
Nome:

Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
Nota Final	

I

- (1v.) 1. Quatorze bolas, sete azuis e sete brancas, são misturadas e distribuídas por duas caixas de modo que cada caixa fique exactamente com sete bolas. Qual o número total destas distribuições?

$$\text{N}^\circ \text{ de distribuições} = {}^{\text{rep}}C_7^2 = C_7^8 = 8$$

- (1v.) 2. Uma sequência de k letras contem dois "Q"s, dois "P"s e $k - 4$ "O"s. Determine k sabendo que existem exactamente 90 permutações desta sequência de letras.

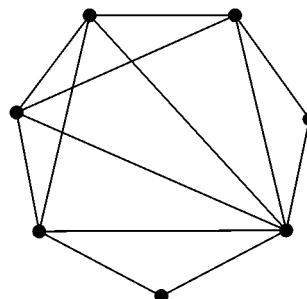
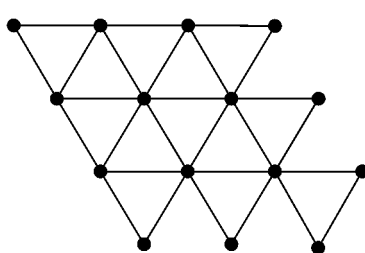

 $k = 5$

 $k = 6$

 $k = 8$

 $k = 7$

- (1v.) 3. Considere os grafos G_1 e G_2 embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

G_1 tem cadeias abertas eulerianas.

Sim



Não



G_1 tem ciclos hamiltonianos.



G_2 tem ciclos hamiltonianos.



G_2 tem ciclos eulerianos.



- (1v.) 4. Escolha a melhor estimativa. Num poliedro convexo com 12 arestas o número de vértices é menor ou igual a:

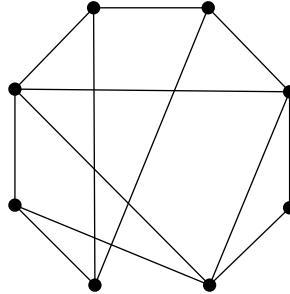

 8

 10

 4

 6

- (1v.) 5. Seja H o grafo parcial, do grafo na figura em baixo, que é gerado pelo conjunto de todas as arestas tais que a soma dos graus das suas extremidades seja igual a 6.



Assinale a afirmação correcta.

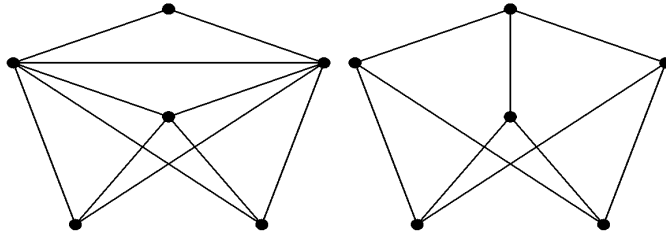
O grafo parcial H tem pelo menos um ciclo.

Sim	Não
☒	☐

E preencha o seguinte campo:

O grafo parcial H tem três componente(s) conexa(s).

6. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



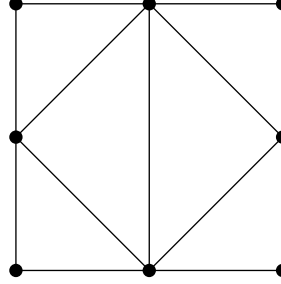
Assinale as afirmações correctas.

	Sim	Não
G_1 é um grafo planar.	☒	☐
G_2 é um grafo planar.	☐	☒

7. Seja G um grafo planar topológico com c componentes conexas. Sabendo que G tem 12 arestas, 10 faces e v vértices, todos de grau 4, determine: (1v.)

☐	$c = 2$ e $v = 7$	☒	$c = 3$ e $v = 6$
☐	$c = 1$ e $v = 8$	☐	$c = 2$ e $v = 8$

8. Qual é o número cromático do seguinte grafo? (1v.)



2



3



4



5

II

1. O número de distribuições dos 3 livros, que são distintos, por 4 crianças é igual $4^3 = 64$.

O número de distribuições dos 5 jogos, todos idênticos, por 4 crianças é igual

$$\text{rep}C_5^4 = C_5^{4+5-1} = C_5^8 = C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Logo o número de distribuições conjuntas dos 8 presentes, sem mais restrições, é igual ao produto $4^3 \times \text{rep}C_5^4 = 64 \times 56 = 3584$.

2. O número de distribuições dos 3 livros por 4 crianças, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual a $A_3^4 = \frac{4!}{1!} = 24$.

Logo o número de distribuições conjuntas dos 8 presentes, de modo que nenhuma criança fique com mais de um livro, é igual ao produto $A_3^4 \times \text{rep}C_5^4 = 24 \times 56 = 1344$.

3. Cada distribuição dos 3 livros por 4 crianças tal que nenhuma criança fique com todos os 3 livros pode ser completada, de um modo único, por uma distribuição dos 5 jogos de modo que cada criança fique exactamente com 2 presentes.

Como existem 4 distribuições que atribuem os 3 livros a uma mesma criança, há $4^3 - 4 = 64 - 4 = 60$ distribuições nas condições pedidas.

4. Numeremos as 4 crianças de 1 a 4. Seja A_i o conjunto das distribuições dos 5 jogos por 4 crianças de modo que a i -ésima criança fique com pelo menos 3 jogos. Então

$$|A_i| = \text{rep}C_2^4 = C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Note que para cada $i \neq j$ a intersecção $A_i \cap A_j$ é vazia. É impossível atribuir simultaneamente 3 jogos a cada uma das crianças i e j .

O cardinal da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ é igual a

$$4 \times {}^{\text{rep}}C_2^4 = 4 \times C_2^5 = 40 .$$

Logo o número de distribuições nas condições pedidas é igual a

$$4^3 \times ({}^{\text{rep}}C_5^4 - 4 \times {}^{\text{rep}}C_2^4) = 64 \times (56 - 40) = 1024 .$$

III

Sejam v_H e a_H respectivamente os números de vértices e de arestas de H .

1. Todos os vértices de H têm grau 1. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $2a_H = v_H \leq 13$. Logo $a_H \leq 6$.

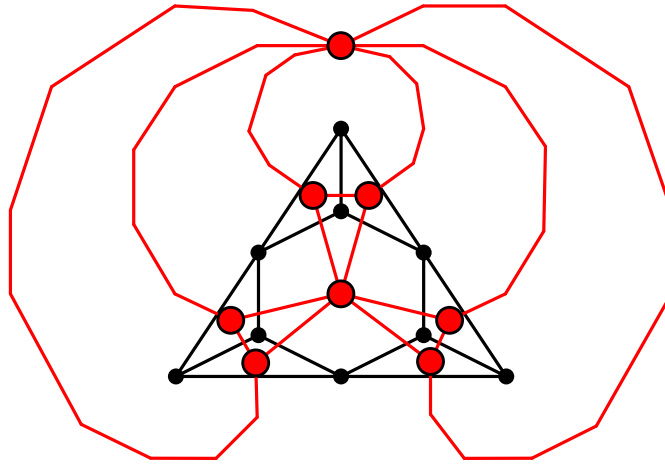
2. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 12 porque G é um grafo simples de ordem 13. Queremos ver que há pelo menos um vértice de grau 12. Suponhamos, por absurdo, que não. Então todos os vértices de G teriam grau menor ou igual a 11. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas viria $148 = 2a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 11v \leq 143$. Deste absurdo concluímos que tem de haver pelo menos um vértice de grau 12.

3. Todos os vértices têm grau menor ou igual a 12 porque G é um grafo simples de ordem 13. Seja x o número de vértices de grau 12. Queremos ver que $x \geq 5$. O grafo G tem x vértices de grau 12 e $13 - x$ vértices de grau menor ou igual a 11. Como a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas temos $148 = 2a = \sum_{x \in V} \deg(x) \leq 12x + 11(13 - x) = x + 143$. Logo $x \geq 5$.

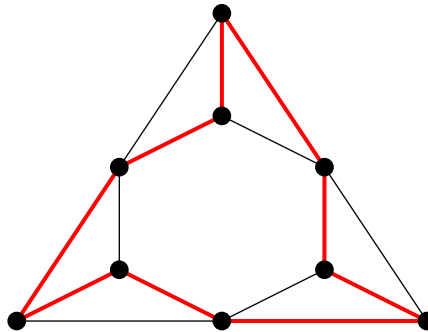
4. G é um grafo simples com máximo grau de vértice igual a 12. Pelo teorema de Vizing o índice cromático de G é igual a 12 ou 13. Suponhamos, por absurdo, que G tem índice cromático igual a 12. Então existe uma 12-coloração das arestas de G . De cada cor podemos colorir no máximo 6 arestas. Havendo 7 arestas de uma mesma cor elas teriam em conjunto $2 \times 7 = 14$ vértices extremidades, o que excede a ordem de G . Logo, se usarmos apenas $q = 12$ cores, podemos colorir no máximo $6q = 72$ arestas. Isto contradiz o facto de G ter 74 arestas. Deste absurdo inferimos que o índice cromático de G tem de ser igual a 13.

IV

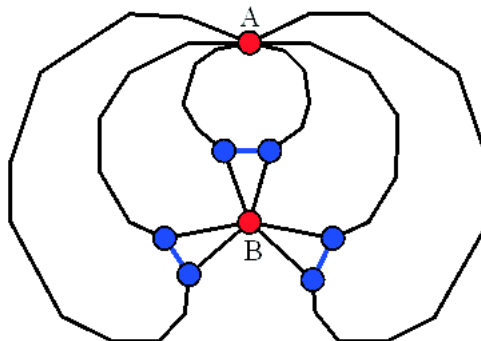
1. Representação planar topológica para o dual G^* de G .



2. O grafo G tem o seguinte ciclo hamiltoniano.



O dual G^* não tem ciclos hamiltonianos porque removendo os vértices assinalados com as letras A e B na figura em baixo os restantes seis vértices geram um subgrafo com 3 componentes conexas. A existir um ciclo hamiltoniano o número de componentes conexas teria de ser menor ou igual ao número, 2, de vértices removidos.



3. Os grafos G e G^* têm ciclos de comprimento 3. Logo ambos os grafos têm número cromático maior ou igual a 3. As 3-colorações nas figuras em baixo mostram que os dois grafos, G e G^* , têm número cromático igual a 3.

