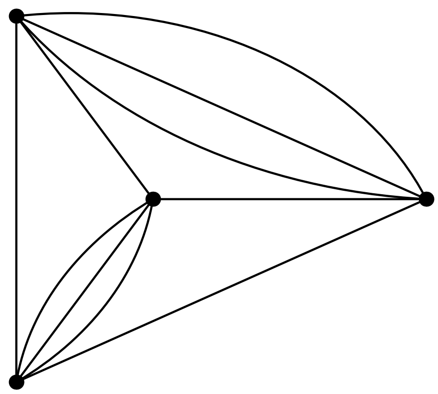
---

5. Um poliedro convexo P tem 60 vértices, todos de grau 3 e, todas as suas faces têm grau 5 ou 6. Sejam x o número de faces de grau 5 e y o número de faces de grau 6. Então (1v.)

○	$x = 8$ e $y = 24$	○	$x = 18$ e $y = 10$
◉	$x = 12$ e $y = 20$	○	$x = 10$ e $y = 20$

---

6. Qual é o índice cromático do seguinte grafo? (1v.)



☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6

(1v.) **7.** Um conjunto de k bolas iguais é distribuído aleatoriamente por dois sacos. Supondo que todas as possíveis distribuições são igualmente prováveis, e que a probabilidade de todas as bolas ficarem num mesmo saco é igual a $2/5$, determine o valor de k.

☒ $k = 4$ ☐ $k = 5$ ☐ $k = 6$ ☐ $k = 7$

(1v.) **8.** Qualquer arranjo finito de letras será considerado uma *palavra*. Chama-se *anagrama* de uma palavra a qualquer outra palavra obtida permutando as letras da primeira.

Quantos anagramas tem a palavra "TRATAR"?

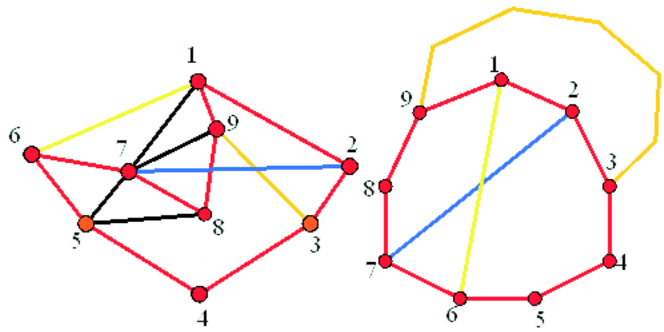
Nº anagramas $= \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$

II

1. Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar. Então G admite uma representação planar toplógica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano

$$\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 1\}$$

é curva simples fechada.



Suponhamos que, nesta representação planar topológica, a aresta que liga os vértices 1 e 6 é interior à curva γ. Partindo desta hipótese podemos tirar as seguintes conclusões.

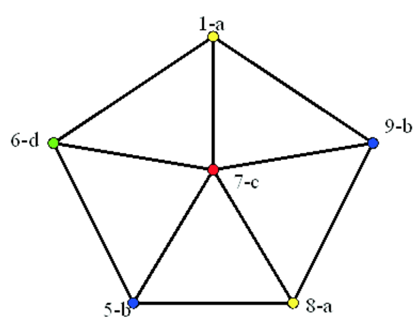
i. $\{1,6\}$ é interior a γ. (por hipótese);
ii. $\{3,9\}$ é exterior a γ (por i.);
iii. $\{2,7\}$ é interior a γ (por ii.);
iv. $\{2,7\}$ é exterior a γ (por i.).

As duas últimas conclusões, iii. e iv., contradizem-se. Partindo da hipótese contrária, de aresta que liga os vértices 1 e 6 ser exterior a γ, podemos inferir um absurdo semelhante:

i. $\{1,6\}$ é exterior a γ. (hipótese contrária);
ii. $\{3,9\}$ é interior a γ (por i.);
iii. $\{2,7\}$ é exterior a γ (por ii.);
iv. $\{2,7\}$ é interior a γ (por i.).

Logo G não pode ser planar.

2. Na figura em baixo representamos o subgrafo H com uma 4-coloração de vértices.



3. H admite um subgrafo completo de ordem 3, por exemplo o subgrafo gerado pelos vértices $\{7,1,9\}$. Logo o seu número cromático é pelo menos 3. Suponhamos, por absurdo, que H tem número cromático igual a 3. Então existe uma 3-coloração de vértices de H. É claro que os vértices 1, 9 e 7 têm nesta coloração cores distintas, digamos a, b e c respectivamente.

i. 1, 9 e 7 têm, respectivamente, cores a, b e c (por hipótese);

ii. 8 tem a cor a (porque é adjacente aos vértices 7 e 9, e por i. estes vértices têm as cores c e b respectivamente);

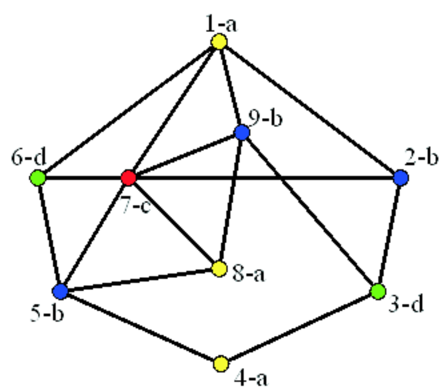
iii. 5 tem a cor b (porque é adjacente aos vértices 7 e 8, e por i. e ii. estes vértices têm as cores c e a respectivamente);

iv. 6 tem a cor a (porque é adjacente aos vértices 7 e 5, e por i. e iii. estes vértices têm as cores c e b respectivamente);

v. 6 tem a cor b (porque é adjacente aos vértices 7 e 1, e por i. estes vértices têm as cores c e a respectivamente).

Da contradição entre iv. e v. podemos concluir a falsidade da hipótese assumida. Logo H tem número cromático maior ou igual a 4. Mas se colorirmos o vértice 6 com uma quarta cor d obtemos a 4-coloração de vértices em H da figura acima. Isto mostra que H tem número cromático igual a 4.

4. O número cromático de G é maior ou igual a 4, porque G admite o subgrafo H com esse número cromático. A 4-coloração de vértices de H, da alínea anterior, estende-se facilmente a uma 4-coloração de vértices de G:



Logo G tem número cromático 4.

III

1. Por (2) o número de vértices de $\mathcal{P}$ é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5\,p = 5 \times 12 = 60$.

2. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3\,v = 3 \times 60 = 180$. Logo $2\,a = 180$, o que implica $a = 90$.

3. Pela fórmula de Euler o número de faces de $\mathcal{P}$ é $f = 2 + a - v = 32$. Logo, como $f = p + h = 12 + h$, $h = 20$.

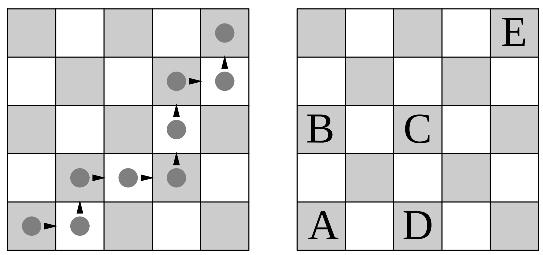
4. Por (2) o número de vértices de $\mathcal{P}$ é cinco vezes o número de faces pentagonais, $v = 5\,p$. Por (1) a soma dos graus de todos os vértices é $3\,v = 15\,p$. Logo $2\,a = 15\,p$, o que implica $a = \frac{3\,v}{2} = \frac{15\,p}{2}$. Pela fórmula de Euler o número de faces de $\mathcal{P}$ é

$$f = 2 + a - v = 2 + \frac{15\,p}{2} - 5\,p = \frac{5\,p + 4}{2}\ .$$

Logo, como $f = p + h$, $h = f - p = \frac{3p+4}{2}$.

Por outro lado, como a soma dos graus de todas as faces também é igual a duas vezes o número de arestas temos $5p + 6h = 2a$. Substutuíndo h e a pelas expressões acima obtemos a equação $5p + 9p + 12 = 15p$. Resolvendo em ordem a p obtemos o valor $p = 12$. Das expressões anteriores concluímos então que $h = \frac{3p+4}{2} = 20$, $v = 5p = 60$ e $a = \frac{15p}{2} = 90$.

IV



1. O número de caminhos de comprimento 4 que começam em A é igual ao número de palavras de 4 letras no alfabeto $\{H, V\}$, que por sua vez é igual a $2^4 = 16$.

2. Sejam: $\mathcal{C}_{X,Y}$ o conjunto de todos os caminhos da casa X para a casa Y e, $\mathcal{C}_{X,Y,Z}$ o conjunto dos caminhos em $\mathcal{C}_{X,Z}$ que passam pela casa Y.

(1) $|\mathcal{C}_{A,B,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}|\,|\mathcal{C}_{B,E}| = \frac{2!}{0!\,2!}\,\frac{6!}{4!\,2!} = 15$
(2) $|\mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = \frac{4!}{2!\,2!}\,\frac{4!}{2!\,2!} = 36$
(3) $|\mathcal{C}_{A,D,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}|\,|\mathcal{C}_{D,E}| = \frac{2!}{2!\,0!}\,\frac{6!}{2!\,4!} = 15$

3. Observe que $\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,D,E} = \emptyset$,
$|\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,B}|\,|\mathcal{C}_{B,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = 1 \times 1 \times 6 = 6$ e,
$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| = |\mathcal{C}_{A,D}|\,|\mathcal{C}_{D,C}|\,|\mathcal{C}_{C,E}| = 1 \times 1 \times 6 = 6$.

Logo, pelo princípio de inclusão exclusão, o cardinal da união

$$\mathcal{C}_{A,B,E} \cup \mathcal{C}_{A,C,E} \cup \mathcal{C}_{A,D,E}$$

é igual à soma dos cardinais das partes

$$|\mathcal{C}_{A,B,E}| + |\mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,D,E}|\,,$$

menos a soma das intersecções

$$|\mathcal{C}_{A,D,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}| + |\mathcal{C}_{A,B,E} \cap \mathcal{C}_{A,C,E}|\,.$$

Assim o número de caminhos na união é $(15 + 36 + 15) - (6 + 6) = 54$.

4. Observando que $|\mathcal{C}_{A,E}| = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$, a proporção pedida é $\frac{54}{70} = \frac{27}{35}$.