

---

Nome:

Número:

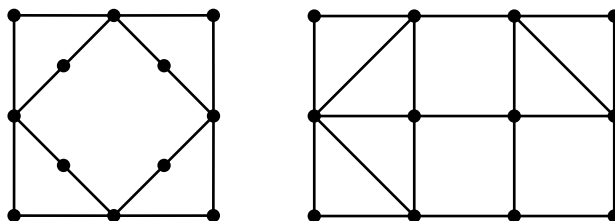
Curso:

---

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
  - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
  - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
  - A ausência de resposta não será pontuada.
  - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
  - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
- 

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

- (1v.) 1. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

$G_1$  tem ciclos hamiltonianos.

$G_1$  tem ciclos eulerianos.

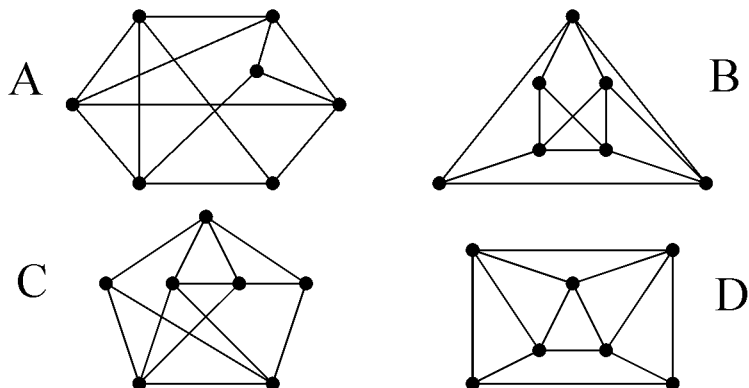
$G_2$  tem cadeias abertas eulerianas.

$G_2$  tem ciclos hamiltonianos.

Sim Não

<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

- (1v.) 2. Considere os grafos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

☐

$A$

☐

$B$

☐

$C$

☐

$D$

- (1v.) 3. Seja  $G$  um grafo com 10 vértices e 22 arestas. Escolha o maior valor de  $d$  para o qual pode garantir que existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a  $d$  :

☐

$d = 3$

☐

$d = 4$

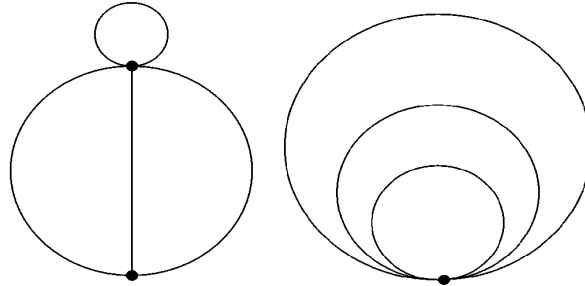
☐

$d = 5$

☐

$d = 6$

4. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



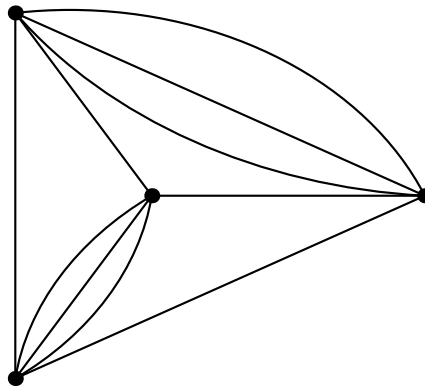
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
O dual de $G_1$ tem quatro vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de $G_1$ não tem arestas paralelas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de $G_1$ não tem ciclos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de $G_2$ tem quatro vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de $G_2$ tem pelo menos um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
O dual de $G_2$ tem arestas paralelas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5. Um poliedro convexo  $P$  tem 60 vértices, todos de grau 3 e, todas as suas faces têm grau 5 ou 6. Sejam  $x$  o número de faces de grau 5 e  $y$  o número de faces de grau 6. Então (1v.)

<input type="checkbox"/>	$x = 8$ e $y = 24$	<input type="checkbox"/>	$x = 18$ e $y = 10$
<input type="checkbox"/>	$x = 12$ e $y = 20$	<input type="checkbox"/>	$x = 10$ e $y = 20$

6. Qual é o índice cromático do seguinte grafo? (1v.)



<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---

- (1v.) 7. Um conjunto de  $k$  bolas iguais é distribuído aleatoriamente por dois sacos. Supondo que todas as possíveis distribuições são igualmente prováveis, e que a probabilidade de todas as bolas ficarem num mesmo saco é igual a  $2/5$ , determine o valor de  $k$ .

$$\boxed{\bigcirc} \quad k = 4 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 5 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 6 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad k = 7$$


---

- (1v.) 8. Qualquer arranjo finito de letras será considerado uma *palavra*. Chama-se *anagrama* de uma palavra a qualquer outra palavra obtida permutando as letras da primeira.

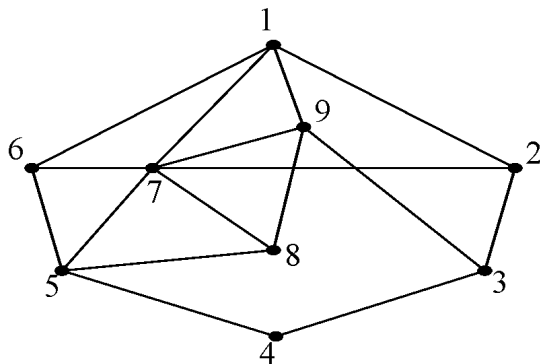
Quantos anagramas tem a palavra "TRATAR"?

Nº anagramas =

---

## II

Seja  $G$  o grafo da figura seguinte.

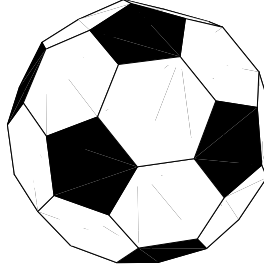


$G$  é um grafo simples de ordem 9 com 16 arestas.

- (1v.) 1. Mostre que  $G$  não é planar. Se necessitar utilize o ciclo hamiltoniano  $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 1\}$ .
- (1v.) 2. Esboce o subgrafo  $H$  de  $G$  gerado pelo conjunto de seis vértices  $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- (1v.) 3. Prove que o subgrafo  $H$  da alínea anterior tem número cromático quatro.
- (1v.) 4. Qual o número cromático de  $G$ ? Justifique.

## III

Uma bola de futebol é fabricada costurando  $p = 12$  pentágonos com um número  $h$  de hexágonos, na forma de um poliedro convexo  $\mathcal{P}$  aproximadamente esférico.



Sabendo que

- (1) *todos os vértices de  $\mathcal{P}$  têm grau 3,*
- (2) *todo o vértice de  $\mathcal{P}$  pertence ao bordo de uma única face pentagonal,*

responda às perguntas seguintes. As três primeiras questões estão encadeadas. Se não responder a alguma pode sempre resolver as seguintes expressando a sua resposta em função dos parâmetros não determinados. Para obter a cotação completa responda apenas à quarta e última pergunta.

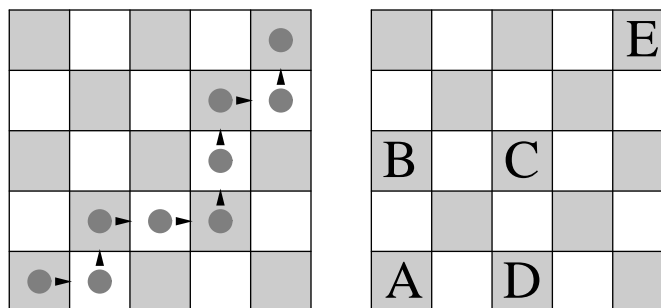
1. Qual o número  $v$  de vértices do poliedro? (1v.)
2. Qual o número  $a$  de arestas do poliedro? (1v.)
3. Qual o número  $h$  de faces hexagonais? (1v.)
4. Admitindo que  $\mathcal{P}$  é um poliedro convexo com  $p$  faces pentagonais e  $h$  faces hexagonais, que satisfaz as propriedades (1) e (2) acima, determine  $p$ ,  $h$ ,  $v$  e  $a$ . (4v.)

## IV

Num tabuleiro de xadrez  $5 \times 5$  um peão tem dois tipos de movimentos:

- i. pode mover-se na horizontal uma casa para sua direita;
- ii. pode mover-se na vertical uma casa para cima.

Chamaremos *caminho* a uma sequência de movimentos de peão. Na figura em baixo à esquerda vem ilustrado um caminho de comprimento 8.



- (1v.)      **1.** Quantos caminhos há de comprimento 4 a começar na casa  $A$ ?
- (1v.)      **2.** Para cada uma das casas  $X = B, C$  e  $D$ , veja quantos caminhos há a começar em  $A$  passando por  $X$  e terminando em  $E$ .
- (1v.)      **3.** Quantos caminhos há a começar em  $A$ , passando por alguma das casas  $B, C$  ou  $D$ , e terminando em  $E$ ?
- (1v.)      **4.** Calcule a proporção de caminhos nas condições da alínea anterior no conjunto de todos os caminhos que começam em  $A$  e terminam em  $E$ .