Tópicos de Matemática Finita **Data: 2-07-2002**

2ªChamada Correcção **Código: 2D**

Nome:

Número: **Curso:**

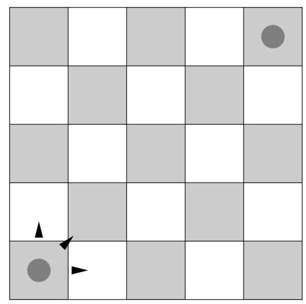
- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

(1v.) **1.** Num tabuleiro de xadrez 5×5 um peão tem três tipos de movimentos:

(1) pode mover-se na horizontal, uma casa para sua direita,
(2) pode mover-se na vertical, uma casa para cima,
(3) pode mover-se na diagonal, uma casa para a direita e uma para cima.



Quantos caminhos (sequências de movimentos) levam o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 7 movimentos? Observe que em todos estes caminhos é feito exactamente um movimento na diagonal.

○ 120　　○ 70　　○ 210　　◉ 140

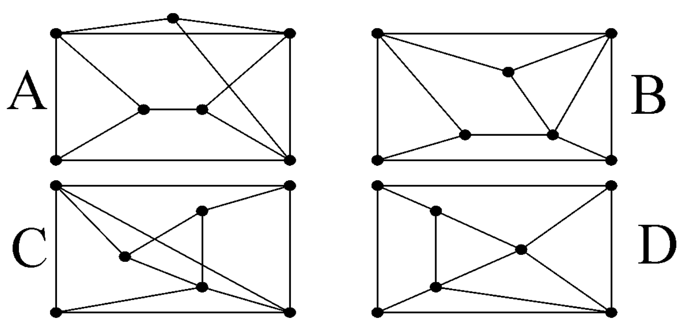
(1v.) **2.** Considere o conjunto de todas as listas de inteiros (x_1, x_2, x_3) tais que

$$2 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 6\ .$$

O cardinal deste conjunto é igual a

○ 42　　○ 21　　○ 28　　◉ 35

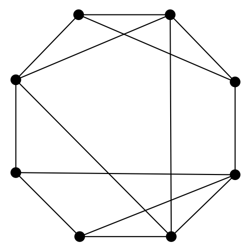
(1v.) **3.** Considere os grafos A, B, C e D na figura em baixo.



Qual deles não é isomorfo aos restantes?

○ A　　○ B　　○ C　　◉ D

(1v.) **4.** Seja H_i o subgrafo gerado pelos vértices de grau i do grafo em baixo.



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
H_3 é conexo.	○	⦿
H_3 é uma árvore.	○	⦿
H_3 tem um ciclo.	○	⦿
H_4 é conexo.	⦿	○
H_4 é uma árvore.	○	⦿
H_4 tem um ciclo.	⦿	○

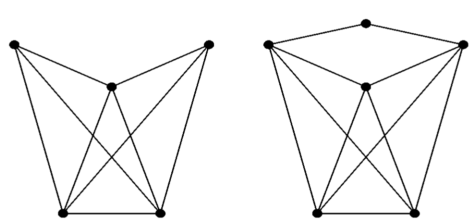
---

5. Um poliedro convexo P tem 32 faces, sendo 20 de grau 3 e 12 faces de grau d. Sabendo que P tem v vértices, todos de grau 4, determine v e d: (1v.)

○	$v = 32$ e $d = 8$	○	$v = 12$ e $d = 4$
○	$v = 24$ e $d = 6$	⦿	$v = 30$ e $d = 5$

---

6. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, resp. à esquerda e à direita. (1v.)

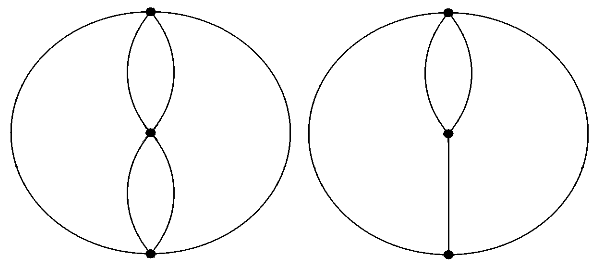


Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 é um grafo planar.	⦿	○
G_2 é um grafo planar.	○	⦿

---

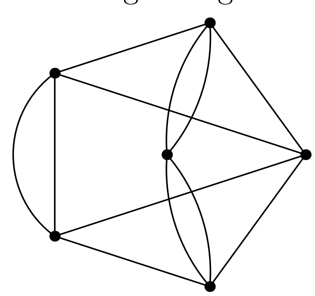
7. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, resp. à esquerda e à direita. (1v.)



Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 é o dual de um grafo com cinco vértices.	◉	○
G_1 é o dual de um grafo sem arestas paralelas.	◉	○
G_1 é o dual de um grafo sem ciclos.	○	◉
G_2 é o dual de um grafo com quatro vértices.	◉	○
G_2 é o dual de um grafo sem ciclos.	○	◉
G_2 é o dual de um grafo sem lacetes.	◉	○

(1v.) **8.** Qual é o índice cromático do seguinte grafo?



○ 5 ○ 6 ◉ 4 ○ 7

II

1. As cartas do baralho podem ser ordenadas de

$$C_3^9 = \frac{9!}{3!\,6!} = 84$$

maneiras diferentes.

2. A probablidade de sairem exactamente 2 *valetes* entre estas 3 cartas é igual a

$$\frac{C_2^3\,C_1^6}{C_3^9} = 3\,\frac{3\times 2\times 6}{9\times 8\times 7} = \frac{3}{14}\ .$$

O baralho é distribuído por 3 jogadores, 3 cartas a cada um.

3. O número total de distribuições é igual ao número de distribuições dos 3 *valetes de paus* pelos três jogadores. Cada distribuição dos 3 *valetes de paus* pode ser completada de uma única maneira: distribuindo os 6 *quatros de ouros* pelos 3 jogadores, de modo a prefazer um total de 3 cartas a cada um. Logo o número total de distribuições é igual a

$$ {}^{\mathrm{rep}}C_3^3 = C_3^5 = 10 \ . $$

4. O complementar do conjunto das distribuições que deixam pelo menos um jogador sem *valetes de paus* é formado pelas distribuições tais que cada jogador tem pelo menos um *valete*. Assim o cardinal do complementar é igual ao número de maneiras de distribuir $0 = 3 - 3$ cartas por 3 jogadores, i.e. ${}^{\mathrm{rep}}C_0^3 = C_0^2 = 1$.

Logo existem $10 - 1 = 9$ distribuições nas condições pedidas.

Para uma solução alternativa seja A_i o conjunto das distribuições que deixam o jogador i sem *valetes*. Pretende saber-se qual o cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. O conjunto A_i das distribuições que deixam o jogador i sem *valetes*, tem cardinal igual ao número de maneiras de distribuir os 3 *valetes* pelos restantes dois jogadores, i.e. ${}^{\mathrm{rep}}C_3^2 = C_3^4 = 4$.

O cardinal das intersecções $A_i \cap A_j$, com $i \neq j$, tem apenas um elemento: a distribuição dos 3 *valetes* pelo terceiro jogador além de i e j.

É claro que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Logo, usando o princípio de inclusão exclusão, vemos que o cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é igual a

$$ 4 + 4 + 4 - (1 + 1 + 1) + 0 = 9 $$

III

Seja a o número de arestas de G. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $2\,a = 4\,v$, ou seja $a = 2\,v$.

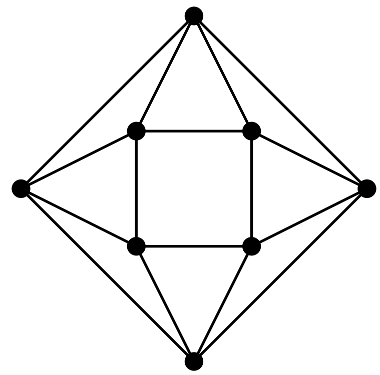
1. Se $v \leq 4$ então o grafo G não é simples. Nestes casos a excede o n$^{\mathrm{o}}$ de arestas do grafo completo K_v. Se $v = 5$ então $a = 10$ e portanto $G \approx K_5$ é um grafo completo de ordem 5. Logo G não pode ser um grafo planar. Estes absurdos provam que $v \geq 6$.

2. Cada componente conexa de G é um grafo nas condições da alínea anterior, portanto tem pelo menos seis vértices. Logo $6\,c \leq 15$, o que implica $c \leq 2$.

3. G tem $a = 30$ arestas. Pela alínea anterior $c \leq 2$.

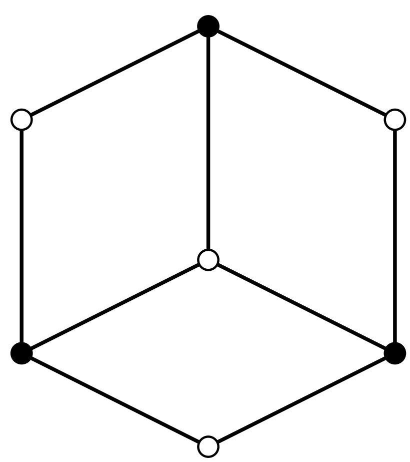
Usando a fórmula de Euler generalizada temos $f - 15 = f - a + v = c + 1 \leq 2 + 1$. Logo $f \leq 18$.

4.



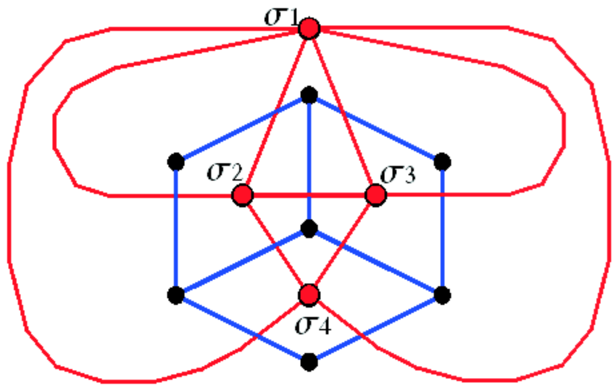
IV

1. O número cromático é sempre ≥ 2 desde que haja pelo menos uma aresta. O grafo G tem número cromático 2 porque existe uma 2-coloração, como se mostra na figura seguinte.



2. O grafo G é um grafo bipartido de tipo $p \times q$ com $p = 4$ vértices "brancos" e $q = 3$ vértices "pretos". Ao longo de um ciclo hamiltoniano os vértices "pretos" alternam com os "brancos". Assim, se existisse um ciclo hamiltoniano teriamos $4 = p = q = 3$. Logo não pode haver um ciclo hamiltoniano.

3. Representação planar topológica para o dual de G.



4. O dual de G tem três vértices de grau 4 (que correspondem às faces do mesmo grau), e o restante vértice de grau 6 (correspondente à face ilimitada). Logo, pelo Teorema de Euler, o dual de G admite ciclos eulerianos, embora não admita cadeias abertas eulerianas. A sequência de vértices

$$\sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_3 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_4 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_4 \mapsto \sigma_3 \mapsto \sigma_1$$

descreve um ciclo euleriano. Observe que cada uma das arestas duplas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ e $\{\sigma_1, \sigma_4\}$ é percorrida duas vezes no ciclo acima.