

Nome:

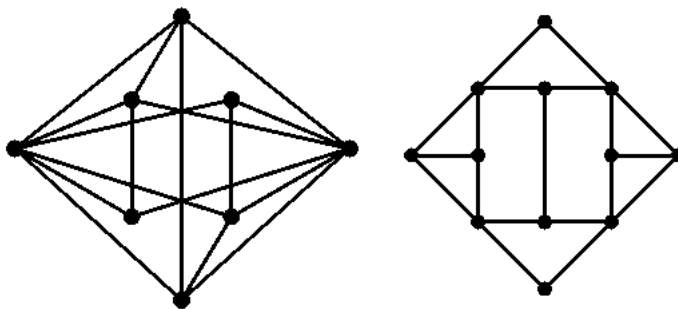
Número:

Curso:

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
 - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
 - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
 - A ausência de resposta não será pontuada.
 - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
 - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
-

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

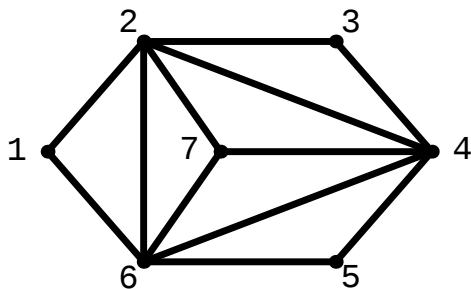
- (1v.) 1. Considere os grafos G_1 e G_2 em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

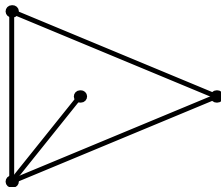
	Sim	Não
G_1 tem cadeias abertas eulerianas.	☐	☐
G_1 tem ciclos hamiltonianos.	☐	☐
G_2 tem ciclos hamiltonianos.	☐	☐
G_2 tem cadeias abertas eulerianas.	☐	☐

- (1v.) 2. Considere o seguinte grafo G .

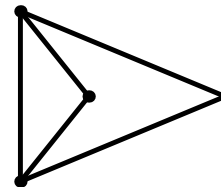


Assinale com uma cruz quais dos grafos de ordem 4 em baixo são isomorfos a subgrafos de G .

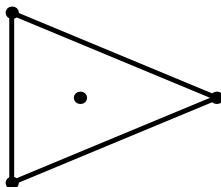
Sim Não
☐ ☐



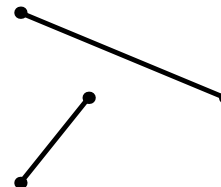
Sim Não
☐ ☐



Sim Não
☐ ☐



Sim Não
☐ ☐



3. Escolha a resposta correcta. Um poliedro convexo com 13 arestas pode ter o seguinte número de faces: (1v.)



3



6

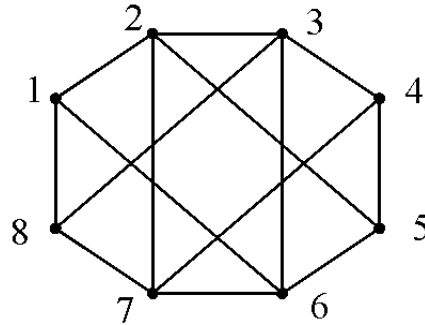


8



10

4. Complete a demonstração de não planaridade do seguinte grafo G . (1v.)



Suponhamos por absurdo que o grafo G é planar, isto é que G admite uma representação planar topológica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1\}$ corresponde a uma curva simples fechada. Suponhamos que, nesta representação, a aresta $\{2, 7\}$ é interior à curva γ . Partindo da hipótese contrária pode-se inferir um absurdo análogo.

- (1) $\{2, 7\}$ é interior a γ , por hipótese;
- (2) $\{1, 6\}$ é exterior a γ , por (1);
- (3) é a γ , por ;
- (4) é a γ , por ;
- (5) é a γ , por ;
- (6) é a γ , por ;
- (7) é a γ , por .

As conclusões, e contradizem-se. Logo G não é planar.

5. Um grafo planar topológico conexo G tem $f = 8$ faces e $a = 15$ arestas. Todos os vértices de G têm grau 3 ou 4. Sejam x o número de vértices de grau 3 e y o número de vértices de grau 4. Então (1v.)

 $x = 6$ e $y = 3$  $x = 4$ e $y = 5$  $x = 3$ e $y = 6$  $x = 5$ e $y = 4$

6. Seja G um grafo de ordem 13 e $\mathcal{C} = \{V_1, \dots, V_k\}$ uma coloração de vértices de G num número mínimo de k ($=$ ao número cromático) cores. Suponhamos que todo o subgrafo de G com ordem 5 tem pelo menos uma aresta. O maior número de vértices de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é _____. O número cromático de G é pelo menos maior ou igual a _____. (1v.)

- (1v.) 7. Há 6 distribuições de um conjunto de n bolas iguais por três sacos, que deixam pelo menos duas bolas em cada saco. Determine o valor de n .

$$\boxed{\bigcirc} \quad n = 6 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad n = 7 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad n = 8 \qquad \boxed{\bigcirc} \quad n = 9$$

- (1v.) 8. Quantos amigos têm em conjunto três irmãos: o António, o Beto e o Carlos, sem contar com os próprios, sabendo que:
- a) o António tem 4 amigos,
 - b) o Beto tem 4 amigos,
 - c) o Carlos tem 4 amigos,
 - d) o António e o Beto têm 2 amigos em comum,
 - e) o António e o Carlos têm 2 amigos em comum,
 - f) o Beto e o Carlos têm 2 amigos comuns,
 - g) o António, o Beto e o Carlos têm 1 amigo comum (aos três).

Nº amigos dos três irmãos =

II

Seja G um grafo planar topológico com 1 vértice e n arestas, a que chamaremos um *bouquet de n lacetes*.

- (1v.) 1. Prove que G tem $n + 1$ faces, e use este facto para mostrar que o dual de G é uma árvore (i.e. um grafo conexo sem ciclos).
- (1v.) 2. Qual o número cromático do dual de G ?
- (1v.) 3. Dê exemplos de dois *bouquets de 3 lacetes*, cujos duais não sejam isomorfos, como grafos.
- (1v.) 4. Prove que não existe nenhum grafo simples de ordem 6 com 3 vértices de grau 4, 2 vértices de grau 1, e 1 vértice de grau 2.

III

Seja G um grafo planar topológico simples, não necessariamente conexo, com $f = 9$ faces, tendo a face ilimitada grau 8 e todas as restantes grau 3. Suponhamos ainda que todos os vértices de G têm grau ≥ 3 .

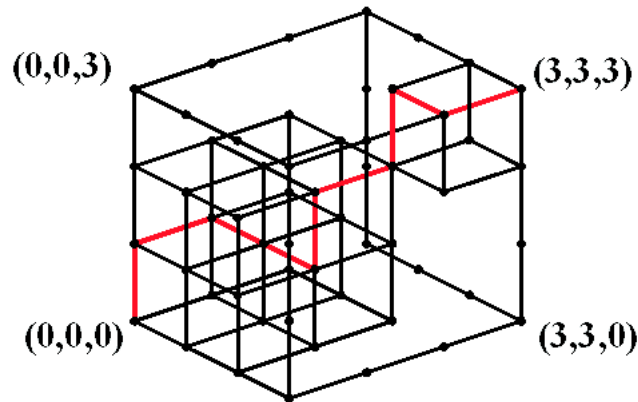
- (1v.) 1. Mostre que cada componente conexa de G tem pelo menos 3 faces limitadas, e que G não pode ter mais de duas componentes conexas.
- (1v.) 2. Calcule o número de arestas do grafo G .
- (1v.) 3. Relacione o número de vértices com o número de componentes conexas e

mostre que G tem 9 ou 10 vértices.

4. Dê um exemplo de um grafo planar topológico nas condições acima, de ordem 10. (1v.)

IV

Uma sequência de pontos $\{(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{N}^3 : 0 \leq i \leq n\}$ diz-se um *caminho no reticulado* $\mathbb{N}^3$ se para cada $i = 1, \dots, n$, a diferença $(x_i, y_i, z_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ coincidir com um dos três vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$. O inteiro n diz-se o *comprimento* do caminho. Os pontos (x_0, y_0, z_0) e (x_n, y_n, z_n) dizem-se, respectivamente, as *extremidades inicial e final* do caminho.



1. Quantos caminhos de comprimento 7 existem em $\mathbb{N}^3$ a começar em $(0, 0, 0)$? (1v.)
2. Quantos elementos tem o conjunto das extremidades finais dos caminhos na alínea anterior? (1v.)

3. Encontre uma fórmula que dê para cada inteiro $n \geq 3$ o número de elementos do conjunto (1v.)

$$A_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + y + z = n \text{ e } \max\{x, y, z\} \leq n - 2\}.$$

Enumere os seis elementos de A_4 .

4. Calcule a proporção de caminhos que passam por um ponto de A_4 no conjunto de todos os caminhos que começam em $(0, 0, 0)$ e terminam em $(2, 2, 2)$. (1v.)