

Nome:

Número:

Curso:

---

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
  - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
  - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
  - A ausência de resposta não será pontuada.
  - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
  - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
- 

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
Nota Final	

## I

- (1v.) 1. Quatorze bolas, sete azuis e sete brancas, são misturadas e distribuídas por duas caixas de modo que cada caixa fique exactamente com sete bolas. Qual o número total destas distribuições?

Nº de distribuições =

- (1v.) 2. Uma sequência de  $k$  letras contem dois "Q"'s, dois "P"'s e  $k - 4$  "O"'s. Determine  $k$  sabendo que existem exactamente 90 permutações desta sequência de letras.



$k = 5$



$k = 6$

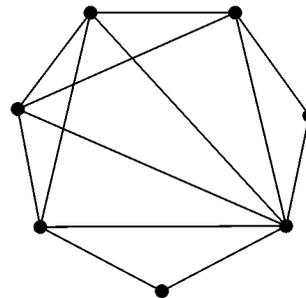
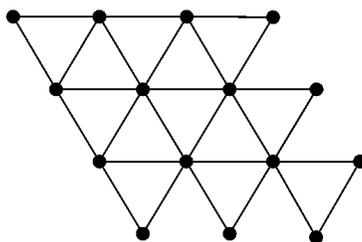


$k = 8$



$k = 7$

- (1v.) 3. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  embaixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

$G_1$  tem cadeias abertas eulerianas.

Sim



Não



$G_1$  tem ciclos hamiltonianos.



$G_2$  tem ciclos hamiltonianos.



$G_2$  tem ciclos eulerianos.



4. Escolha a melhor estimativa. Num poliedro convexo com 12 arestas o número de vértices é menor ou igual a: (1v.)



8



10

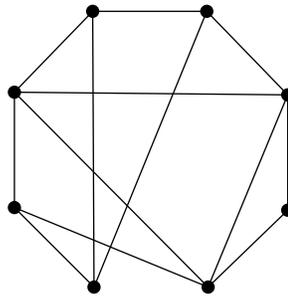


4



6

5. Seja  $H$  o grafo parcial, do grafo na figura em baixo, que é gerado pelo conjunto de todas as arestas tais que a soma dos graus das suas extremidades seja igual a 6. (1v.)



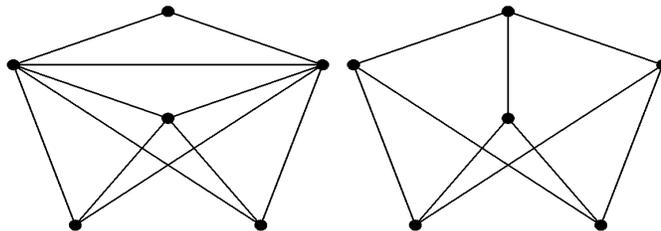
Assinale a afirmação correcta.

O grafo parcial  $H$  tem pelo menos um ciclo.  Sim  Não

E preencha o seguinte campo:

O grafo parcial  $H$  tem \_\_\_\_\_ componente(s) conexa(s).

6. Considere os grafos  $G_1$  e  $G_2$  em baixo, respectivamente à esquerda e à direita. (1v.)



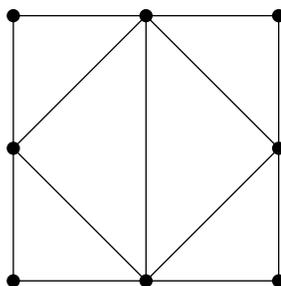
Assinale as afirmações correctas.

$G_1$  é um grafo planar.  Sim  Não  
 $G_2$  é um grafo planar.  Sim  Não

- (1v.) 7. Seja  $G$  um grafo planar topológico com  $c$  componentes conexas. Sabendo que  $G$  tem 12 arestas, 10 faces e  $v$  vértices, todos de grau 4, determine:

<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 7$	<input type="checkbox"/>	$c = 3$ e $v = 6$
<input type="checkbox"/>	$c = 1$ e $v = 8$	<input type="checkbox"/>	$c = 2$ e $v = 8$

- (1v.) 8. Qual é o número cromático do seguinte grafo?



<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---

## II

Considere todas as distribuições de um conjunto de 8 presentes, uma colecção de 3 livros distintos mais 5 jogos idênticos, por 4 crianças. Quantas distribuições há satisfazendo as seguintes restrições:

- (1v.) 1. sem restrições.
- (1v.) 2. de modo que nenhuma criança fique com dois ou mais livros.
- (1v.) 3. de modo que cada criança fique exactamente com 2 presentes.
- (1v.) 4. de modo que nenhuma criança fique com 3 ou mais jogos.

## III

Seja  $G$  um grafo simples de ordem  $v = 13$ , com  $a = 74$  arestas e  $H$  um seu subgrafo parcial com todos os seus vértices de grau 1.

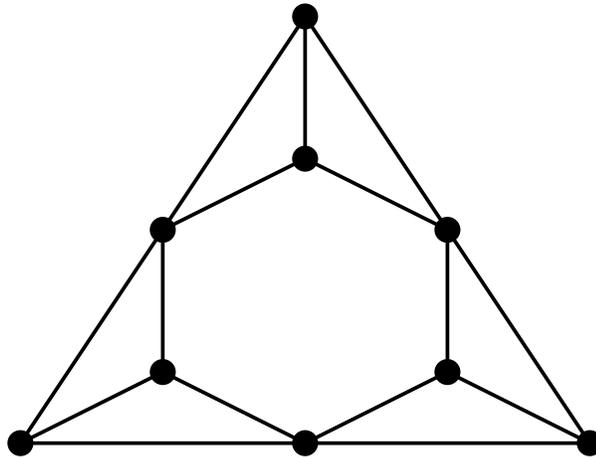
- (1v.) 1. Mostre que  $H$  tem no máximo 6 arestas.

Deve optar por responder apenas a uma das alíneas **2.** ou **3.**.

2. Prove que  $G$  tem pelo menos um vértice de grau  $d = 12$ . (1v.)
3. Prove que  $G$  tem pelo menos 5 vértices de grau  $d = 12$ . (1,5 v.)
4. Mostre que  $G$  tem índice cromático  $\chi(G) = 13$ . (1,5 v.)

#### IV

Considere o grafo planar topológico  $G$  na figura seguinte



1. Encontre uma representação planar topológica para o dual  $G^*$  de  $G$ . (1v.)
2. Admitem ciclos hamiltonianos os grafo  $G$  e  $G^*$ ? (1,5 v.)  
Justifique. Em caso afirmativo dê exemplos.
3. Quais os números cromáticos de  $G$  e  $G^*$ ? (1,5 v.)  
Encontre colorações de vértices correspondentes.