**Tópicos de Matemática Finita** **Data: 5-07-2003**

**2ªÉpoca** Correcção **Código: 2B**

---

**Nome:**

**Número:** **Curso:**

---

- **O exame que vai realizar tem a duração de três horas.**
- **As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificação. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.**
- **As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.**
- **A ausência de resposta não será pontuada.**
- **O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.**
- **Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.**

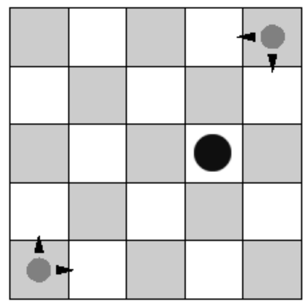
---

| Grupo | Nota |
|---|---|
| I | |
| II-1 | |
| II-2 | |
| II-3 | |
| II-4 | |
| III-1 | |
| III-2 | |
| III-3 | |
| III-4 | |
| IV-1 | |
| IV-2 | |
| IV-3 | |
| IV-4 | |
| Nota Final | |

**I**

---

(1v.) **1.** Num tabuleiro de xadrez $5 \times 5$ um peão pode apenas mover-se para uma das casas adjacentes (quatro no máximo).



De quantas maneiras é possivel levar o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 8 movimentos (jogadas) *sem passar* pela casa do meio assinalada na figura?

○ 30 ◉ 40 ○ 50 ○ 60

---

(1v.) **2.** Considere o conjunto $A$ de todas as listas de inteiros $(x_1, x_2, x_3)$ tais que

$$3 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 11 \ ,$$

e o conjunto $B$ de todas as soluções $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6$ com cada $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Então

○ $|A| < |B|$ ◉ $|A| = |B|$ ○ $|A| > |B|$

---

(1v.) **3.** Seja $G$ um grafo com 33 arestas e $\mathcal{C} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ uma coloração de arestas de $G$ num número mínimo de $k$ (= ao índice cromático) cores. Suponhamos que em qualquer conjunto de 6 arestas de $G$ há pelo menos um par de arestas com uma extremidade (vértice) em comum.

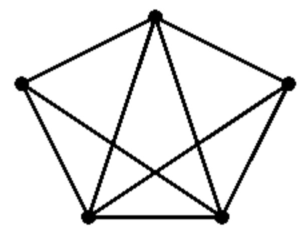
Em cada uma das afirmações seguintes escolha a melhor estimativa:
O maior número de arestas de cada cor que a coloração $\mathcal{C}$ pode ter é 5.
O índice cromático de $G$ é pelo menos maior ou igual a 7.

---

(1v.) **4.** Escolha a melhor estimativa. Seja $G$ um grafo simples conexo em que todos os vértices têm grau maior ou igual a 7. Supondo que $G$ não tem ciclos hamiltonianos então a ordem de $G$ é pelo menos maior ou igual a 15.

---

(1v.) **5.** Considere o seguinte grafo $G$.

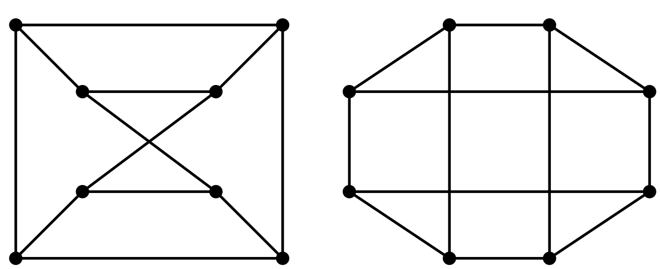


Seja $G_0, G_1, \cdots, G_5$ uma sequência de grafos parciais de $G$ tais que $G_0 = G$ e cada $G_i$ tem menos uma aresta que $G_{i-1}$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Sabendo que $G_5$ é conexo assinale a validade das afirmações seguintes:

| | Sim | Não |
|---|---|---|
| $G_4$ é conexo. | ⦿ | ○ |
| $G_4$ tem ciclos. | ⦿ | ○ |
| $G_5$ tem ciclos. | ○ | ⦿ |

---

**6.** Para responder a esta pergunta preencha apenas os campos numa das alternativas A), B) ou C). (1v.)

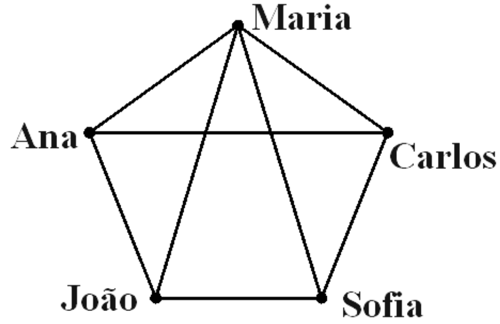


Os dois grafos na figura acima não são isomorfos porque:

A) Os dois grafos têm um número diferente de vértices de grau _____ . Enquanto o primeiro tem _____ , o segundo tem _____ .
B) Os subgrafos gerados pelos vértices de grau _____ não são isomorfos.
C) O primeiro grafo tem vários ciclos de comprimento 5 , enquanto o segundo tem 0.

---

**7.** Cinco amigos: a Ana, o Carlos, a Maria, o João e a Sofia estiveram ontem no ginásio. Considere o seguinte grafo tendo estes 5 amigos como vértices, onde dois *amigos* $X$ e $Y$ estão ligados por uma aresta *sse* se intersectarem os respectivos períodos de tempo em que $X$ e $Y$ estiveram ontem no ginásio. (1v.)




Diga se cada uma das afirmações seguintes é possível ou impossível.

A) Todos os cinco amigos estiveram no ginásio uma única vez, por um período de tempo variavel.
B) Todos os cinco amigos estiveram no ginásio uma única vez, exactamente durante uma hora.

| | Possível | Impossível |
|---|---|---|
| A) | ○ | ◉ |
| B) | ○ | ◉ |

---

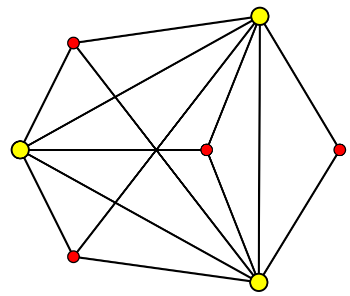
(1v.) **8.**
Seja $G$ um grafo simples conexo de ordem $n \geq 3$. Assinale as afirmações correctas.

| Sim | Não | |
|---|---|---|
| ○ | ◉ | A) Se $G$ tem exactamente dois vértices de grau ímpar então admite um ciclo euleriano. |
| ○ | ◉ | B) Se $G$ tem número cromático $\leq 4$ então $G$ é planar. |
| ◉ | ○ | C) Se $G$ é bipartido de ordem ímpar então não tem ciclos hamiltonianos. |
| ◉ | ○ | D) Se todos os seus vértices têm grau $\geq n/2$ então $G$ tem pelo menos um ciclo hamiltoniano. |

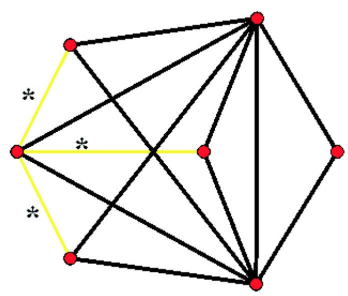
---

## II

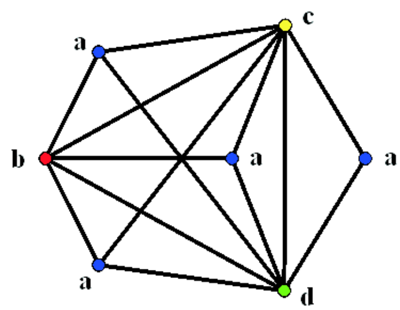
(1 v.) **1.** O grafo $G$ não tem ciclos hamiltonianos porque removendo os três vértices assinalados na figura seguinte obtemos um subgrafo com quatro (mais que três) componentes conexas.



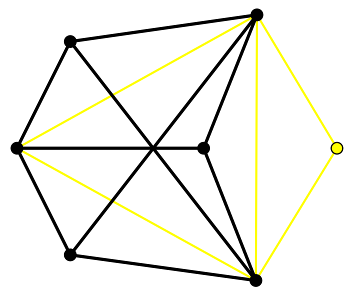
**2.** O maior comprimento que os ciclos de $G$ podem ter é 11. O grafo $G$ tem 14 arestas. Observemos que, dado um ciclo de comprimento $k$, o grafo parcial gerado pelas arestas nesse ciclo tem todos os seus vértices de grau par. O grafo $G$ tem quatro vértices de grau ímpar. É ímpossivel remover apenas uma ou duas arestas de modo o grafo parcial resultante tenha todos os seus vértices de grau par. Logo $G$ não admite ciclos de comprimento $\geq 12$. No entanto, removendo as três arestas assinaladas na figura seguinte obtemos um grafo parcial com todos os seus vértices de grau par. Pelo Teorema de Euler, este grafo parcial admite um ciclo euleriano, i.e. um ciclo de comprimento 11 em $G$. (1 v.)




**3.** O número cromático de $G$ é maior ou igual que 4 porque $G$ admite um subgrafo completo de ordem 4: o subgrafo gerado pelos vértices com gaus 6, 6, 5, e o vértice de grau 3 no meio. A 4-coloração seguinte mostra que o número cromático de $G$ é exactamente igual 4. (1 v.)

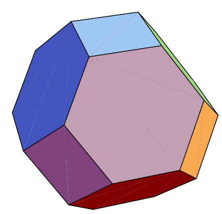



**4.** O grafo $G$ não é planar porque admite um subgrafo parcial isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{3,3}$, assinalado na figura seguinte: (1 v.)



## III

Sejam $x$ o número de faces quadradas e $y$ o número de faces hexagonais.



**1.** Por **1.** $f = x + y$. De **2.** e **3.** obtemos, respectivamente, $4\,x = v$ e $6\,y = 2\,v$, ou seja $x = v/4$ e $y = v/3$. Logo $f = \frac{7}{12}\,v$. Como a soma dos graus das faces é igual ao dobro das arestas, temos $2\,a = 4\,x + 6\,y = 3\,v$, ou seja $a = \frac{3}{2}\,v$. Pela fórmula de Euler, temos $2 = f - a + v = \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{2} + 1\right)\,v = \frac{1}{12}\,v$. Logo $v = 24$.

**2.** Substituindo nas relações acima obtemos agora $a = \frac{3}{2}\,v = 36$.

**3.** Também por substituição directa obtemos $x = 6$ e $y = 8$.

**4.** É claro que todos os vértices do poliedro $\mathcal{P}$ tem grau maior ou igual a 3. Temos

$$0 \leq \sum_{x \in V} (\deg(x) - 3) \; = 2\,a - 3\,v = 0\,.$$

Como são maiores ou iguais a zero, todas as parcelas na soma acima têm de ser nulas. Logo, qualquer que seja $x \in V$, $\deg(x) = 3$.

## IV

(1 v.) **1.** O número de *mãos* de quatro cartas retiradas destes baralhos é igual ao número de combinações com repetições das 4 cartas a 4 elementos:

$${}^{\mathrm{rep}}C_4^4 = C_4^7 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35\,.$$

(1 v.) **2.** O complementar deste conjunto, no da alínea anterior, é formado pelas *mãos* onde alguma das quatro cartas aparece repetida 3 ou mais vezes. É claro que há $4 \times {}^{\mathrm{rep}}C_1^4 = 4 \times 4 = 16$ *mãos* nestas condições. Logo, há $35 - 16 = 19$ *mãos* nas condições pedidas.

**3.** O número maneiras de ordenar estas seis cartas é igual ao número multinomial (1 v.)

$$\frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!} = \frac{6!}{4} = 180 \ .$$

**4.** Seja $A$, respectivamente $B$, o conjunto das maneiras de ordenar estas seis cartas de modo que haja dois "2", respectivamente dois "4", seguidos. Há 5 modos de selecionar duas posições seguidas numa sequência de 6 cartas. Uma vez colocados os dois "2", ou os dois "4", o número de maneiras de ordenar as restantes quatro cartas nas posições vagas é igual ao número multinomial $\frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$. Logo $|A| = |B| = 5 \times 12 = 60$. (1 v.)

Calculemos agora o cardinal da intersecção $A \cap B$, que consiste em todas as maneiras de ordenar estas seis cartas de modo que haja dois "2" e dois "4" seguidos. Há 6 modos diferentes de selecionar dois conjuntos de duas posições seguidas no conjunto das seis posições $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. São eles:

(1) $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$
(2) $\{1, 2\}$ e $\{4, 5\}$
(3) $\{1, 2\}$ e $\{5, 6\}$
(4) $\{2, 3\}$ e $\{4, 5\}$
(5) $\{2, 3\}$ e $\{5, 6\}$
(6) $\{3, 4\}$ e $\{5, 6\}$

Logo há $12 = 2 \times 6$ modos de dispôr dois "2" seguidos, e dois "4" seguidos, numa sequência de 6 cartas: os "2" primeiro e os "4" depois, ou vice-versa. Como sobram duas cartas temos $24 = 2 \times 12$ elementos em $A \cap B$. Pelo princípio de inclusão-exclusão, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 - 24 = 96$.

Resulta então que o cardinal pedido, das ordenações sem cartas iguais seguidas, é $180 - |A \cup B| = 180 - 96 = 84$.