Tópicos de Matemática Finita **Data: 15-07-2002**

2ªÉpoca Correcção **Código: 3A**

Nome:

Número: **Curso:**

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
Nota Final	

I

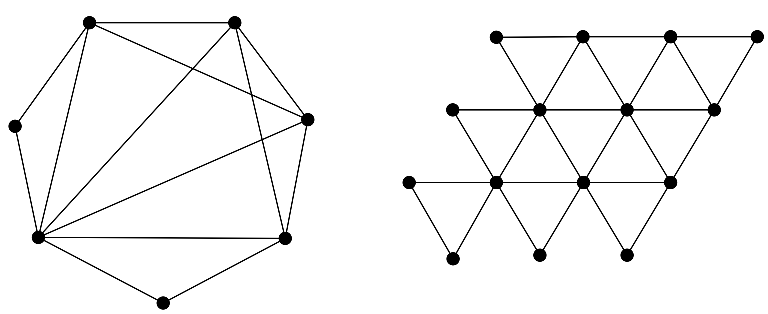
(1v.) **1.** Dezasseis bolas, oito brancas e oito verdes, são misturadas e distribuídas por duas caixas de modo que cada caixa fique exactamente com oito bolas. Qual o número total destas distribuições?

Nº de distribuições $= {}^{\text{rep}}C_8^2 = C_8^9 = 9$

(1v.) **2.** Uma sequência de k letras contem um "C", dois "B"'s e $k-3$ "A"'s. Determine k sabendo que existem exactamente 30 permutações desta sequência de letras.

◉ $k = 5$ ○ $k = 6$ ○ $k = 4$ ○ $k = 3$

(1v.) **3.** Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



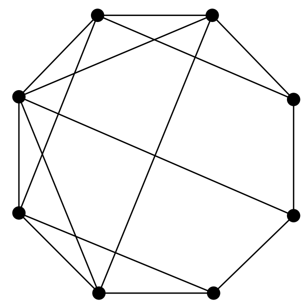
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 tem ciclos eulerianos.	◉	○
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	◉	○
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	○	◉
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	○	◉

(1v.) **4.** Escolha a melhor estimativa. Num poliedro convexo com 30 arestas o número de vértices é menor ou igual a:

○ 18 ◉ 20 ○ 24 ○ 22

(1v.) **5.** Seja H o grafo parcial, do grafo na figura em baixo, que é gerado pelo conjunto de todas as arestas tais que a soma dos graus das suas extremidades seja menor ou igual a 7.



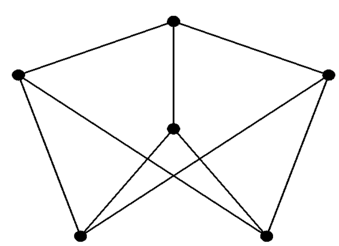
Assinale a afirmação correcta.

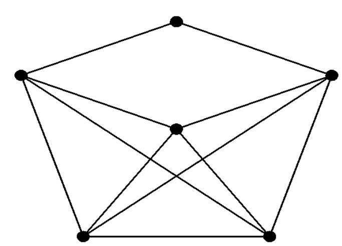
	Sim	Não
O grafo parcial H tem pelo menos um ciclo.	○	◉

E preencha o seguinte campo:
O grafo parcial H tem duas componente(s) conexa(s).

---

6. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)





Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 é um grafo planar.	○	◉
G_2 é um grafo planar.	○	◉

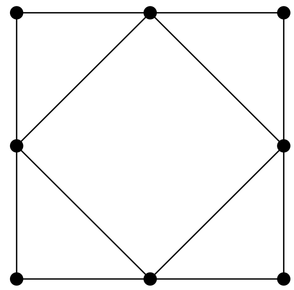
---

7. Seja G um grafo planar topológico com c componentes conexas. Sabendo que G tem 9 arestas, 6 faces e v vértices, todos de grau 3, determine: (1v.)

◉	$c = 2$ e $v = 6$	○	$c = 3$ e $v = 7$
○	$c = 1$ e $v = 5$	○	$c = 2$ e $v = 8$

---

8. Qual é o número cromático do seguinte grafo? (1v.)



○ 2 ◉ 3 ○ 4 ○ 5

II

1. O número de distribuições dos 3 livros, que são distintos, por 5 crianças é igual $5^3 = 125$.

O número de distribuições dos 7 jogos, todos idênticos, por 5 crianças é igual

$$ {}^{\text{rep}}C_7^5 = C_7^{5+7-1} = C_7^{11} = C_4^{11} = \frac{11!}{4!\,7!} = 330 \, . $$

Logo o número de distribuições conjuntas dos 10 presentes, sem mais restrições, é igual ao produto $5^3 \times {}^{\text{rep}}C_7^5 = 125 \times 330 = 41250$.

2. O número de distribuições dos 3 livros por 5 crianças, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual a $\mathrm{A}_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$.

Logo o número de distribuições conjuntas dos 10 presentes, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual ao produto $\mathrm{A}_3^5 \times {}^{\text{rep}}C_7^5 = 60 \times 330 = 19800$.

3. Cada distribuição dos 3 livros por 5 crianças tal que nenhuma criança fique com todos os 3 livros pode ser completada, de um modo único, por uma distribuição dos 7 jogos de modo que cada criança fique exactamente com 2 presentes.

Como existem 5 distribuições que atribuiem os 3 livros a uma mesma criança, há $5^3 - 5 = 125 - 5 = 120$ distribuições nas condições pedidas.

4. Numeremos as 5 crianças de 1 a 5. Seja A_i o conjunto das distribuições dos 7 jogos por 5 crianças de modo que a $i-$ésima criança fique com pelo menos 4 jogos. Então

$$ |A_i| = {}^{\text{rep}}C_3^5 = C_3^7 = \frac{7!}{4!\,3!} = 35 \, . $$

Note que para cada $i \neq j$ a intersecção $A_i \cap A_j$ é vazia. É impossivel atribuir simultâneamente 4 jogos a cada uma das crianças i e j.

O cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ é igual a

$$5 \times {}^{\text{rep}}C_3^5 = 5 \times C_3^7 = 175 \,.$$

Logo o número de distribuições nas condições pedidas é igual a

$$5^3 \times \left({}^{\text{rep}}C_7^5 - 5 \times {}^{\text{rep}}C_3^5\right) = 125 \times (330 - 175) = 19375 \,.$$

III

Sejam v_H e a_H respectivamente os números de vértices e de arestas de H.

1. Todos os vértices de H têm grau 1. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $2\,a_H = v_H \leq 11$. Logo $a_H \leq 5$.

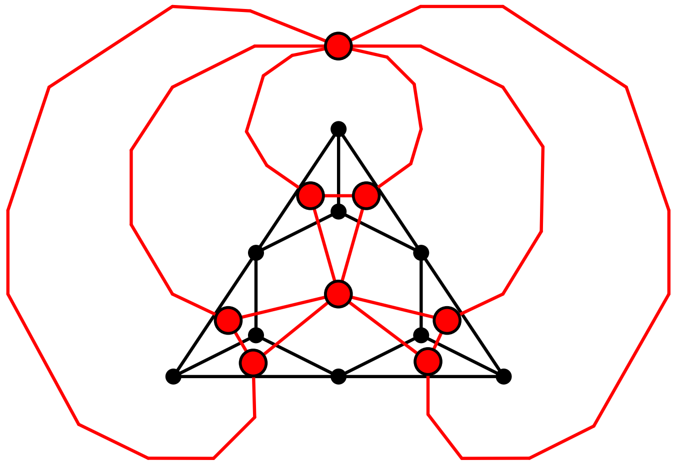
2. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 10 porque G é um grafo simples de ordem 11. Queremos ver que há pelo menos um vértice de grau 10. Suponhamos, por absurdo, que não. Então todos os vértices de G teriam grau menor ou igual a 9. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas viria $104 = 2\,a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 9\,v \leq 99$. Deste absurdo concluimos que tem de haver pelo menos um vértice de grau 10.

3. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 10 porque G é um grafo simples de ordem 11. Seja x o número de vértices de grau 10. Queremos ver que $x \geq 5$. O grafo G tem x vértices de grau 10 e $11 - x$ vértices de grau menor ou igual a 9. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $104 = 2\,a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 10\,x + 9\,(11 - x) = x + 99$. Logo $x \geq 5$.

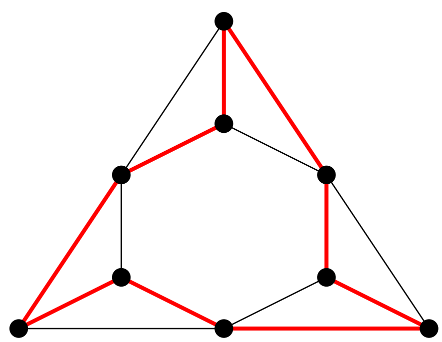
4. G é um grafo simples com máximo grau de vértice igual a 10. Pelo teorema de Vizing o índice cromático de G é igual a 10 ou 11. Suponhamos, por absurdo, que G tem índice cromático igual a 10. Então existe uma 10-coloração das arestas de G. De cada cor podemos colorir no máximo 5 arestas. Havendo 6 arestas de uma mesma cor elas teriam em conjunto $2 \times 6 = 12$ vértices extremidades, o que excede a ordem de G. Logo, se usarmos apenas $q = 10$ cores, podemos colorir no máximo $5\,q = 50$ arestas. Isto contradiz o facto de G ter 52 arestas. Deste absurdo inferimos que o índice cromático de G tem de ser igual a 11.

IV

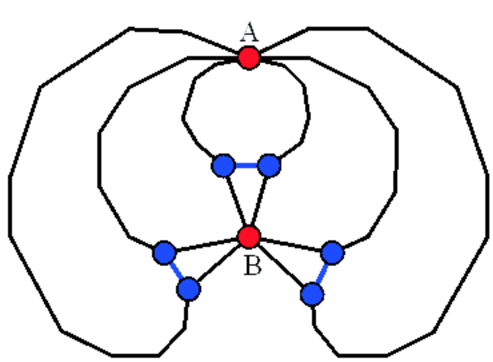
1. Representação planar topológica para o dual G^* de G.



2. O grafo G tem o seguinte ciclo hamiltoniano.



O dual G^* não tem ciclos hamiltonianos porque removendo os vértices assinalados com as letras A e B na figura em baixo os restantes seis vértices geram um subgrafo com 3 componentes conexas. A existir um ciclo hamiltoniano o número de componentes conexas teria de ser menor ou igual ao número, 2, de vértices removidos.



3. Os grafos G e G^* têm ciclos de comprimento 3. Logo ambos os grafos têm número cromático maior ou igual a 3. As 3-colorações nas figuras em baixo mostram que os dois grafos, G e G^*, têm número cromático igual a 3.