

Nome:

Número:

Curso:

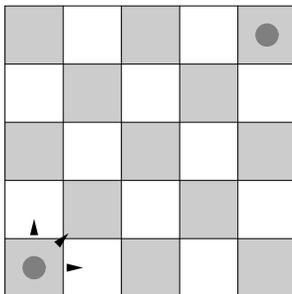
---

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
  - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificção. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
  - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
  - A ausência de resposta não será pontuada.
  - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
  - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
- 

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

## I

- (1v.) 1. Num tabuleiro de xadrez  $5 \times 5$  um peão tem três tipos de movimentos:
- (1) pode mover-se na horizontal, uma casa para sua direita,
  - (2) pode mover-se na vertical, uma casa para cima,
  - (3) pode mover-se na diagonal, uma casa para a direita e uma para cima.



Quantos caminhos (sequências de movimentos) levam o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 6 movimentos? Observe que em todos estes caminhos são feitos exactamente dois movimentos na diagonal.

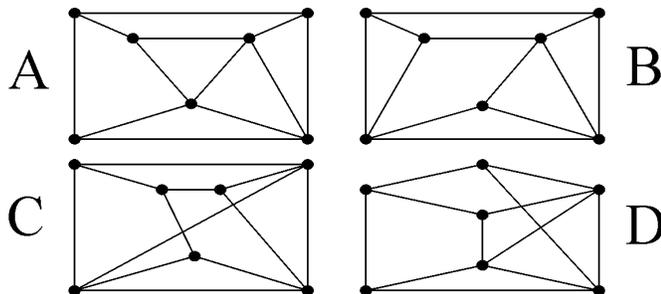
- 120       60       90       180

- (1v.) 2. Considere o conjunto de todas as listas de inteiros  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  tais que
- $$2 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 6.$$

O cardinal deste conjunto é igual a

- 120       90       60       70

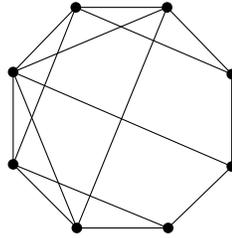
- (1v.) 3. Considere os grafos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

- $A$         $B$         $C$         $D$

4. Seja  $H_i$  o subgrafo gerado pelos vértices de grau  $i$  do grafo em baixo. (1v.)



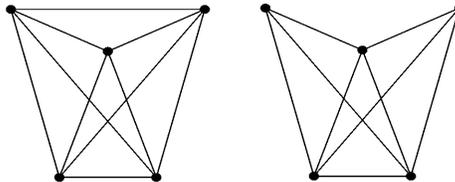
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
$H_3$ é conexo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$H_3$ é uma árvore.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$H_3$ tem um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$H_4$ é conexo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$H_4$ é uma árvore.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$H_4$ tem um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5. Um poliedro convexo  $P$  tem 14 faces, sendo 8 de grau 6 e 6 faces de grau  $d$ . Sabendo que  $P$  tem  $v$  vértices, todos de grau 3, determine  $v$  e  $d$ : (1v.)

<input type="checkbox"/>	$v = 12$ e $d = 8$	<input type="checkbox"/>	$v = 24$ e $d = 4$
<input type="checkbox"/>	$v = 24$ e $d = 3$	<input type="checkbox"/>	$v = 18$ e $d = 6$

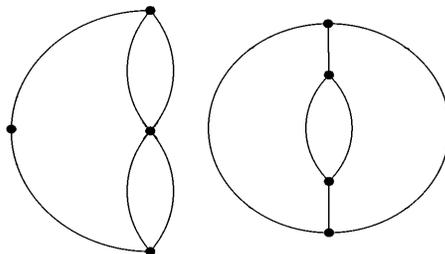
6. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, resp. à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
$G_1$ é um grafo planar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_2$ é um grafo planar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

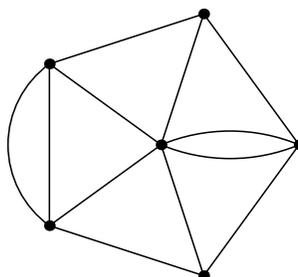
- (1v.) 7. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, resp. à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
$G_1$ é o dual de um grafo com quatro vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_1$ é o dual de um grafo sem arestas paralelas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_1$ é o dual de um grafo com pelo menos um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_2$ é o dual de um grafo com quatro vértices.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_2$ é o dual de um grafo com pelo menos um ciclo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_2$ é o dual de um grafo sem arestas paralelas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- (1v.) 8. Qual é o índice cromático do seguinte grafo?




5

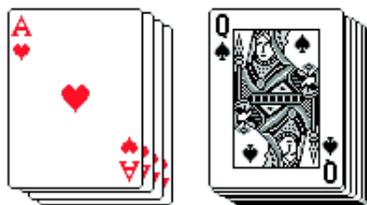
4

7

6

## II

Um baralho contem 12 cartas: 4 *ases de copas* e 8 *damas de espadas*.



- (1v.) 1. De quantas maneiras diferentes pode ordenar as doze cartas do baralho?

2. Baralhe e retire sucessivamente, sem reposição, três cartas deste baralho. (1v.)  
Qual a probabilidade de saírem exactamente 2 *ases* entre estas três cartas?

O baralho é distribuído por 3 jogadores, 4 cartas a cada um.

3. Qual o número total de distribuições? (1v.)
4. Quantas destas distribuições deixam pelo menos um jogador sem *ases de copas*? (1v.)

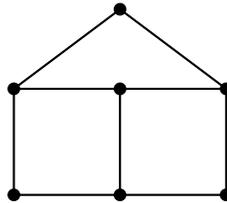
### III

Seja  $G$  um grafo planar topológico, simples, de ordem  $v$ , com  $f$  faces,  $c$  componentes conexas e todos os seus vértices de grau 4.

1. Prove que  $v \geq 6$ . (1v.)
2. Supondo que  $v = 15$ , qual o valor máximo que  $c$  pode tomar? (1v.)
3. Supondo que  $v = 15$ , mostre que  $f \leq 18$ . (1v.)
4. Dê um exemplo de um grafo nas condições acima com  $v = 8$  vértices. (1v.)

### IV

Considere o grafo planar topológico  $G$  na figura seguinte



1. Qual o número cromático de  $G$ ? (1v.)
2. Admite ciclos hamiltonianos o grafo  $G$ ? Justifique. (1v.)
3. Encontre uma representação planar topológica para o dual de  $G$ . (1v.)
4. Veja se o dual de  $G$  tem cadeias eulerianas. Em caso afirmativo dê um exemplo. (1v.)