Tópicos de Matemática Finita **Data: 20-06-2003**

1ªÉpoca Correcção **Código: 1A**

Nome:

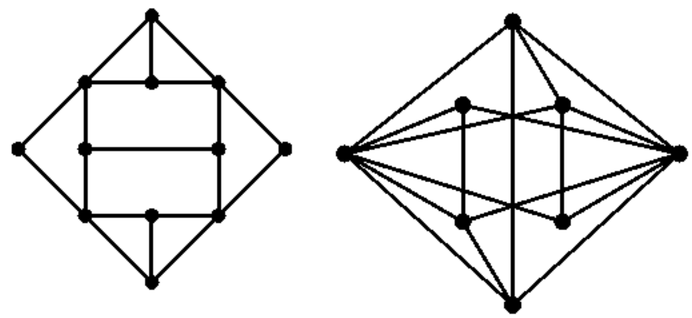
Número: **Curso:**

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

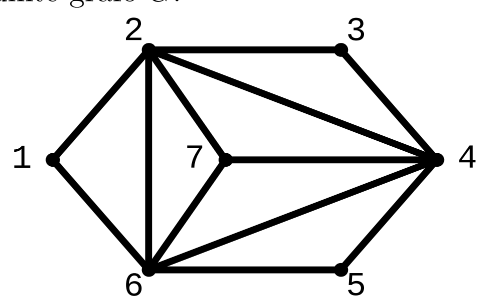
(1v.) **1.** Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

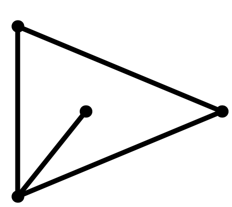
	Sim	Não
G_1 tem ciclos eulerianos.	○	◉
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	○	◉
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	◉	○
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	◉	○

(1v.) **2.** Considere o seguinte grafo G.

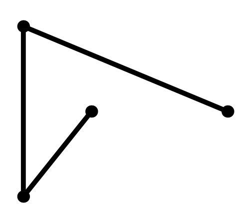


Assinale com uma cruz quais dos grafos de ordem 4 em baixo são isomorfos a subgrafos de G.

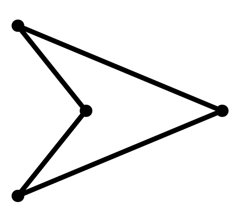
Sim	Não
◉	○



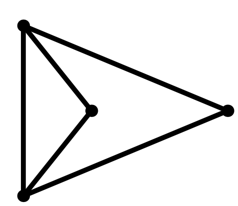
Sim	Não
◉	○



Sim	Não
○	◉



Sim	Não
◉	○



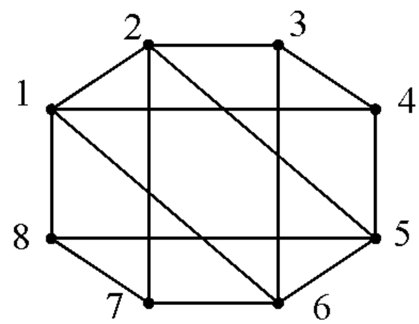
---

3. Escolha a resposta correcta. Um poliedro convexo com 8 arestas pode ter o seguinte número de faces: (1v.)

○ 3   ○ 4   ◉ 5   ○ 6

---

4. Complete a demonstração de não planaridade do seguinte grafo G. (1v.)



Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar, isto é que G admite uma representação planar toplógica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1\}$ corresponde a uma curva simples fechada. Suponhamos que, nesta representação, a aresta $\{1, 6\}$ é interior à curva γ. Partindo da hipótese contrária pode-se inferir um absurdo análogo.

(1) $\{1, 6\}$ é interior a γ, por hipótese;
(2) $\{2, 7\}$ é exterior a γ, por (1);
(3) $\{5, 8\}$ é interior a γ, por (2);
(4) $\{5, 8\}$ é exterior a γ, por (1);
(5) é a γ, por ;
(6) é a γ, por ;
(7) é a γ, por .

As conclusões, (3) e (4) contradizem-se. Logo G não é planar.

---

5. Um grafo planar topológico conexo G tem $v = 8$ vértices e $a = 15$ arestas. Todas as faces de G têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de faces de grau 3 e y o número de faces de grau 4. Então (1v.)

○ $x = 3$ e $y = 6$ ○ $x = 4$ e $y = 5$
◉ $x = 6$ e $y = 3$ ○ $x = 5$ e $y = 4$

---

6. Seja G um grafo de ordem 13 e $\mathcal{C} = \{V_1, \cdots, V_k\}$ uma coloração de vértices de G num número mínimo de k (= ao número cromático) cores. Suponhamos que todo o subgrafo de G com ordem 4 tem pelo menos uma aresta. (1v.)

O maior número de vértices de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é 3.

O número cromático de G é pelo menos maior ou igual a 5.

(1v.) **7.** Há 15 distribuições de um conjunto de n bolas iguais por três sacos, que deixam pelo menos uma bola em cada saco. Determine o valor de n.

○ $n = 5$ ○ $n = 6$ ◉ $n = 7$ ○ $n = 8$

(1v.) **8.** Quantos amigos têm em conjunto três irmãos: o António, o Beto e o Carlos, sem contar com os próprios, sabendo que:

a) o António tem 5 amigos,
b) o Beto tem 4 amigos,
c) o Carlos tem 4 amigos,
d) o António e o Beto têm 2 amigos em comum,
e) o António e o Carlos têm 1 amigo em comum,
f) o Beto e o Carlos têm 2 amigos comuns,
g) o António, o Beto e o Carlos não têm amigos comuns (aos três).

N^{o} amigos dos três irmãos = 8

II

(1v.) **1.** Seja G um *bouquet de n lacetes*. Como G é um grafo conexo, designando por f o número de faces de G, pela fórmula de Euler temos $f - n + 1 = 2$. Logo $f = n + 1$.

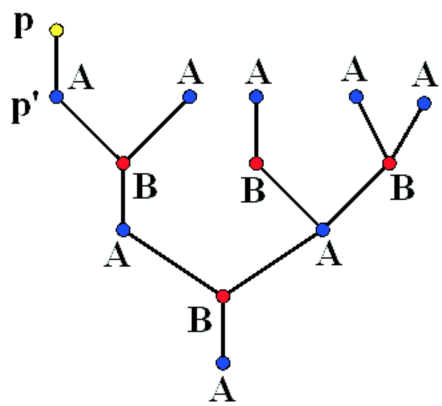
O dual de qualquer grafo planar toplógico é sempre conexo. Logo o dual do bouquet de n lacetes G é um grafo conexo de ordem $n + 1$ com n arestas. Mas dentro da classe dos grafos conexos de ordem $n + 1$ só as árvores têm o número mínimo de n arestas. Logo o dual de G é uma árvore.

Alternativamente, para justificar que G é uma árvore, basta-nos verificar que o dual de G não tem ciclos. Como G tem um vértice então o seu dual tem apenas uma face. Se o dual de G tivesse ciclos, teria ciclos elementares que corresponderiam a curvas simples fechadas. Pelo Teorema da curva de Jordan estas curvas dividiriam o plano em duas regiões conexas o que implicaria a existência de mais de uma face. Logo, por redução ao absurdo, o dual de G não pode ter ciclos.

(1v.) **2.** Seja G uma árvore de ordem $n + 1$. Provemos, por indução na ordem n, que G tem número cromático 2.

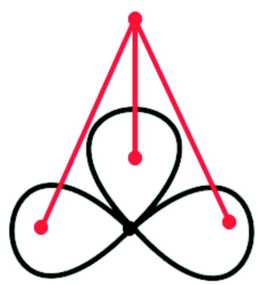
Se $n = 1$ é óbvio que G tem número cromático 2.

Suponhamos, por hipótese de indução, que toda a árvore de ordem n tem número cromático 2. Dada uma árvore G de ordem $n + 1$, o grafo G tem pelo menos um vértice de grau 1. Se todos os vértices de G tivessem grau ≥ 2 seria fácil de mostrar que G admitiria ciclos. Seja p um vértice de G com grau 1 e consideremos o subgrafo G' de G obtido por remoção do vértice p.



Então G' é uma árvore de ordem n e, por hipótese de indução, tem número cromático 2. Consideremos uma coloração dos vértices de G' nas cores A e B. Como p é adjacente a um único vértice p' de G', podemos colorir p numa cor diferente da de p', extendendo assim a coloração de G' a uma coloração bi-color de G. Isto mostra que G também tem número cromático 2.

3. Exemplos de *bouquets de* 3 *lacetes*, cujos duais não são isomorfos. (1v.)



4. Suponhamos que existe um grafo simples de ordem 6 com 3 vértices de grau 4, 2 vértices de grau 1, e 1 vértice de grau 2. (1v.)

Então a soma dos graus de G é $2\,a = 3 \times 4 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 16$, e portanto G tem $a = 8$ arestas.

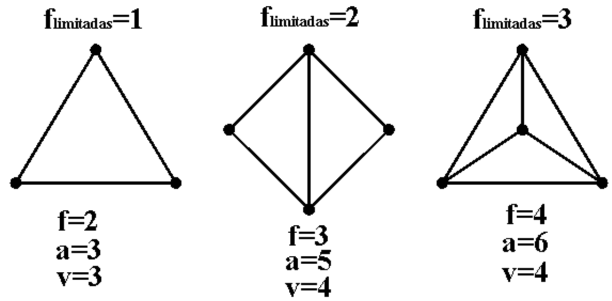
Seja H o subgrafo de G gerado pelos 4 vértices de grau ≥ 2. Há apenas duas arestas de G fora do subgrafo H, as únicas arestas incidentes com os vértices de grau 1. Logo H tem 6 arestas. Como H é simples, H terá de ser o grafo completo K_4. Resulta daqui que todos os quatro vértices de H têm grau 3 relativamente a H, e, portanto, grau ≥ 3 relativamente a G, o que contradiz a hipótese de haver um vértice de grau 2.

Deste absurdo podemos concluir que não existe nehum grafo nas condições acima.

III

1. Seja C uma componente conexa de G. Então C é um grafo planar toplógico simples e conexo. Se C tiver apenas uma ou duas faces limitadas (triângulares) (1v.)

então algum vértice de C teria grau ≤ 2, o que contradiz a hipótese. Logo C tem pelo menos 3 faces limitadas.



Se G tivesse 3 ou mais componentes conexas então G teria pelo menos $9 = 3 \times 3$ faces limitadas. Este facto contradiz a hipótese de G ter 9 faces, uma ilimitada e apenas 8 limitadas. Deste absurdo concluímos que G não tem mais de duas componentes conexas.

(1v.) **2.** O grafo G tem 8 faces limitadas (triângulares) e uma face ilimitada de grau 6. Logo $2\,a = 8 \times 3 + 6 = 30$, ou seja G tem $a = 15$ arestas.

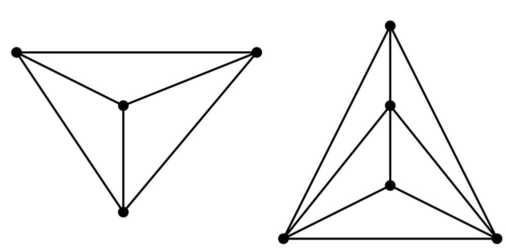
(1v.) **3.** Pela fórmula de Euler generalizada temos

$$9 - 15 + v = f - a + v = c + 1\ ,$$

onde c é o número de componentes conexas de G. Logo $v = c + 7$, e como pela alínea **1.** $1 \leq c \leq 2$,

$$8 = 1 + 7 \leq v = c + 7 \leq 2 + 7 = 9\ .$$

(1v.) **4.** Exemplo de um grafo planar topológico nas condições acima, de ordem 9.



IV

1. O número de caminhos de comprimento 7, que começam em $(0,0,0)$, é igual ao número de palavras de 7 letras no alfabeto $\{X,Y,Z\}$, que por sua vez é igual a $3^7 = 2187$.

2. As extremidades finais dos caminhos de comprimento 7, que começam em $(0,0,0)$, são os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ com $x+y+z=7$. O número destes pontos é igual ao número de distribuições de 7 objectos iguais por três caixas:

$$D_3^7 = {}^{\mathrm{rep}}C_7^3 = C_7^9 = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9\times 8}{2} = 36\,.$$

3. Sejam $X_n = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{N}^2 \,:\, x+y+z=n\,\}$ e

$$B_n = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \,:\, x+y+z=n \quad \text{e} \quad x,\ y,\ \text{ou}\ \ z \geq n-1\,\Big\}$$

o complementar de A_n em X_n. Então

$$\begin{aligned} |A_n| &= |X_n| - |B_n| = D_3^n - 3\,D_3^1 = \\ &= {}^{\mathrm{rep}}C_n^3 - 3\times 3 = C_n^{3+n-1} - 9 = C_n^{n+2} - 9 = \\ &= C_2^{n+2} - 9 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 9\,. \end{aligned}$$

Para $n=4$ temos

$$A_4 = \{(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}\ .$$

4. O número total de caminhos de $(0,0,0)$ para $(2,2,2)$ é

$$N = \frac{(2+2+2)!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6!}{8} = 6\times 5\times 3 = 90\,.$$

Os números de caminhos de $(0,0,0)$ para $(2,2,2)$ passando por cada um dos seis pontos de A_4 são:

passando por	nº de caminhos
$(2,2,0)$	$\frac{4!}{2!\,2!\,0!}\ \frac{2!}{0!\,0!\,2!} = 6$
$(2,0,2)$	$\frac{4!}{2!\,0!\,2!}\ \frac{2!}{0!\,2!\,0!} = 6$
$(0,2,2)$	$\frac{4!}{0!\,2!\,2!}\ \frac{2!}{2!\,0!\,0!} = 6$
$(2,1,1)$	$\frac{4!}{2!\,1!\,1!}\ \frac{2!}{0!\,1!\,1!} = 24$
$(1,2,1)$	$\frac{4!}{1!\,2!\,1!}\ \frac{2!}{1!\,0!\,1!} = 24$
$(1,1,2)$	$\frac{4!}{1!\,1!\,2!}\ \frac{2!}{1!\,1!\,0!} = 24$

O número total destes caminhos é igual a $3 \times 6 + 3 \times 24 = 90$. Logo a sua proporção no conjunto referido é $90/90 = 1$.

Alternativamente, qualquer caminho de $(0,0,0)$ para $(2,2,2)$ passa por um ponto $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ com $x+y+z=4$. Como o caminho termina em $(2,2,2)$ as três coordenadas de (x,y,z) são menores ou iguais a 2. Logo todo o caminho de $(0,0,0)$ para $(2,2,2)$ passa por um ponto $(x,y,z) \in A_4$. Assim a proporção pedida é igual a 1.