**Tópicos de Matemática Finita** **Data: 20-06-2003**

**1ªÉpoca** **Código: 1D**

**Nome:**

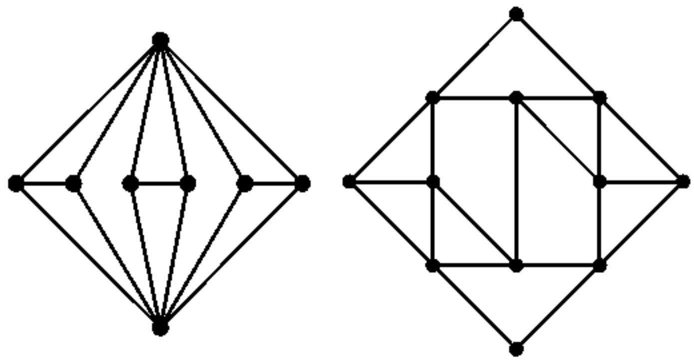
**Número:** **Curso:**

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

| Grupo | Nota |
|---|---|
| I | |
| II-1 | |
| II-2 | |
| II-3 | |
| II-4 | |
| III-1 | |
| III-2 | |
| III-3 | |
| III-4 | |
| IV-1 | |
| IV-2 | |
| IV-3 | |
| IV-4 | |
| Nota Final | |

# I

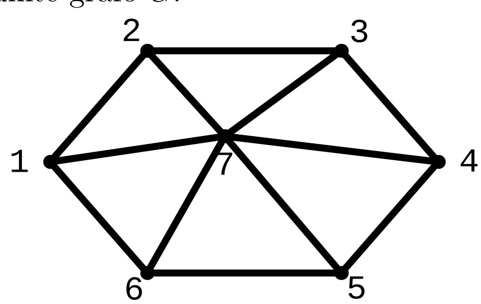
(1v.) **1.** Considere os grafos $G_1$ e $G_2$ em baixo, respectivamente à esquerda e à direita.



Assinale as afirmações correctas.

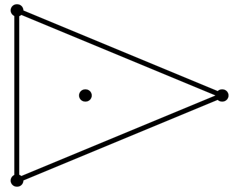
| | Sim | Não |
|---|---|---|
| $G_1$ tem ciclos hamiltonianos. | ○ | ○ |
| $G_1$ tem ciclos eulerianos. | ○ | ○ |
| $G_2$ tem cadeias abertas eulerianas. | ○ | ○ |
| $G_2$ tem ciclos hamiltonianos. | ○ | ○ |

(1v.) **2.** Considere o seguinte grafo $G$.

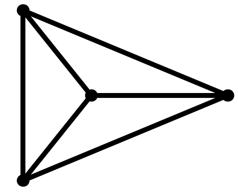



Assinale com uma cruz quais dos grafos de ordem 4 em baixo são isomorfos a subgrafos de $G$.

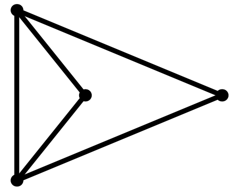
Sim ○ Não ○



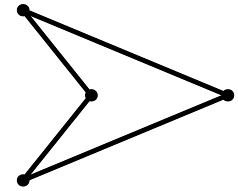
Sim ○ Não ○



Sim ○ Não ○



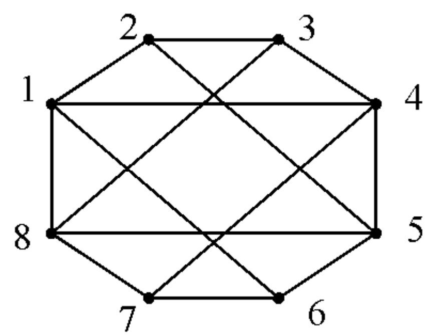
Sim ○ Não ○



**3.** Escolha a resposta correcta. Um poliedro convexo com 10 arestas pode ter o seguinte número de faces: (1v.)

○ 3 ○ 4 ○ 6 ○ 8

**4.** Complete a demonstração de não planaridade do seguinte grafo $G$. (1v.)




Suponhamos por absurdo que o grafo $G$ é planar, isto é que $G$ admite uma representação planar toplógica. Numa tal representação o ciclo hamiltoniano $\gamma = \{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1\}$ corresponde a uma curva simples fechada. Suponhamos que, nesta representação, a aresta $\{1, 4\}$ é interior à curva $\gamma$. Partindo da hipótese contrária pode-se inferir um absurdo análogo.

**(1)** $\{1, 4\}$ é interior a $\gamma$, por hipótese;
**(2)** $\{2, 5\}$ é exterior a $\gamma$, por (1);
**(3)** é a $\gamma$, por ;
**(4)** é a $\gamma$, por ;
**(5)** é a $\gamma$, por ;
**(6)** é a $\gamma$, por ;
**(7)** é a $\gamma$, por .

As conclusões, e contradizem-se. Logo $G$ não é planar.

**5.** Um grafo planar topológico conexo $G$ tem $f = 6$ faces e $a = 11$ arestas. Todos os vértices de $G$ têm grau 3 ou 4. Sejam $x$ o número de vértices de grau 3 e $y$ o número de vértices de grau 4. Então (1v.)

○ $x = 1$ e $y = 6$ ○ $x = 4$ e $y = 3$
○ $x = 6$ e $y = 1$ ○ $x = 3$ e $y = 4$

**6.** Seja $G$ um grafo de ordem 16 e $\mathcal{C} = \{V_1, \cdots, V_k\}$ uma coloração de vértices de $G$ num número mínimo de $k$ (= ao número cromático) cores. Suponhamos que todo o subgrafo de $G$ com ordem 4 tem pelo menos uma aresta. (1v.)
O maior número de vértices de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é ____ .
O número cromático de $G$ é pelo menos maior ou igual a ____ .

(1v.) **7.** Há 15 distribuições de um conjunto de $n$ bolas iguais por três sacos, que deixam pelo menos duas bolas em cada saco. Determine o valor de $n$.

☐ $n = 7$ ☐ $n = 8$ ☐ $n = 9$ ☐ $n = 10$

---

(1v.) **8.** Quantos amigos têm em conjunto três irmãos: o António, o Beto e o Carlos, sem contar com os próprios, sabendo que:

a) o António tem 5 amigos,
b) o Beto tem 5 amigos,
c) o Carlos tem 5 amigos,
d) o António e o Beto têm 3 amigos em comum,
e) o António e o Carlos têm 2 amigos em comum,
f) o Beto e o Carlos têm 2 amigos comuns,
g) o António, o Beto e o Carlos têm 1 amigo comum (aos três).

Nº amigos dos três irmãos =

---

## II

Seja $G$ um grafo planar toplógico com 1 vértice e $n$ arestas, a que chamaremos um *bouquet de $n$ lacetes*.

(1v.) **1.** Prove que $G$ tem $n + 1$ faces, e use este facto para mostrar que o dual de $G$ é uma árvore (i.e. um grafo conexo sem ciclos).

(1v.) **2.** Qual o número cromático do dual de $G$?

(1v.) **3.** Dê exemplos de dois *bouquets de* 3 *lacetes*, cujos duais não sejam isomorfos, como grafos.

(1v.) **4.** Prove que não existe nenhum grafo simples de ordem 5 com 2 vértices de grau 4, 1 vértice de grau 3, 1 vértice de grau 2, e 1 vértice de grau 1.

## III

Seja $G$ um grafo planar topológico simples, não necessariamente conexo, com $f = 11$ faces, tendo a face ilimitada grau 8 e todas as restantes grau 3. Suponhamos ainda que todos os vértices de $G$ têm grau $\geq 3$.

(1v.) **1.** Mostre que cada componente conexa de $G$ tem pelo menos 3 faces limitadas, e que $G$ não pode ter mais de três componentes conexas.

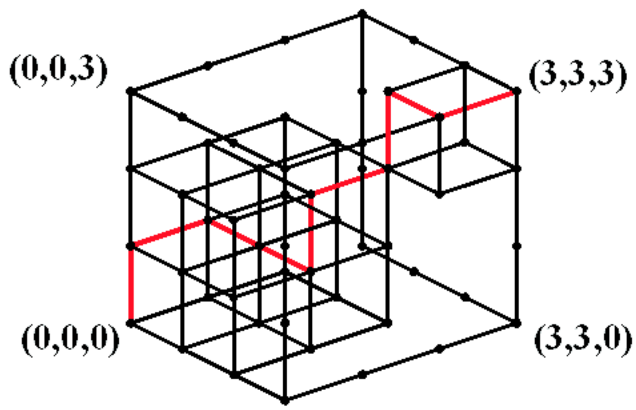
(1v.) **2.** Calcule o número de arestas do grafo $G$.

(1v.) **3.** Relacione o número de vértices com o número de componentes conexas e mostre que $G$ tem 10, 11 ou 12 vértices.

**4.** Dê um exemplo de um grafo planar topológico nas condições acima, de ordem 11. (1v.)

## IV

Uma sequência de pontos $\{(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{N}^3 \,:\, 0 \leq i \leq n\,\}$ diz-se um *caminho no reticulado* $\mathbb{N}^3$ *sse* para cada $i = 1, \cdots, n$, a diferença $(x_i, y_i, z_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ coincidir com um dos três vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$. O inteiro $n$ diz-se o *comprimento* do caminho. Os pontos $(x_0, y_0, z_0)$ e $(x_n, y_n, z_n)$ dizem-se, respectivamente, as *extremidades inicial e final* do caminho.




**1.** Quantos caminhos de comprimento 7 existem em $\mathbb{N}^3$ a começar em $(0, 0, 0)$? (1v.)

**2.** Quantos elementos tem o conjunto das extremidades finais dos caminhos na alínea anterior? (1v.)

**3.** Encontre uma fórmula que dê para cada inteiro $n \geq 3$ o número de elementos do conjunto (1v.)

$$A_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,:\, x + y + z = n \quad \text{e} \quad \max\{x, y, z\} \leq n - 2\,\right\}\,.$$

Enumere os seis elementos de $A_4$.

**4.** Calcule a proporção de caminhos que passam por um ponto de $A_4$ no conjunto de todos os caminhos que começam em $(0, 0, 0)$ e terminam em $(2, 2, 2)$. (1v.)