

Nome:

Número:

Curso:

---

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
  - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
  - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
  - A ausência de resposta não será pontuada.
  - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
  - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
- 

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
Nota Final	

## I

- (1v.) 1. Dezasseis bolas, oito brancas e oito verdes, são misturadas e distribuídas por duas caixas de modo que cada caixa fique exactamente com oito bolas. Qual o número total destas distribuições?

Nº de distribuições =

- (1v.) 2. Uma sequência de  $k$  letras contem um "C", dois "B"s e  $k - 3$  "A"s. Determine  $k$  sabendo que existem exactamente 30 permutações desta sequência de letras.



$k = 5$



$k = 6$

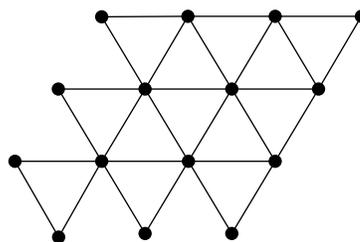
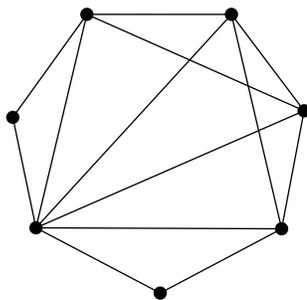


$k = 4$



$k = 3$

- (1v.) 3. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

$G_1$  tem ciclos eulerianos.

Sim



Não



$G_1$  tem ciclos hamiltonianos.



$G_2$  tem ciclos hamiltonianos.



$G_2$  tem cadeias abertas eulerianas.



4. Escolha a melhor estimativa. Num poliedro convexo com 30 arestas o número de vértices é menor ou igual a: (1v.)

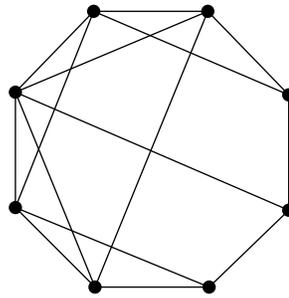
18

20

24

22

5. Seja  $H$  o grafo parcial, do grafo na figura em baixo, que é gerado pelo conjunto de todas as arestas tais que a soma dos graus das suas extremidades seja menor ou igual a 7. (1v.)



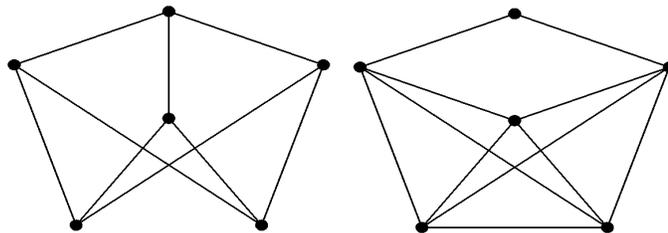
Assinale a afirmação correcta.

O grafo parcial  $H$  tem pelo menos um ciclo.  Sim  Não

E preencha o seguinte campo:

O grafo parcial  $H$  tem \_\_\_\_\_ componente(s) conexa(s).

6. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



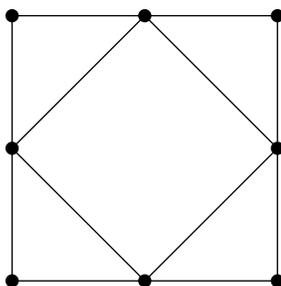
Assinale as afirmações correctas.

$G_1$  é um grafo planar.  Sim  Não  
 $G_2$  é um grafo planar.  Sim  Não

- (1v.) 7. Seja  $G$  um grafo planar topológico com  $c$  componentes conexas. Sabendo que  $G$  tem 9 arestas, 6 faces e  $v$  vértices, todos de grau 3, determine:

<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 6$	<input type="checkbox"/>	$c = 3$ e $v = 7$
<input type="checkbox"/>	$c = 1$ e $v = 5$	<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 8$

- (1v.) 8. Qual é o número cromático do seguinte grafo?



- |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

## II

Considere todas as distribuições de um conjunto de 10 presentes, uma colecção de 3 livros distintos mais 7 jogos idênticos, por 5 crianças. Quantas distribuições há satisfazendo as seguintes restrições:

- (1v.) 1. sem restrições.
- (1v.) 2. de modo que nenhuma criança fique com dois ou mais livros.
- (1v.) 3. de modo que cada criança fique exactamente com 2 presentes.
- (1v.) 4. de modo que nenhuma criança fique com 4 ou mais jogos.

## III

Seja  $G$  um grafo simples de ordem  $v = 11$ , com  $a = 52$  arestas e  $H$  um seu subgrafo parcial com todos os seus vértices de grau 1.

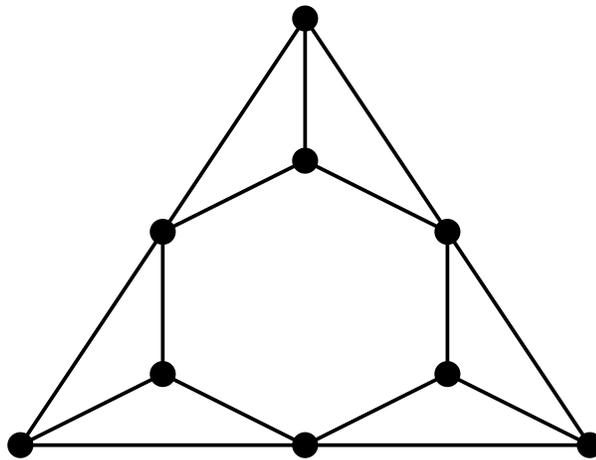
- (1v.) 1. Mostre que  $H$  tem no máximo 5 arestas.

Deve optar por responder apenas a uma das alíneas **2.** ou **3.**.

2. Prove que  $G$  tem pelo menos um vértice de grau  $d = 10$ . (1v.)
3. Prove que  $G$  tem pelo menos 5 vértices de grau  $d = 10$ . (1,5 v.)
4. Mostre que  $G$  tem índice cromático  $\chi(G) = 11$ . (1,5 v.)

#### IV

Considere o grafo planar topológico  $G$  na figura seguinte



1. Encontre uma representação planar topológica para o dual  $G^*$  de  $G$ . (1v.)
2. Admitem ciclos hamiltonianos os grafo  $G$  e  $G^*$ ? (1,5 v.)  
Justifique. Em caso afirmativo dê exemplos.
3. Quais os números cromáticos de  $G$  e  $G^*$ ? (1,5 v.)  
Encontre colorações de vértices correspondentes.