

Nome:

Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
Nota Final	

I

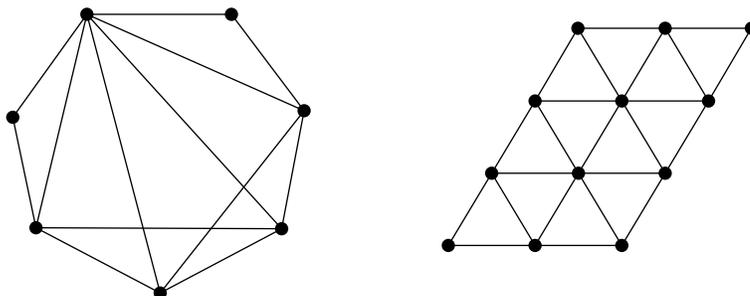
- (1v.) 1. Doze bolas, seis vermelhas e seis verdes, são misturadas e distribuídas por duas caixas de modo que cada caixa fique exactamente com seis bolas. Qual o número total destas distribuições?

$$\text{N}^\circ \text{ de distribuições} = {}^{\text{rep}}C_6^2 = C_6^7 = 7$$

- (1v.) 2. Uma sequência de k letras contém três "C"'s, um "D" e $k - 4$ "E"'s. Determine k sabendo que existem exactamente 60 permutações desta sequência de letras.

$k = 5$
 $k = 6$
 $k = 8$
 $k = 7$

- (1v.) 3. Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

G_1 tem ciclos eulerianos.

Sim	Não
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

G_1 tem ciclos hamiltonianos.

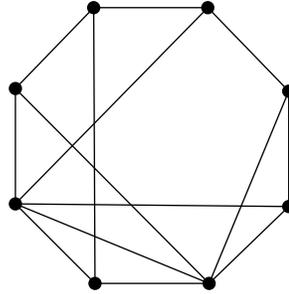
G_2 tem ciclos hamiltonianos.

G_2 tem cadeias abertas eulerianas.

- (1v.) 4. Escolha a melhor estimativa. Num poliedro convexo com 9 arestas o número de vértices é menor ou igual a:

8
 10
 4
 6

- (1v.) 5. Seja H o grafo parcial, do grafo na figura em baixo, que é gerado pelo conjunto de todas as arestas tais que a soma dos graus das suas extremidades seja maior ou igual a 8.



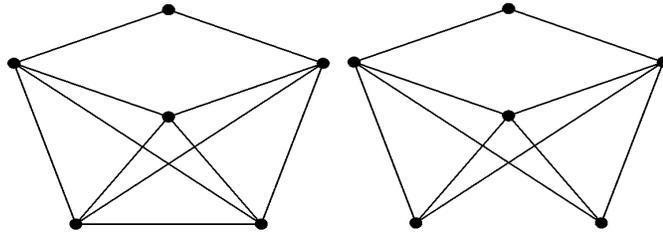
Assinale a afirmação correcta.

O grafo parcial H tem pelo menos um ciclo. Sim Não

E preencha o seguinte campo:

O grafo parcial H tem duas componente(s) conexas.

6. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



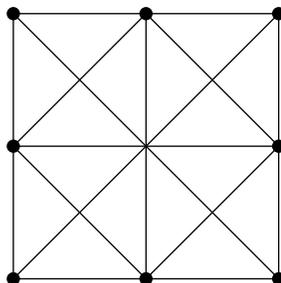
Assinale as afirmações correctas.

Sim Não
 G_1 é um grafo planar.
 G_2 é um grafo planar.

7. Seja G um grafo planar topológico com c componentes conexas. Sabendo que G tem 16 arestas, 12 faces e v vértices, todos de grau 4, determine: (1v.)

<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 6$	<input checked="" type="checkbox"/>	$c = 3$ e $v = 8$
<input type="checkbox"/>	$c = 1$ e $v = 5$	<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 8$

8. Qual é o número cromático do seguinte grafo? (1v.)



2



5



4



3

II

1. O número de distribuições dos 3 livros, que são distintos, por 4 crianças é igual $4^3 = 64$.

O número de distribuições dos 5 jogos, todos idênticos, por 4 crianças é igual

$$\text{rep}C_5^4 = C_5^{4+5-1} = C_5^8 = C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Logo o número de distribuições conjuntas dos 8 presentes, sem mais restrições, é igual ao produto $4^3 \times \text{rep}C_5^4 = 64 \times 56 = 3584$.

2. O número de distribuições dos 3 livros por 4 crianças, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual a $A_3^4 = \frac{4!}{1!} = 24$.

Logo o número de distribuições conjuntas dos 8 presentes, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual ao produto $A_3^4 \times \text{rep}C_5^4 = 24 \times 56 = 1344$.

3. Cada distribuição dos 3 livros por 4 crianças tal que nenhuma criança fique com todos os 3 livros pode ser completada, de um modo único, por uma distribuição dos 5 jogos de modo que cada criança fique exactamente com 2 presentes.

Como existem 4 distribuições que atribuem os 3 livros a uma mesma criança, há $4^3 - 4 = 64 - 4 = 60$ distribuições nas condições pedidas.

4. Numeremos as 4 crianças de 1 a 4. Seja A_i o conjunto das distribuições dos 5 jogos por 4 crianças de modo que a i -ésima criança fique com pelo menos 3 jogos. Então

$$|A_i| = \text{rep}C_2^4 = C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Note que para cada $i \neq j$ a intersecção $A_i \cap A_j$ é vazia. É impossível atribuir simultaneamente 3 jogos a cada uma das crianças i e j .

O cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ é igual a

$$4 \times {}^{\text{rep}}C_2^4 = 4 \times C_2^5 = 40 .$$

Logo o número de distribuições nas condições pedidas é igual a

$$4^3 \times ({}^{\text{rep}}C_5^4 - 4 \times {}^{\text{rep}}C_2^4) = 64 \times (56 - 40) = 1024 .$$

III

Sejam v_H e a_H respectivamente os números de vértices e de arestas de H .

1. Todos os vértices de H têm grau 1. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $2 a_H = v_H \leq 11$. Logo $a_H \leq 5$.

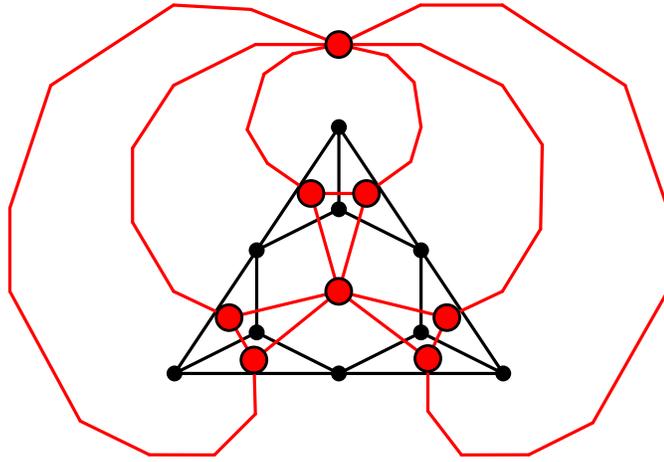
2. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 10 porque G é um grafo simples de ordem 11. Queremos ver que há pelo menos um vértice de grau 10. Suponhamos, por absurdo, que não. Então todos os vértices de G teriam grau menor ou igual a 9. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas viria $102 = 2a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 9v \leq 99$. Deste absurdo concluímos que tem de haver pelo menos um vértice de grau 10.

3. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 10 porque G é um grafo simples de ordem 11. Seja x o número de vértices de grau 10. Queremos ver que $x \geq 3$. O grafo G tem x vértices de grau 10 e $11 - x$ vértices de grau menor ou igual a 9. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $102 = 2a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 10x + 9(11 - x) = x + 99$. Logo $x \geq 3$.

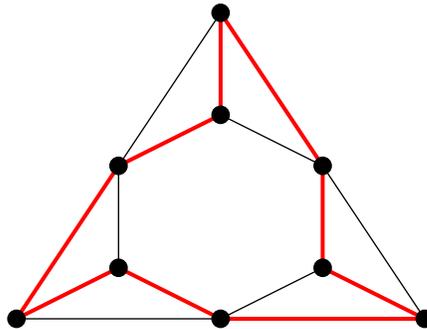
4. G é um grafo simples com máximo grau de vértice igual a 10. Pelo teorema de Vizing o índice cromático de G é igual a 10 ou 11. Suponhamos, por absurdo, que G tem índice cromático igual a 10. Então existe uma 10-coloração das arestas de G . De cada cor podemos colorir no máximo 5 arestas. Havendo 6 arestas de uma mesma cor elas teriam em conjunto $2 \times 6 = 12$ vértices extremidades, o que excede a ordem de G . Logo, se usarmos apenas $q = 10$ cores, podemos colorir no máximo $5q = 50$ arestas. Isto contradiz o facto de G ter 51 arestas. Deste absurdo inferimos que o índice cromático de G tem de ser igual a 11.

IV

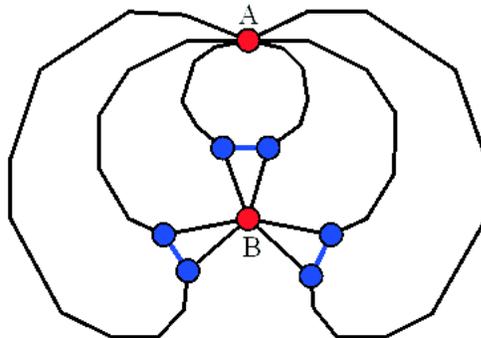
1. Representação planar topológica para o dual G^* de G .



2. O grafo G tem o seguinte ciclo hamiltoniano.



O dual G^* não tem ciclos hamiltonianos porque removendo os vértices assinalados com as letras A e B na figura em baixo os restantes seis vértices geram um subgrafo com 3 componentes conexas. A existir um ciclo hamiltoniano o número de componentes conexas teria de ser menor ou igual ao número, 2, de vértices removidos.



3. Os grafos G e G^* têm ciclos de comprimento 3. Logo ambos os grafos têm número cromático maior ou igual a 3. As 3-colorações nas figuras em baixo mostram que os dois grafos, G e G^* , têm número cromático igual a 3.

