

Nome:

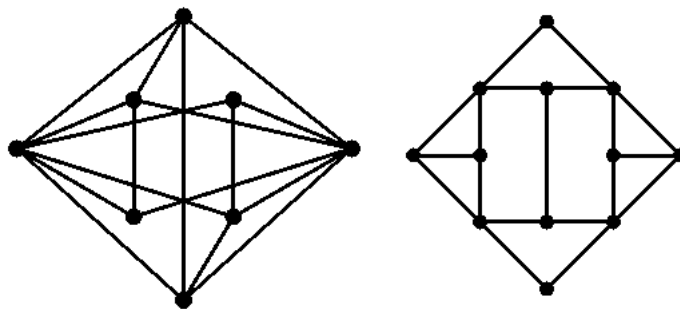
Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

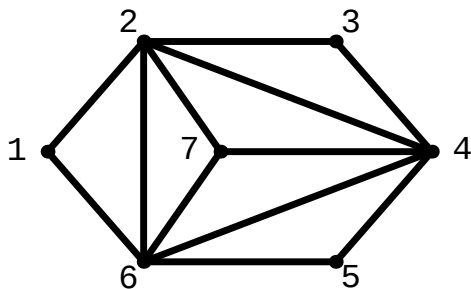
- (1v.) 1. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

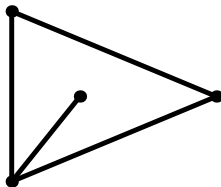
	Sim	Não
G_1 tem cadeias abertas eulerianas.	☒	☐
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	☒	☐
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	☐	☒
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	☐	☒

- (1v.) 2. Considere o seguinte grafo G .

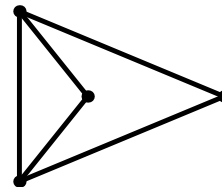


Assinale com uma cruz quais dos grafos de ordem 4 em baixo são isomorfos a subgrafos de G .

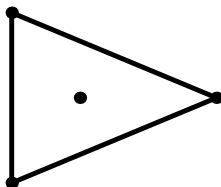
Sim Não
☒ ☐



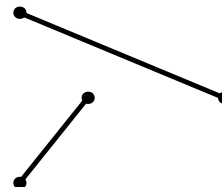
Sim Não
☒ ☐



Sim Não
☐ ☒



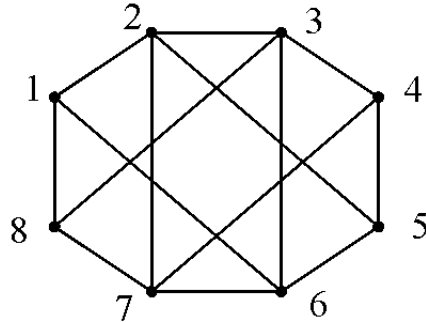
Sim Não
☐ ☒



3. Escolha a resposta correcta. Um poliedro convexo com 13 arestas pode ter o seguinte número de faces: (1v.)

☐ 3 ☐ 6 ☒ 8 ☐ 10

4. Complete a demonstração de não planaridade do seguinte grafo G . (1v.)



Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar, isto é que G admite uma representação planar topológica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1\}$ corresponde a uma curva simples fechada. Suponhamos que, nesta representação, a aresta $\{2, 7\}$ é interior à curva γ . Partindo da hipótese contrária pode-se inferir um absurdo análogo.

- (1) $\{2, 7\}$ é interior a γ , por hipótese;
- (2) $\{1, 6\}$ é exterior a γ , por (1);
- (3) $\{3, 8\}$ é interior a γ , por (2);
- (4) $\{3, 8\}$ é exterior a γ , por (1);
- (5) é a γ , por ;
- (6) é a γ , por ;
- (7) é a γ , por .

As conclusões, (3) e (4) contradizem-se. Logo G não é planar.

5. Um grafo planar topológico conexo G tem $f = 8$ faces e $a = 15$ arestas. Todos os vértices de G têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de vértices de grau 3 e y o número de vértices de grau 4. Então (1v.)

☒ $x = 6$ e $y = 3$ ☐ $x = 4$ e $y = 5$
☐ $x = 3$ e $y = 6$ ☐ $x = 5$ e $y = 4$

6. Seja G um grafo de ordem 13 e $\mathcal{C} = \{V_1, \dots, V_k\}$ uma coloração de vértices de G num número mínimo de k (= ao número cromático) cores. Suponhamos que todo o subgrafo de G com ordem 5 tem pelo menos uma aresta. O maior número de vértices de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é 4. O número cromático de G é pelo menos maior ou igual a 4. (1v.)

- (1v.) 7. Há 6 distribuições de um conjunto de n bolas iguais por três sacos, que deixam pelo menos duas bolas em cada saco. Determine o valor de n .

$$\boxed{\bigcirc} \quad n = 6 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad n = 7 \qquad \boxed{\bullet} \quad n = 8 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad n = 9$$

- (1v.) 8. Quantos amigos têm em conjunto três irmãos: o António, o Beto e o Carlos, sem contar com os próprios, sabendo que:
- a) o António tem 4 amigos,
 - b) o Beto tem 4 amigos,
 - c) o Carlos tem 4 amigos,
 - d) o António e o Beto têm 2 amigos em comum,
 - e) o António e o Carlos têm 2 amigos em comum,
 - f) o Beto e o Carlos têm 2 amigos comuns,
 - g) o António, o Beto e o Carlos têm 1 amigo comum (aos três).

$$\text{N}^\circ \text{ amigos dos três irmãos} = 7$$

II

- (1v.) 1. Seja G um *bouquet de n lacetes*. Como G é um grafo conexo, designando por f o número de faces de G , pela fórmula de Euler temos $f - n + 1 = 2$. Logo $f = n + 1$.

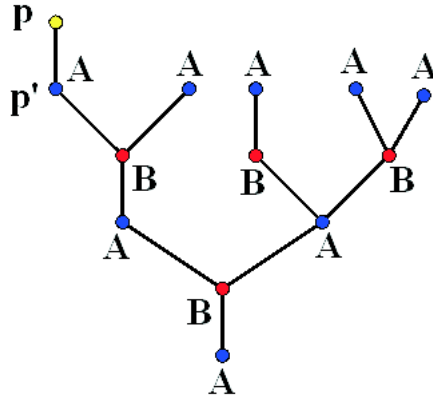
O dual de qualquer grafo planar topológico é sempre conexo. Logo o dual do bouquet de n lacetes G é um grafo conexo de ordem $n + 1$ com n arestas. Mas dentro da classe dos grafos conexos de ordem $n + 1$ só as árvores têm o número mínimo de n arestas. Logo o dual de G é uma árvore.

Alternativamente, para justificar que G é uma árvore, basta-nos verificar que o dual de G não tem ciclos. Como G tem um vértice então o seu dual tem apenas uma face. Se o dual de G tivesse ciclos, teria ciclos elementares que corresponderiam a curvas simples fechadas. Pelo Teorema da curva de Jordan estas curvas dividiriam o plano em duas regiões conexas o que implicaria a existência de mais de uma face. Logo, por redução ao absurdo, o dual de G não pode ter ciclos.

- (1v.) 2. Seja G uma árvore de ordem $n + 1$. Provemos, por indução na ordem n , que G tem número cromático 2.

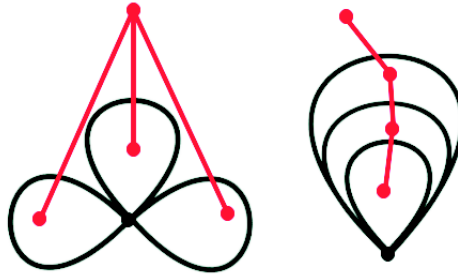
Se $n = 1$ é óbvio que G tem número cromático 2.

Suponhamos, por hipótese de indução, que toda a árvore de ordem n tem número cromático 2. Dada uma árvore G de ordem $n + 1$, o grafo G tem pelo menos um vértice de grau 1. Se todos os vértices de G tivessem grau ≥ 2 seria fácil de mostrar que G admitiria ciclos. Seja p um vértice de G com grau 1 e consideremos o subgrafo G' de G obtido por remoção do vértice p .



Então G' é uma árvore de ordem n e, por hipótese de indução, tem número cromático 2. Consideremos uma coloração dos vértices de G' nas cores A e B . Como p é adjacente a um único vértice p' de G' , podemos colorir p numa cor diferente da de p' , estendendo assim a coloração de G' a uma coloração bi-color de G . Isto mostra que G também tem número cromático 2.

3. Exemplos de *bouquets de 3 lacetes*, cujos duais não são isomorfos. (1v.)



4. Suponhamos que existe um grafo simples de ordem 6 com 3 vértices de grau 4, 2 vértices de grau 1, e 1 vértice de grau 2. (1v.)

Então a soma dos graus de G é $2a = 3 \times 4 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 16$, e portanto G tem $a = 8$ arestas.

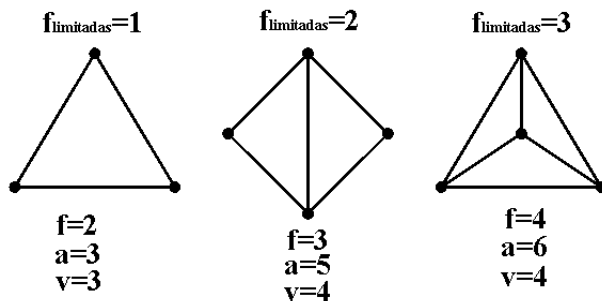
Seja H o subgrafo de G gerado pelos 4 vértices de grau ≥ 2 . Há apenas duas arestas de G fora do subgrafo H , as únicas arestas incidentes com os vértices de grau 1. Logo H tem 6 arestas. Como H é simples, H terá de ser o grafo completo K_4 . Resulta daqui que todos os quatro vértices de H têm grau 3 relativamente a H , e, portanto, grau ≥ 3 relativamente a G , o que contradiz a hipótese de haver um vértice de grau 2.

Deste absurdo podemos concluir que não existe nenhum grafo nas condições acima.

III

1. Seja C uma componente conexa de G . Então C é um grafo planar toplógico simples e conexo. Se C tiver apenas uma ou duas faces limitadas (triangulares) (1v.)

então algum vértice de C teria grau ≤ 2 , o que contradiz a hipótese. Logo C tem pelo menos 3 faces limitadas.



Se G tivesse 3 ou mais componentes conexas então G teria pelo menos $9 = 3 \times 3$ faces limitadas. Este facto contradiz a hipótese de G ter 9 faces, uma ilimitada e apenas 8 limitadas. Deste absurdo concluímos que G não tem mais de duas componentes conexas.

- (1v.) **2.** O grafo G tem 8 faces limitadas (triangulares) e uma face ilimitada de grau 8. Logo $2a = 8 \times 3 + 8 = 32$, ou seja G tem $a = 16$ arestas.

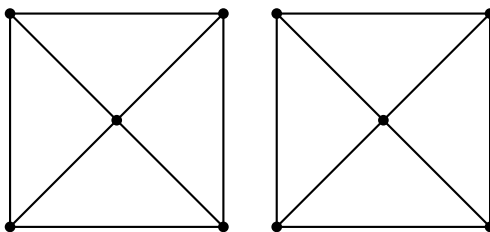
- (1v.) **3.** Pela fórmula de Euler generalizada temos

$$9 - 16 + v = f - a + v = c + 1 ,$$

onde c é o número de componentes conexas de G . Logo $v = c + 8$, e como pela alínea **1.** $1 \leq c \leq 2$,

$$9 = 1 + 8 \leq v = c + 7 \leq 2 + 8 = 10 .$$

- (1v.) **4.** Exemplo de um grafo planar topológico nas condições acima, de ordem 10.



1. O número de caminhos de comprimento 7, que começam em $(0, 0, 0)$, é igual ao número de palavras de 7 letras no alfabeto $\{X, Y, Z\}$, que por sua vez é igual a $3^7 = 2187$.

2. As extremidades finais dos caminhos de comprimento 7, que começam em $(0, 0, 0)$, são os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ com $x + y + z = 7$. O número destes pontos é igual ao número de distribuições de 7 objectos iguais por três caixas:

$$D_3^7 = {}^{\text{rep}}C_7^3 = C_7^9 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36.$$

3. Sejam $X_n = \{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + y + z = n \}$ e

$$B_n = \{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + y + z = n \quad \text{e} \quad x, y, \text{ ou } z \geq n - 1 \}$$

o complementar de A_n em X_n . Então

$$\begin{aligned} |A_n| &= |X_n| - |B_n| = D_3^n - 3 D_3^1 = \\ &= {}^{\text{rep}}C_n^3 - 3 \times 3 = C_n^{3+n-1} - 9 = C_n^{n+2} - 9 = \\ &= C_2^{n+2} - 9 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 9. \end{aligned}$$

Para $n = 4$ temos

$$A_4 = \{(2, 2, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}.$$

4. O número total de caminhos de $(0, 0, 0)$ para $(2, 2, 2)$ é

$$N = \frac{(2+2+2)!}{2!2!2!} = \frac{6!}{8} = 6 \times 5 \times 3 = 90.$$

Os números de caminhos de $(0, 0, 0)$ para $(2, 2, 2)$ passando por cada um dos seis pontos de A_4 são:

passando por	n° de caminhos
$(2, 2, 0)$	$\frac{4!}{2! 2! 0!} \frac{2!}{0! 0! 2!} = 6$
$(2, 0, 2)$	$\frac{4!}{2! 0! 2!} \frac{2!}{0! 2! 0!} = 6$
$(0, 2, 2)$	$\frac{4!}{0! 2! 2!} \frac{2!}{2! 0! 0!} = 6$
$(2, 1, 1)$	$\frac{4!}{2! 1! 1!} \frac{2!}{0! 1! 1!} = 24$
$(1, 2, 1)$	$\frac{4!}{1! 2! 1!} \frac{2!}{1! 0! 1!} = 24$
$(1, 1, 2)$	$\frac{4!}{1! 1! 2!} \frac{2!}{1! 1! 0!} = 24$

O número total destes caminhos é igual a $3 \times 6 + 3 \times 24 = 90$. Logo a sua proporção no conjunto referido é $90/90 = 1$.

Alternativamente, qualquer caminho de $(0, 0, 0)$ para $(2, 2, 2)$ passa por um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ com $x + y + z = 4$. Como o caminho termina em $(2, 2, 2)$ as três coordenadas de (x, y, z) são menores ou iguais a 2. Logo todo o caminho de $(0, 0, 0)$ para $(2, 2, 2)$ passa por um ponto $(x, y, z) \in A_4$. Assim a proporção pedida é igual a 1.