Tópicos de Matemática Finita **Data: 20-06-2003**

1ªÉpoca **Código: 1A**

Nome:

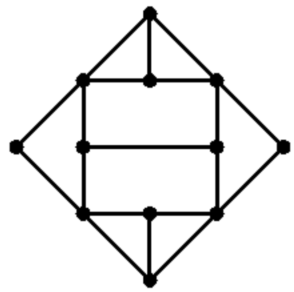
Número: **Curso:**

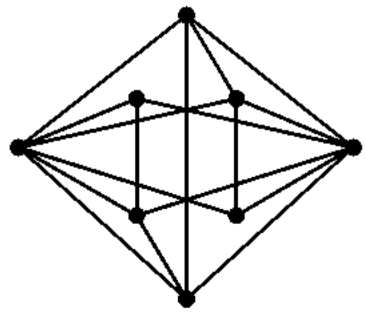
- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

I

(1v.) **1.** Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.

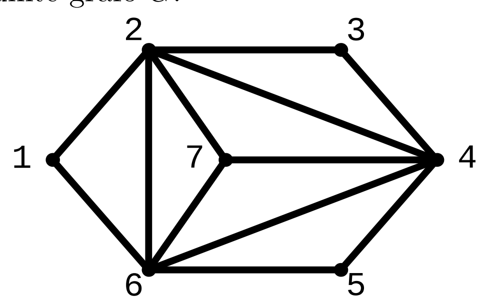




Assinale as afirmações correctas.

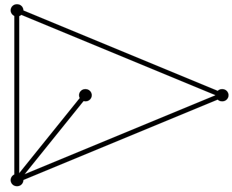
	Sim	Não
G_1 tem ciclos eulerianos.	○	○
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	○	○
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	○	○
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	○	○

(1v.) **2.** Considere o seguinte grafo G.

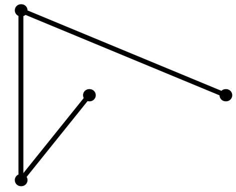


Assinale com uma cruz quais dos grafos de ordem 4 em baixo são isomorfos a subgrafos de G.

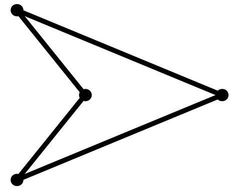
Sim ○ Não ○



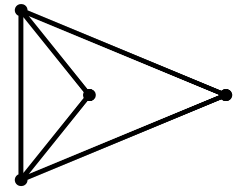
Sim ○ Não ○



Sim ○ Não ○



Sim ○ Não ○

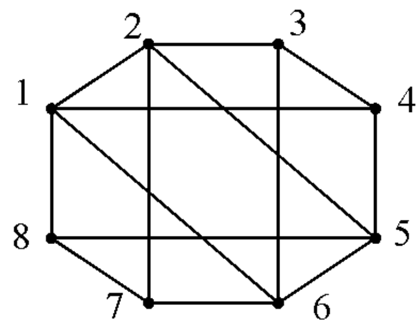


3. Escolha a resposta correcta. Um poliedro convexo com 8 arestas pode ter o seguinte número de faces: (1v.)

☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

---

4. Complete a demonstração de não planaridade do seguinte grafo G. (1v.)



Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar, isto é que G admite uma representação planar toplógica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1\}$ corresponde a uma curva simples fechada. Suponhamos que, nesta representação, a aresta $\{1,6\}$ é interior à curva γ. Partindo da hipótese contrária pode-se inferir um absurdo análogo.

(1) $\{1,6\}$ é interior a γ, por hipótese;
(2) $\{2,7\}$ é exterior a γ, por (1);
(3) é a γ, por ;
(4) é a γ, por ;
(5) é a γ, por ;
(6) é a γ, por ;
(7) é a γ, por .

As conclusões, e contradizem-se. Logo G não é planar.

---

5. Um grafo planar topológico conexo G tem $v = 8$ vértices e $a = 15$ arestas. Todas as faces de G têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de faces de grau 3 e y o número de faces de grau 4. Então (1v.)

☐ $x = 3$ e $y = 6$ ☐ $x = 4$ e $y = 5$
☐ $x = 6$ e $y = 3$ ☐ $x = 5$ e $y = 4$

---

6. Seja G um grafo de ordem 13 e $\mathcal{C} = \{V_1, \cdots, V_k\}$ uma coloração de vértices de G num número mínimo de k (= ao número cromático) cores. Suponhamos que todo o subgrafo de G com ordem 4 tem pelo menos uma aresta. (1v.)
O maior número de vértices de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é ____ .
O número cromático de G é pelo menos maior ou igual a ____ .

(1v.) **7.** Há 15 distribuições de um conjunto de n bolas iguais por três sacos, que deixam pelo menos uma bola em cada saco. Determine o valor de n.

☐ $n = 5$ ☐ $n = 6$ ☐ $n = 7$ ☐ $n = 8$

(1v.) **8.** Quantos amigos têm em conjunto três irmãos: o António, o Beto e o Carlos, sem contar com os próprios, sabendo que:

a) o António tem 5 amigos,
b) o Beto tem 4 amigos,
c) o Carlos tem 4 amigos,
d) o António e o Beto têm 2 amigos em comum,
e) o António e o Carlos têm 1 amigo em comum,
f) o Beto e o Carlos têm 2 amigos comuns,
g) o António, o Beto e o Carlos não têm amigos comuns (aos três).

N^o amigos dos três irmãos $=$

II

Seja G um grafo planar toplógico com 1 vértice e n arestas, a que chamaremos um *bouquet de n lacetes*.

(1v.) **1.** Prove que G tem $n + 1$ faces, e use este facto para mostrar que o dual de G é uma árvore (i.e. um grafo conexo sem ciclos).

(1v.) **2.** Qual o número cromático do dual de G?

(1v.) **3.** Dê exemplos de dois *bouquets de* 3 *lacetes*, cujos duais não sejam isomorfos, como grafos.

(1v.) **4.** Prove que não existe nenhum grafo simples de ordem 6 com 3 vértices de grau 4, 2 vértices de grau 1, e 1 vértice de grau 2.

III

Seja G um grafo planar topológico simples, não necessariamente conexo, com $f = 9$ faces, tendo a face ilimitada grau 6 e todas as restantes grau 3. Suponhamos ainda que todos os vértices de G têm grau ≥ 3.

(1v.) **1.** Mostre que cada componente conexa de G tem pelo menos 3 faces limitadas, e que G não pode ter mais de duas componentes conexas.

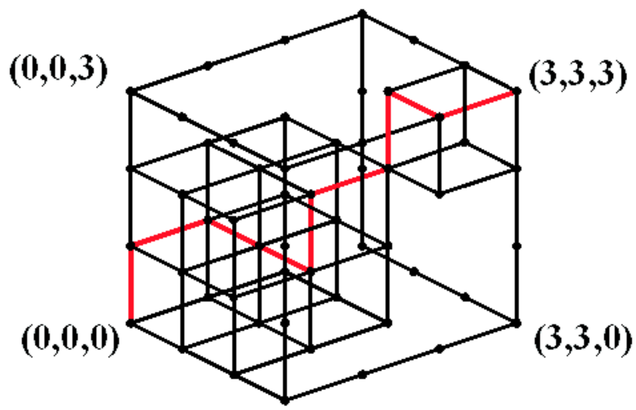
(1v.) **2.** Calcule o número de arestas do grafo G.

(1v.) **3.** Relacione o número de vértices com o número de componentes conexas e mostre que G tem 8 ou 9 vértices.

4. Dê um exemplo de um grafo planar topológico nas condições acima, de ordem 9. (1v.)

IV

Uma sequência de pontos $\{(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{N}^3 \, : \, 0 \leq i \leq n \}$ diz-se um *caminho no reticulado* $\mathbb{N}^3$ *sse* para cada $i = 1, \cdots, n$, a diferença $(x_i, y_i, z_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ coincidir com um dos três vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$. O inteiro n diz-se o *comprimento* do caminho. Os pontos (x_0, y_0, z_0) e (x_n, y_n, z_n) dizem-se, respectivamente, as *extremidades inicial e final* do caminho.



1. Quantos caminhos de comprimento 7 existem em $\mathbb{N}^3$ a começar em $(0,0,0)$? (1v.)

2. Quantos elementos tem o conjunto das extremidades finais dos caminhos na alínea anterior? (1v.)

3. Encontre uma fórmula que dê para cada inteiro $n \geq 3$ o número de elementos do conjunto (1v.)

$$A_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \, : \, x + y + z = n \quad \text{e} \quad \max\{x, y, z\} \leq n - 2 \right\} .$$

Enumere os seis elementos de A_4.

4. Calcule a proporção de caminhos que passam por um ponto de A_4 no conjunto de todos os caminhos que começam em $(0,0,0)$ e terminam em $(2,2,2)$. (1v.)