
Nome:

Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

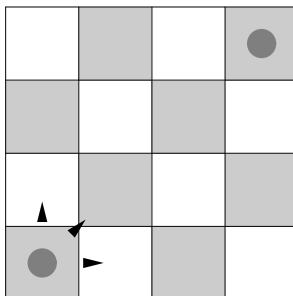
Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

(1v.)

1. Num tabuleiro de xadrez 4×4 um peão tem três tipos de movimentos:

- (1) pode mover-se na horizontal, uma casa para sua direita,
- (2) pode mover-se na vertical, uma casa para cima,
- (3) pode mover-se na diagonal, uma casa para a direita e uma para cima.



Quantos caminhos (sequências de movimentos) levam o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 5 movimentos? Observe que em todos estes caminhos é feito exactamente um movimento na diagonal.



30



60



20



12

(1v.)

2. Considere o conjunto de todas as listas de inteiros (x_1, x_2, x_3, x_4) tais que

$$3 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 6.$$

O cardinal deste conjunto é igual a



35



14



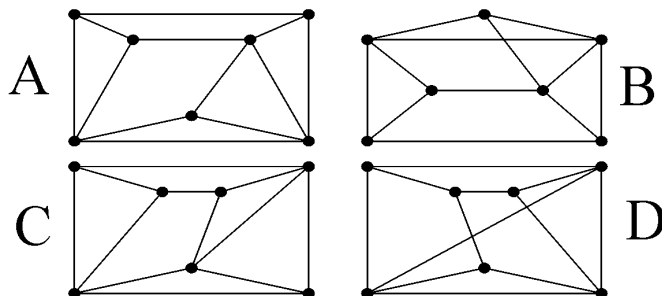
28



42

(1v.)

3. Considere os grafos A , B , C e D na figura em baixo.

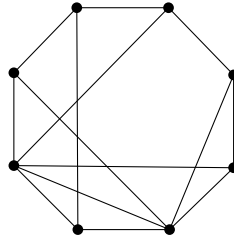


Qual deles não é isomorfo aos restantes?

 A  B  C  D

(1v.)

4. Seja H_i o subgrafo gerado pelos vértices de grau i do grafo em baixo.



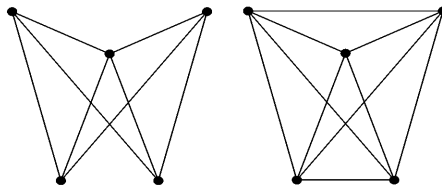
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
H_3 é conexo.	☒	☐
H_3 é uma árvore.	☒	☐
H_3 tem um ciclo.	☐	☒
H_5 é conexo.	☒	☐
H_5 é uma árvore.	☒	☐
H_5 tem um ciclo.	☐	☒

5. Um poliedro convexo P tem 14 faces, sendo 6 de grau 8 e 8 faces de grau d . Sabendo que P tem v vértices, todos de grau 3, determine v e d : (1v.)

☐	$v = 12$ e $d = 8$	☒	$v = 24$ e $d = 3$
☐	$v = 12$ e $d = 3$	☐	$v = 18$ e $d = 6$

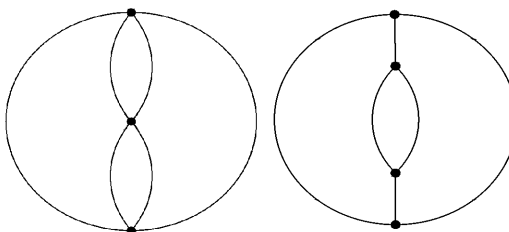
6. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, resp. à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 é um grafo planar.	☒	☐
G_2 é um grafo planar.	☐	☒

7. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, resp. à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

G_1 é o dual de um grafo com cinco vértices.

G_1 é o dual de um grafo com arestas paralelas.

G_1 é o dual de um grafo com pelo menos um ciclo.

G_2 é o dual de um grafo com cinco vértices.

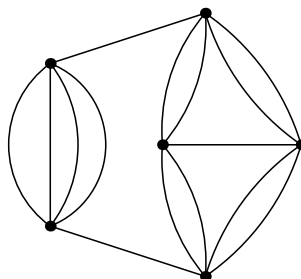
G_2 é o dual de um grafo sem ciclos.

G_2 é o dual de um grafo com arestas paralelas.

Sim	Não
☒	☐
☐	☒
☒	☐
☐	☒
☐	☒
☒	☐

(1v.)

8. Qual é o índice cromático do seguinte grafo?



4



5



6



7

II

1. As cartas do baralho podem ser ordenadas de

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4! 8!} = 495$$

maneiras diferentes.

2. A probabilidade de saírem exactamente 2 *reis* entre estas 3 cartas é igual a

$$\frac{C_2^4 C_1^8}{C_3^{12}} = 3 \frac{4 \times 3 \times 8}{12 \times 11 \times 10} = \frac{12}{55}.$$

O baralho é distribuído por 3 jogadores, 4 cartas a cada um.

3. O número total de distribuições é igual ao número de distribuições dos 4

reis de ouros pelos três jogadores. Cada distribuição dos 4 *reis de ouros* pode ser completada de uma única maneira: distribuindo os 8 *dois de paus* pelos 3 jogadores, de modo a prefazer um total de 4 cartas a cada um. Logo o número total de distribuições é igual a

$${}^{\text{rep}}C_4^3 = C_4^6 = 15.$$

4. O complementar do conjunto das distribuições que deixam pelo menos um jogador sem *reis de ouros* é formado pelas distribuições tais que cada jogador tem pelo menos um *rei*. Assim o cardinal do complementar é igual ao número de maneiras de distribuir $1 = 4 - 3$ cartas por 3 jogadores, i.e. ${}^{\text{rep}}C_1^3 = C_1^3 = 3$.

Logo existem $15 - 3 = 12$ distribuições nas condições pedidas.

Para uma solução alternativa seja A_i o conjunto das distribuições que deixam o jogador i sem *reis*. Pretende saber-se qual o cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. O conjunto A_i das distribuições que deixam o jogador i sem *reis*, tem cardinal igual ao número de maneiras de distribuir os 4 *reis* pelos restantes dois jogadores, i.e. ${}^{\text{rep}}C_4^2 = C_4^5 = 5$.

O cardinal das intersecções $A_i \cap A_j$, com $i \neq j$, tem apenas um elemento: a distribuição dos 4 *reis* pelo terceiro jogador além de i e j .

É claro que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Logo, usando o princípio de inclusão exclusão, vemos que o cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é igual a

$$5 + 5 + 5 - (1 + 1 + 1) + 0 = 12$$

III

Seja a o número de arestas de G . Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $2a = 4v$, ou seja $a = 2v$.

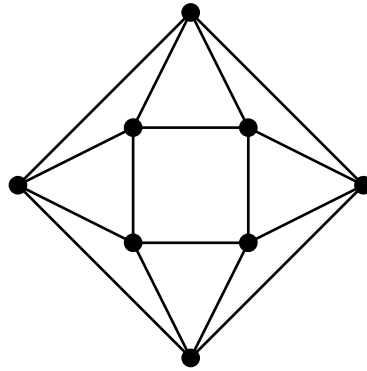
1. Se $v \leq 4$ então o grafo G não é simples. Nestes casos a excede o nº de arestas do grafo completo K_v . Se $v = 5$ então $a = 10$ e portanto $G \approx K_5$ é um grafo completo de ordem 5. Logo G não pode ser um grafo planar. Estes absurdos provam que $v \geq 6$.

2. Cada componente conexa de G é um grafo nas condições da alínea anterior, portanto tem pelo menos seis vértices. Logo $6c \leq 15$, o que implica $c \leq 2$.

3. G tem $a = 30$ arestas. Pela alínea anterior $c \leq 2$.

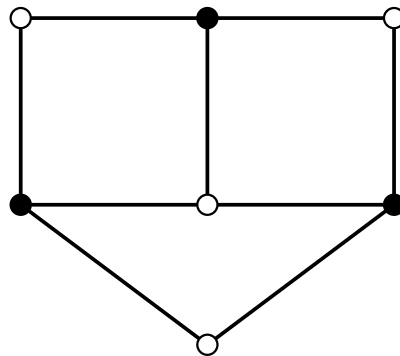
Usando a fórmula de Euler generalizada temos $f - 15 = f - a + v = c + 1 \leq 2 + 1$. Logo $f \leq 18$.

4.



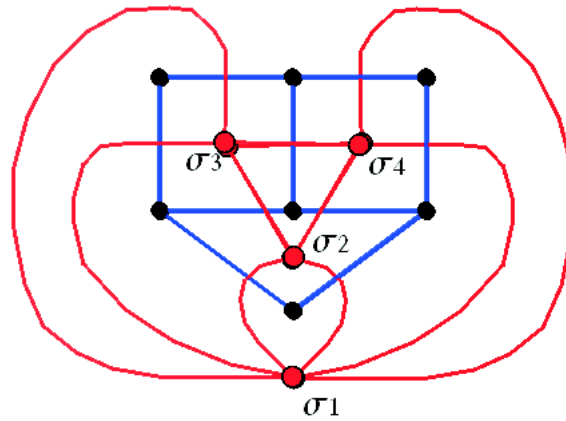
IV

1. O número cromático é sempre ≥ 2 desde que haja pelo menos uma aresta. O grafo G tem número cromático 2 porque existe uma 2-coloração, como se mostra na figura seguinte.



2. O grafo G é um grafo bipartido de tipo $p \times q$ com $p = 4$ vértices "brancos" e $q = 3$ vértices "pretos". Ao longo de um ciclo hamiltoniano os vértices "pretos" alternam com os "brancos". Assim, se existisse um ciclo hamiltoniano teríamos $4 = p = q = 3$. Logo não pode haver um ciclo hamiltoniano.

3. Representação planar topológica para o dual de G .



4. O dual de G tem três vértices de grau 4 (que correspondem às faces do mesmo grau), e o restante vértice de grau 6 (correspondente à face ilimitada). Logo, pelo Teorema de Euler, o dual de G admite ciclos eulerianos, embora não admita cadeias abertas eulerianas. A sequência de vértices

$$\sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_3 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_4 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_4 \mapsto \sigma_3 \mapsto \sigma_1$$

descreve um ciclo euleriano. Observe que cada uma das arestas duplas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ e $\{\sigma_1, \sigma_4\}$ é percorrida duas vezes no ciclo acima.