

Nome:

Número:

Curso:

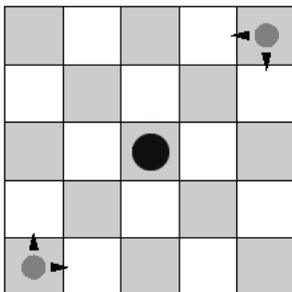
---

- O exame que vai realizar tem a duração de três horas.
  - As respostas às perguntas do grupo I não necessitam de justificção. Deve assinalá-las preenchendo os campos respectivos.
  - As respostas erradas a perguntas de escolha múltipla pontuam negativamente.
  - A ausência de resposta não será pontuada.
  - O grupo I é eliminatório para quem não obtiver pelo menos 3 valores.
  - Nos grupos II, III e IV, deve justificar cada uma das suas respostas.
- 

Grupo	Nota
I	
II-1	
II-2	
II-3	
II-4	
III-1	
III-2	
III-3	
III-4	
IV-1	
IV-2	
IV-3	
IV-4	
Nota Final	

## I

- (1v.) 1. Num tabuleiro de xadrez  $5 \times 5$  um peão pode apenas mover-se para uma das casas adjacentes (quatro no máximo).



De quantas maneiras é possível levar o peão do canto inferior esquerdo até ao canto superior direito em 8 movimentos (jogadas) *sem passar* pela casa do meio assinalada na figura?

- 30       34       36       40

- (1v.) 2. Considere o conjunto  $A$  de todas as listas de inteiros  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  tais que

$$7 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 11,$$

e o conjunto  $B$  de todas as combinações com repetições a 6 elementos nas 4 letras "a", "b", "c", "d". Então

- $|A| < |B|$         $|A| = |B|$         $|A| > |B|$

- (1v.) 3. Seja  $G$  um grafo com 13 arestas e  $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_k\}$  uma coloração de arestas de  $G$  num número mínimo de  $k$  (= ao índice cromático) cores. Suponhamos que em qualquer conjunto de 4 arestas de  $G$  há pelo menos um par de arestas com uma extremidade (vértice) em comum.

Em cada uma das afirmações seguintes escolha a melhor estimativa:

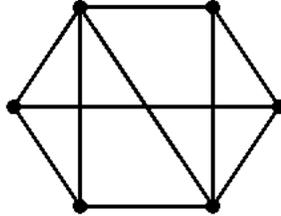
O maior número de arestas de cada cor que a coloração  $\mathcal{C}$  pode ter é \_\_\_\_ .

O índice cromático de  $G$  é pelo menos maior ou igual a \_\_\_\_ .

- (1v.) 4. Escolha a melhor estimativa. Seja  $G$  um grafo simples conexo em que todos os vértices têm grau maior ou igual a 5. Supondo que  $G$  não tem ciclos hamiltonianos então a ordem de  $G$  é pelo menos maior ou igual a \_\_\_\_ .

5. Considere o seguinte grafo  $G$ .

(1v.)

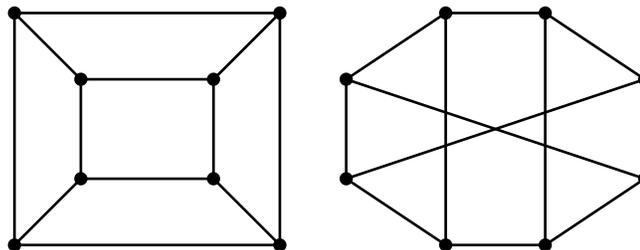


Seja  $G_0, G_1, \dots, G_5$  uma sequência de grafos parciais de  $G$  tais que  $G_0 = G$  e cada  $G_i$  tem menos uma aresta que  $G_{i-1}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Sabendo que  $G_5$  é conexo assinala a validade das afirmações seguintes:

	Sim	Não
$G_4$ é conexo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_4$ tem ciclos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_5$ tem ciclos.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

6. Para responder a esta pergunta preencha apenas os campos numa das alternativas A), B) ou C).

(1v.)

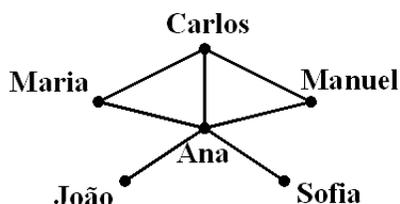


Os dois grafos na figura acima não são isomorfos porque:

- A) Os dois grafos têm um número diferente de vértices de grau \_\_\_\_\_. Enquanto o primeiro tem \_\_\_\_\_, o segundo tem \_\_\_\_\_.
- B) Os subgrafos gerados pelos vértices de grau \_\_\_\_\_ não são isomorfos.
- C) O primeiro grafo tem \_\_\_\_\_ ciclos de comprimento \_\_\_\_\_, enquanto o segundo tem \_\_\_\_\_.

(1v.)

7. Seis amigos: a Ana, o Carlos, o Manuel, a Maria, o João e a Sofia estiveram ontem no ginásio. Considere o seguinte grafo tendo estes 6 amigos como vértices, onde dois *amigos*  $X$  e  $Y$  estão ligados por uma aresta sse se intersectarem os respectivos períodos de tempo em que  $X$  e  $Y$  estiveram ontem no ginásio.



Diga se cada uma das afirmações seguintes é possível ou impossível.

- A) Todos os seis amigos estiveram no ginásio uma única vez, por um período de tempo variável.  
 B) Todos os seis amigos estiveram no ginásio uma única vez, exactamente durante uma hora.

Possível    Impossível

- A)       
 B)

(1v.)

8.

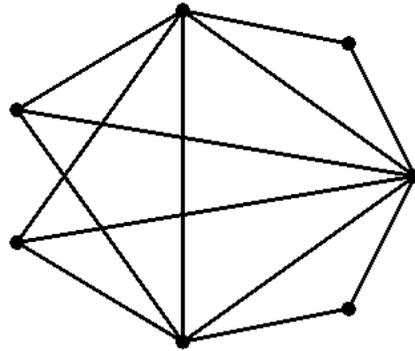
Seja  $G$  um grafo simples conexo de ordem  $n \geq 3$ . Assinale as afirmações correctas.

Sim    Não

- A) Se  $G$  é planar então  $G$  tem número cromático  $\leq 4$ .  
  B) Se  $G$  tem exactamente dois vértices de grau ímpar então admite um ciclo euleriano.  
  C) Se  $G$  é bipartido de ordem par então tem ciclos hamiltonianos.  
  D) Se todos os seus vértices têm grau  $\geq n/2$  então  $G$  tem ciclos hamiltonianos.

## II

Considere o seguinte grafo  $G$ :



1. O grafo  $G$  tem ciclos hamiltonianos? E cadeias hamiltonianas? Dê exemplos, ou justifique a não existência de tais ciclos e cadeias. (1 v.)
2. Qual o maior comprimento que os ciclos de  $G$  podem ter? Dê um exemplo de um ciclo de comprimento máximo. Note que um ciclo não pode repetir arestas! (1 v.)
3. Qual o número cromático de  $G$ ? Indique uma coloração de vértices de  $G$  num número mínimo de cores. (1 v.)
4. O grafo  $G$  é planar? Esboce uma representação planar topológica de  $G$ , ou então demonstre que  $G$  não é planar. (1 v.)

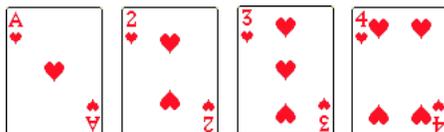
## III

Considere um poliedro convexo  $\mathcal{P}$  satisfazendo

- (1) todas as faces de  $\mathcal{P}$  são quadradas ou triangulares,
  - (2) todo o vértice de  $\mathcal{P}$  pertence ao bordo de exactamente duas faces triangulares,
  - (3) todo o vértice de  $\mathcal{P}$  pertence ao bordo de exactamente duas faces quadradas,
  - (4) todo o vértice de  $\mathcal{P}$  tem grau maior ou igual a 4.
1. Prove que o poliedro  $\mathcal{P}$  tem  $v = 12$  vértices. (0,75 v.)
  2. Qual o número  $a$  de arestas de  $\mathcal{P}$ ? (1,25 v.)
  3. Determine os números de faces triangulares e quadradas de  $\mathcal{P}$ . (1,25 v.)
  4. Todos os vértices de  $\mathcal{P}$  têm grau 4. Justifique esta afirmação. (0,75 v.)

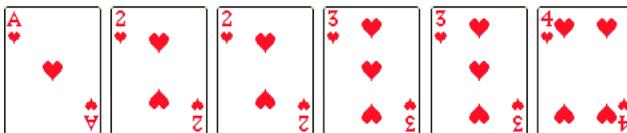
## IV

Considere um baralho formado pelas seguintes 4 cartas:



- (1 v.)      **1.** Se juntar quatro baralhos iguais a este (16 cartas ao todo), quantas mãos pode formar com 4 cartas retiradas destes baralhos? Uma *mão* de cartas é uma lista de cartas, possivelmente repetidas, onde interessa o número de vezes que cada carta aparece repetida, mas não o modo como se ordenam essas cartas.
- (1 v.)      **2.** E se juntar apenas dois baralhos iguais a este (num total de 8 cartas), quantas mãos de 4 cartas pode formar destes dois baralhos?

Considere agora a seguinte mão de seis cartas:



- (1 v.)      **3.** De quantas maneiras pode ordenar estas seis cartas?
- (1 v.)      **4.** De quantas maneiras pode ordenar estas seis cartas de modo que não haja duas cartas iguais seguidas?