

# Uma Introdução à Topologia Diferencial

Pedro M. Duarte

April 28, 2021



# Contents

<b>1</b>	<b>Variedades</b>	<b>1</b>
1.1	Aplicações suaves e variedades . . . . .	1
1.2	Teorema da função implícita . . . . .	7
1.3	Teorema da função inversa . . . . .	16
1.4	Exercícios . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Mapas</b>	<b>21</b>
2.1	Equivalência entre mapas . . . . .	21
2.2	Submersões e imersões . . . . .	24
2.3	Mergulhos . . . . .	25
2.4	Exercícios . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Campos</b>	<b>33</b>
3.1	Campos de vectores . . . . .	33
3.2	Fluxos . . . . .	37
3.3	Conjugação entre campos . . . . .	41
3.4	Conjugação local entre campos . . . . .	42
3.5	Campos escalares . . . . .	50
3.6	Formas quadráticas . . . . .	51
3.7	Representação local duma função num ponto crítico . . . . .	54
3.8	Exercícios . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Variedades com Bordo</b>	<b>63</b>
4.1	Variedades com bordo . . . . .	63
4.2	Teorema dos níveis regulares com bordo . . . . .	67
4.3	Vizinhanças tubulares . . . . .	70
4.4	Exercícios . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Transversalidade</b>	<b>75</b>
5.1	Teorema de Sard . . . . .	75
5.1.1	Esboço da Prova do Teorema de Sard . . . . .	77
5.2	Transversalidade . . . . .	81
5.3	Campos vectoriais genéricos . . . . .	88
5.4	Funções de Morse . . . . .	91

5.5	Exercícios . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Orientações</b>	<b>97</b>
6.1	Orientações em espaços lineares . . . . .	97
6.2	Orientações em variedades . . . . .	101
6.3	Orientação induzida no bordo . . . . .	102
6.4	Orientação induzida numa pré-imagem . . . . .	104
6.5	Exercícios . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Homotopia</b>	<b>111</b>
7.1	Aproximação por mapas suaves . . . . .	111
7.2	Homotopia entre mapas . . . . .	112
7.3	Equivalências de homotopia . . . . .	115
7.4	Grupo Fundamental . . . . .	116
7.5	Espaços de Recobrimento . . . . .	120
7.6	Exercícios . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Homologia</b>	<b>131</b>
8.1	Homologia Singular . . . . .	131
8.2	Invariantes Topológicos . . . . .	132
8.3	Simplexos e cadeias singulares . . . . .	133
8.4	O operador de bordo . . . . .	134
8.5	Homologia dum espaço topológico . . . . .	136
8.6	Acção dum mapa contínuo na homologia . . . . .	136
8.7	Homologia singular relativa . . . . .	138
8.8	Axiomática de Eilenberg-Steenrod . . . . .	139
8.9	Junção de Células . . . . .	141
8.10	Decomposições Celulares . . . . .	143
8.10.1	Construção do Cilindro . . . . .	146
8.10.2	Construção da Garrafa de Klein . . . . .	147
8.10.3	Construção do Plano Projectivo . . . . .	148
8.11	Relação com a homotopia . . . . .	149
8.12	Exercícios . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Teoria de Morse</b>	<b>153</b>
9.1	Um exemplo . . . . .	153
9.2	Teoremas Básicos . . . . .	154
9.3	Desigualdades de Morse . . . . .	166
9.4	Decomposição celular dinâmica . . . . .	168
9.5	Funções de Morse próprias . . . . .	171
9.6	Funções quadráticas em $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{P}^n$ . . . . .	175
9.7	Teorema de Reeb . . . . .	177
9.8	Exercícios . . . . .	178

<b>10 Teoria do Grau</b>	<b>185</b>
10.1 Teoria do Grau Módulo 2 . . . . .	186
10.2 Teoria do Grau de Brouwer . . . . .	191
10.3 Exercícios . . . . .	197
<b>11 Teorema de Poincaré-Hopf</b>	<b>201</b>
11.1 Índice duma singularidade . . . . .	201
11.2 Teorema de Poincaré-Hopf . . . . .	206
11.3 Exercícios . . . . .	211
<b>12 Teorema de Jordan-Brouwer</b>	<b>213</b>
12.1 Componentes conexas . . . . .	213
12.2 Winding numbers . . . . .	214
12.3 Prova do Teorema de Jordan-Brouwer . . . . .	216
12.4 Exercícios . . . . .	217
<b>13 Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>221</b>
13.1 Grau, volume e orientação em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	221
13.2 Volumes Euclidianos . . . . .	224
13.3 Volume Riemanniano . . . . .	226
13.4 Fórmula integral para o grau . . . . .	227
13.5 Mapa de Gauss e Operador de forma . . . . .	229
13.6 Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	232
13.7 Exercícios . . . . .	233
<b>14 Apêndices</b>	<b>237</b>
14.1 Derivadas Totais . . . . .	237
14.2 Formas Normais de Jordan . . . . .	238
14.3 Teorema de Stone-Weierstrass . . . . .	242
14.4 Categorias e Functores . . . . .	243
14.5 Variedades Abstractas . . . . .	246
14.6 Espaço Projectivo . . . . .	248
14.7 Fibrados . . . . .	250
14.8 Combinações Lineares Formais . . . . .	251
14.9 Homologia Singular . . . . .	252
14.10 Álgebra Homológica . . . . .	256
14.11 Complexos Simpliciais . . . . .	260
14.12 Geometria Diferencial . . . . .	263



## Introdução

A Topologia Diferencial é uma disciplina matemática que relaciona os invariantes topológicos dum objecto geométrico (variedade, função, campo, etc) com as propriedades globais da sua estrutura diferenciável.

Eis alguns exemplos típicos de teoremas da Topologia Diferencial:

- O Teorema de Gauss-Bonnet (1848): Dada uma superfície Riemanniana fechada (compacta e sem bordo), seja  $K: X \rightarrow \mathbb{R}$  a sua curvatura Gaussiana, e  $\chi(X)$  a característica de Euler-Poincaré de  $X$ . O Teorema Gauss-Bonnet estabelece a igualdade

$$2\pi \chi(X) = \int_X K dA$$

que relaciona o invariante topológico  $\chi(X)$  com a curvatura total da superfície, que é uma propriedade global da estrutura diferenciável e Riemanniana de  $X$ .

- Teorema de Poincaré-Hopf (1926): Seja  $X$  uma variedade compacta e sem bordo e  $\xi$  um campo de vectores tangente a  $X$  com todas as suas singularidades isoladas. O índice  $\text{Ind}_x(\xi)$  dum singularidade isolada  $\xi(x) = 0$  do campo  $\xi$  mede a complexidade de  $\xi$  numa vizinhança de  $x$ . O Teorema de Poincaré-Hopf estabelece a igualdade

$$\chi(X) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi)$$

que relaciona o invariante topológico  $\chi(X)$  com a totalidade das singularidades do campo  $\xi$ , ou seja, liga a topologia de  $X$  a uma propriedade global do campo diferenciável  $\xi$ .

- A Teoria de Morse foi desenvolvida por Marston Morse nos anos 30' do século XX. Seja  $f$  uma função suave, e  $X$  uma variedade compacta e sem bordo. Supondo que todos os pontos críticos de  $f$  são não degenerados, um dos corolários da Teoria de Morse é a seguinte igualdade

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k c_k(f)$$

onde  $c_k(f)$  designa o número de pontos críticos com índice  $k$  da função  $f$ . O índice dum ponto crítico  $p \in X$  é a maior dimensão dum sub-variedade  $S \subset X$  tal que o ponto  $p \in S$  seja um máximo local da função  $f|_S$ . Assim, a Teoria de Morse conecta a topologia de  $X$  à contagem dos pontos críticos de  $f$ , uma propriedade global da função  $f$ .

- A Teoria do Grau foi desenvolvida por L. J. Brouwer no início do século passado para mapas suaves entre variedades compactas e orientadas da mesma dimensão. O grau de um mapa  $f: X \rightarrow Y$  é um número inteiro

$\deg(f) \in \mathbb{Z}$  que mede o número de vezes que a imagem de  $f$  varre a variedade  $Y$ . Esta relação exprime-se através da fórmula de integração

$$\int_X \det(Df_x) dx = \deg(f) \operatorname{vol}(Y)$$

onde  $\operatorname{vol}(Y)$  representa o volume Riemanniano de  $Y$  e o integral à esquerda se refere ao volume Riemanniano em  $X$ . A Teoria do Grau estabelece que para todo o valor regular  $y$  de  $f$  se tem

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(Df_x)$$

onde  $\operatorname{sgn}(Df_x) = \pm 1$  consoante a derivada  $Df_x: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  preserva ou inverte a orientação. Esta teoria estabelece uma relação entre o grau  $\deg(f)$ , que é um invariante topológico de  $f$  e a contagem das pré-imagens de um qualquer valor regular de  $f$ , uma propriedade global da estrutura diferenciável do mapa  $f$ .

Este texto foi redigido ao longo de vários anos a leccionar uma disciplina de introdução à Topologia Diferencial com programas construídos em torno dos seguintes tópicos fundamentais:

- (a) Teoria da Transversalidade,
- (b) Teoria de Morse,
- (c) Teoria do Grau de Brouwer.

Os capítulos 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 8 contêm os pré-requisitos técnicos não assumidos mas necessários à elaboração das teorias (a)-(c). A lista destes tópicos prévios inclui as variedades, com e sem bordo, a classificação local de mapas e campos, orientações e orientabilidade e os conceitos de homotopia e de homologia. Os capítulos 11 (Teorema de Poincaré-Hopf), 12 (Teorema de Jordan-Brouwer) e 13 (Teorema de Gauss-Bonnet) são aplicações directas da Teoria do Grau.

Para simplificar a exposição assumimos que os objectos considerados são suaves, i.e., de classe  $C^\infty$ . Não obstante todos os resultados apresentados, com a excepção óbvia do Teorema de Sard, valem indistintamente para qualquer regularidade  $C^k$  com  $k \geq 1$  (ou  $k \geq 2$  no contexto da Teoria de Morse) incluindo o caso analítico  $k = \omega$ . Para isso não usamos a técnica das *partições da unidade*, que não funciona adequadamente no caso analítico. A falta desta técnica de globalização é compensada pelo Teorema da Vizinhança Tubular para variedades em ambiente Euclideano. Todas as proposições deste texto podem por isso ser facilmente adaptadas à categoria analítica.

Os resultados genéricos da Teoria da Transversalidade, como o Teorema da Transversalidade de René Thom, podem ser formulados de duas maneiras possíveis:



- (a) A primeira alternativa envolve a consideração de espaços funcionais  $\mathcal{E}$  (de funções, mapas, campos, etc), tipicamente de dimensão infinita. Uma propriedade como a transversalidade diz-se *genérica* se o subconjunto dos objectos  $f \in \mathcal{E}$  com essa propriedade for topologicamente grande, por exemplo um aberto denso ou, mais geralmente, um espaço de Baire (2ª categoria).
- (b) a segunda opção usa o conceito de *prevalência* proposto em [8]. Uma propriedade nos objectos dum espaço linear  $\mathcal{E}$  diz-se *prevalente* se existir um subespaço  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  de dimensão finita (dito o espaço de testes) tal que para todo  $f \in \mathcal{E}$  o objecto  $f + v$  satisfaz a propriedade em causa para quase todo  $v \in \mathcal{F}$ . O conceito de *propriedade prevalente* traduz de modo preciso a ideia pouco rigorosa de que ‘quase todos’ os objectos  $f \in \mathcal{E}$  satisfazem essa propriedade.

Estes dois conceitos são logicamente independentes, apesar de em muitos contextos o conceito de prevalência ser mais forte e mais relevante. O conceito de prevalência tem ainda a vantagem de não precisar duma topologia no espaço de dimensão infinita  $\mathcal{E}$ . No sentido de ganhar algum tempo, evitando a introdução dos espaços funcionais apropriados, todos os resultados de genéricos deste texto foram formulados usando (implicitamente) o conceito de prevalência.

O principal objectivo deste texto é explicar um conjunto de técnicas e ferramentas da Topologia Diferencial que são úteis para resolver inúmeros problemas de outras áreas, como a Geometria, a Análise, a Teoria das Probabilidades, ou os Sistemas Dinâmicos. Os conteúdos leccionados estabelecem pontes com outras teorias, sendo nosso propósito estimular a curiosidade do leitor em aprofundá-las. Os apêndices procuram facilitar essas ligações.

## Pré-requisitos

São recomendáveis uma boa formação nas disciplinas de Álgebra Linear, e de Cálculo ou Análise em  $\mathbb{R}^n$ , familiaridade com os conceitos de Topologia Geral e de Geometria Diferencial em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , um pouco de Teoria da Medida (em particular Teoria do Integral de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ ) e por fim umas noções básicas de Análise Funcional.



# Chapter 1

## Variedades

Os objectos de estudo da Topologia Diferencial são as variedades e as aplicações suaves, onde *suave* significa *de classe*  $C^\infty$ . Uma variedade é um subconjunto dum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  que é localmente difeomorfo a outro espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$  de dimensão  $k \leq n$ . Implícito a esta definição está o seguinte condeito: chamamos *difeomorfismo* a um mapa suave entre variedades que seja bijectivo e cujo mapa inverso seja também suave. Usaremos o termo *mapa* como sinónimo de *aplicação* entre variedades.

### 1.1 Aplicações suaves e variedades

Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto arbitrário,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação.

**Definição 1.1.1.** *Uma extensão suave de  $f$  é uma aplicação  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  definida num aberto  $U$  tal que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in U \cap X$ .*

**Definição 1.1.2.** *Dados  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ , dizemos que uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é suave se para cada  $p \in X$  existirem um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  contendo  $p$  e uma extensão suave da restrição  $f|_{X \cap U}$  ao aberto  $U$ .*

A composição de aplicações suaves é suave porque as funções de classe  $C^\infty$  gozam desta mesma propriedade (Exercício 1.3).

**Definição 1.1.3.** *Quando  $f : X \rightarrow Y$  é suave, bijectiva, e  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  é também suave, dizemos que  $f$  é um difeomorfismo. Dois conjuntos  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  dizem-se difeomorfos se existir um difeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre  $X$  e  $Y$ . Escrevemos  $X \simeq Y$  para dizer que  $X$  é difeomorfo a  $Y$ .*

Para enfatizar a diferença com o conceito local introduzido a seguir diremos com o mesmo sentido que os conjuntos  $X$  e  $Y$  são *globalmente difeomorfos*. A relação “*ser difeomorfo a*” é uma relação de equivalência porque a composição de difeomorfismos é um difeomorfismo.

Sejam  $p \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $q \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . Vamos escrever  $\phi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  para significar que  $\phi$  é um mapa suave definido numa vizinhança aberta  $X'$  de  $p$  em  $X$  tal que  $\phi(X') \subset Y$  e  $\phi(p) = q$ .

**Definição 1.1.4.** *Um mapa  $\phi : X \rightarrow Y$  diz-se um difeomorfismo local em  $p \in X$  se existirem vizinhanças abertas  $U$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ , e  $V$  de  $q = f(p)$  em  $\mathbb{R}^m$  tais que  $\phi : X \cap U \rightarrow Y \cap V$  seja um difeomorfismo. Escrevemos  $\phi : (X, p) \simeq (Y, q)$  para enfatizar que  $\phi$  é um difeomorfismo local em  $p$ .*

*Se o mapa  $\phi$  for um difeomorfismo local em todos os pontos  $p \in X$  diremos simplesmente que  $\phi : X \rightarrow Y$  é um difeomorfismo local.*

**Definição 1.1.5.** *Dizemos que  $(X, p)$  é localmente difeomorfo a  $(Y, q)$  se existir um difeomorfismo local  $\phi : (X, p) \simeq (Y, q)$ . Finalmente, escrevemos  $(X, p) \simeq (Y, q)$  para significar que  $(X, p)$  e  $(Y, q)$  são localmente difeomorfos.*

A composição de difeomorfismos (locais) é um difeomorfismo (local). Logo, a relação “*ser localmente difeomorfo a*” é uma relação de equivalência entre os pares  $(X, p)$  com  $p \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Chama-se *variedade* a um conjunto localmente difeomorfo a um espaço euclidiano. Mais precisamente:

**Definição 1.1.6.** *Um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se uma variedade se para cada  $p \in X$  existir um difeomorfismo local  $\phi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ .*

Sejam  $X$  uma variedade,  $V$  um aberto de  $X$ , e  $U$  um aberto dum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$ . Os difeomorfismos  $\phi : V \rightarrow U$  dizem-se *cartas de  $X$* . Os difeomorfismos no sentido inverso,  $\phi : U \rightarrow V$ , dizem-se *parametrizações de  $X$* . Chama-se *atlas* duma variedade  $X$  a uma família de cartas de  $X$ ,  $\{\phi_i : V_i \rightarrow U_i\}_{i \in I}$ , cujos domínios cubram  $X$ , i.e.,  $X \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variedades e  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave.

**Definição 1.1.7.** *Dados  $\phi : (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  e  $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \simeq (Y, q)$  parametrizações locais,*

$$\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \phi : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

*diz-se o representante local de  $f$  nas parametrizações  $\phi$  e  $\psi$ .*

A definição de  $\tilde{f}$  implica a comutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{f} & (Y, q) \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ (\mathbb{R}^k, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^m, 0) \end{array}$$

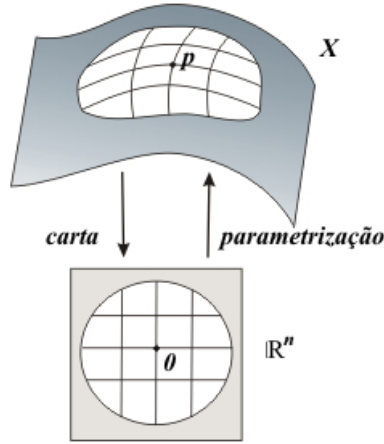


Figure 1.1: Carta e parametrização de uma variedade

**Proposição 1.1.1.** Se  $X$  é uma variedade e  $p \in X$  então existe um único inteiro  $k = k(X, p) \in \mathbb{N}$  tal que  $(X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . A aplicação  $x \mapsto k(X, x)$  é localmente constante. Se  $X$  é conexa então esta aplicação tem um valor constante.

*Proof.* Por definição de variedade, se  $p \in X$  existe um difeomorfismo local  $\phi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Havendo outro difeomorfismo local  $\psi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^{k'}, 0)$ , tem-se  $\psi \circ \phi^{-1}: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (\mathbb{R}^{k'}, 0)$ , o que implica que  $D(\psi \circ \phi^{-1})_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$  seja um isomorfismo entre espaços vectoriais. Logo  $k = k'$ .

Se  $\phi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  é um difeomorfismo local então o mesmo se verifica com  $\phi: (X, x) \simeq (\mathbb{R}^k, \phi(x)) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ , para todo  $x$  suficientemente próximo de  $p$ , o que mostra que  $x \mapsto k(X, x)$  é uma função localmente constante em  $X$ .  $\square$

**Definição 1.1.8.** Seja  $X$  uma variedade. O único inteiro  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $(X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  diz-se a dimensão local de  $X$  em  $p$  e denota-se por  $k = \dim(X, p)$ . O valor constante da dimensão local  $\dim(X, x)$  (por exemplo se  $X$  for conexa) diz-se a dimensão de  $X$ , e denota-se por  $\dim(X)$ .

Usa-se a notação  $X^n$  para explicitar a dimensão  $n$  de uma variedade  $X$ .

**Exemplo 1.1.1.** Qualquer aberto de  $\mathbb{R}^n$  é localmente difeomorfo a  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , pelo que é uma variedade de dimensão  $n$ .

**Exemplo 1.1.2.** Qualquer conjunto finito é uma variedade de dimensão 0.

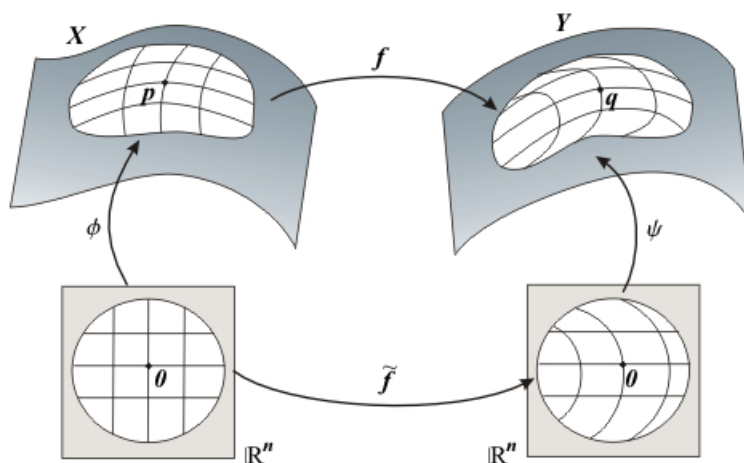


Figure 1.2: Representante local de um mapa em cartas

**Exemplo 1.1.3.** Como segundo exemplo de variedade consideremos o gráfico

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U, y = f(x)\}$$

de uma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . O gráfico  $G_f$  é globalmente difeomorfo ao domínio aberto  $U$  pelo que  $G_f$  é também uma variedade de dimensão  $n$  (Exercício 1.10).

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade.

**Definição 1.1.9.** Um vector  $v \in \mathbb{R}^n$  diz-se tangente a  $(X, p)$ , ou tangente a  $X$  no ponto  $p$ , se  $v$  for o vector velocidade  $v = \alpha'(0)$  de uma curva local suave  $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, p)$ . Denotamos por  $T_p X$  o conjunto de todos os vectores tangentes a  $(X, p)$ .

**Proposição 1.1.2.** Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma variedade com  $\dim(X) = k$  então  $T_p X$  é um sub-espço vectorial de  $\mathbb{R}^n$  com dimensão  $k$ , para cada  $p \in X$ . Além disso  $T_p X = D\phi_0(\mathbb{R}^k)$  para toda a parametrização local  $\phi : (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$ .

*Proof.* A imagem duma aplicação linear injectiva  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um sub-espço vectorial de  $\mathbb{R}^n$  com dimensão  $k$ . Assim sendo, basta-nos mostrar que  $D\phi_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injectiva e  $T_p X = D\phi_0(\mathbb{R}^k)$ .

A parametrização local  $\phi : (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  admite uma inversa local  $\phi^{-1} : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Denotemos por  $\psi$  uma extensão local de  $\phi^{-1}$  a um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que cubra o ponto  $p$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^k$  numa vizinhança suficientemente pequena de 0 temos  $\phi(x) \in X \cap U$  e

$$(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) = \phi^{-1}(\phi(x)) = x.$$

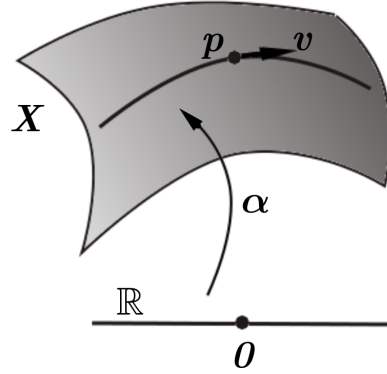


Figure 1.3: Vector tangente a uma variedade

Derivando obtemos

$$D\psi_p \circ D\phi_0 = D\psi_{\phi(0)} \circ D\phi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$$

o que implica a injectividade da aplicação linear  $D\phi_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dado  $v \in D\phi_0(\mathbb{R}^k)$  existe  $u \in \mathbb{R}^k$  tal que  $v = D\phi_0(u)$ . Definido a curva suave  $\alpha(t) := \phi(tu)$ , temos  $\alpha: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, p)$  e pela regra da cadeia usual

$$v = D\phi_0(u) = \alpha'(0) \in T_p X.$$

Isto prova que  $D\phi_0(\mathbb{R}^k) \subset T_p X$ .

Reciprocamente, dado  $v \in T_p X$  seja  $\alpha: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, p)$  uma curva suave tal que  $v = \alpha'(0)$ . Usando a inversa local  $\psi$  da parametrização  $\phi: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  podemos definir a curva suave  $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ,  $\gamma(t) := \psi(\alpha(t))$ . A suavidade de  $\gamma$  resulta da composição de funções suaves ser suave (Exercício 1.3). Por definição de  $\gamma$  temos  $\alpha(t) = \phi(\gamma(t))$  para todo  $t$  suficientemente próximo de 0. Logo, derivando esta relação em  $t = 0$

$$v = \alpha'(0) = D\phi_0 \gamma'(0) \in D\phi_0(\mathbb{R}^k)$$

o que prova a inclusão contrária,  $T_p X \subset D\phi_0(\mathbb{R}^k)$ .  $\square$

**Proposição 1.1.3.** Sejam  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  um mapa suave entre variedades  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  e  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma extensão suave de  $f$  a um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  com  $x \in U$ . Dada uma curva local suave  $\alpha: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, x)$ ,

$$D\tilde{f}_x \alpha'(0) = (f \circ \alpha)'(0).$$

*Proof.* Para  $t \in \mathbb{R}$  próximo de 0, temos  $\alpha(t) \in X \cap U$ , pelo que

$$(f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = \tilde{f}(\alpha(t)) = (\tilde{f} \circ \alpha)(t).$$

Logo, pela regra da cadeia usual,  $(f \circ \alpha)'(0) = D\tilde{f}_x \alpha'(0)$ .  $\square$

**Corolário 1.1.1.** Dada  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  suave existe uma única aplicação linear  $L : T_x X \rightarrow T_y Y$  tal que:

- (a)  $L\alpha'(0) = (f \circ \alpha)'(0)$  para toda curva local suave  $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, x)$ .
- (b)  $Lv = D\tilde{f}_x v$  para todo o vector  $v \in T_x X$  e toda a extensão suave  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $f$  a um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  com  $x \in U$ .

*Proof.* Sejam  $\tilde{f}$  e  $\hat{f}$  duas extensões suaves de  $f$  ao aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo o ponto  $x$ . Consideremos ainda um vector tangente  $v \in T_x X$  e uma curva suave  $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, x)$  tal que  $v = \alpha'(0)$ . Pela Proposição 1.1.3,

$$D\tilde{f}_x(v) = (f \circ \alpha)'(0) = D\hat{f}_x(v). \quad (1.1)$$

Logo podemos definir  $L : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^m$  como a restrição a  $T_x X$  de qualquer das extensões locais suaves da função  $f$  a uma vizinhança aberta de  $x$ . Da relação (1.1) temos  $L(v) = L(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0) \in T_y Y$ , pelo que a aplicação  $L$  toma valores em  $T_y Y$ .  $\square$

**Definição 1.1.10.** A única aplicação linear do corolário anterior denota-se por  $Df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$  e diz-se a derivada de  $f$  no ponto  $x$ .

Da definição acima e da regra da cadeia usual (para funções diferenciáveis em abertos) resulta facilmente a seguinte *regra da cadeia* para funções suaves entre variedades (Exercício 1.7).

**Proposição 1.1.4.** Dados  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  e  $g : (Y, q) \rightarrow (Z, r)$ , mapas suaves entre variedades  $D(g \circ f)_p = Dg_q \circ Df_p$ .

Seja  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  uma aplicação suave entre variedades  $X^k$  e  $Y^m$  e  $\phi : (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  e  $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \simeq (Y, q)$  duas parametrizações locais. Seja  $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$  o representante local de  $f$  nas parametrizações  $\phi$  e  $\psi$ . Segue da regra da cadeia que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} T_p X & \xrightarrow{Df_p} & T_q Y \\ D\phi_0 \uparrow & & \uparrow D\psi_0 \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{D\tilde{f}_0} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Dizemos que  $D\tilde{f}_0$  é o representante local da derivada  $Df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$  nas parametrizações  $\phi$  e  $\psi$ .

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$ , definimos o *fibrado tangente*

$$TX = \{ (x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X \text{ e } v \in T_x X \}.$$

Dado um mapa suave  $f : X \rightarrow Y$  definimos o *mapa tangente*

$$Tf : TX \rightarrow TY, \quad Tf(x, v) = (f(x), Df_x(v)).$$



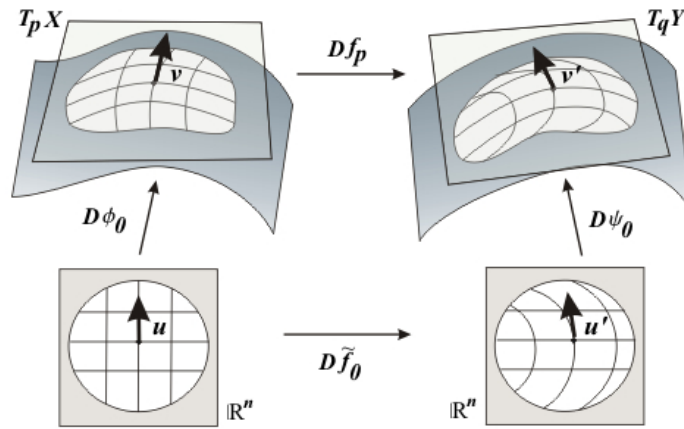


Figure 1.4: Representante local da derivada.

Da regra da cadeia inferimos o seguinte comportamento functorial do mapa tangente.

**Proposição 1.1.5.** Dados  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  mapas suaves temos  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ . Em particular  $f$  é um difeomorfismo sse  $Tf$  é um difeomorfismo.

Desta proposição resulta que o fibrado tangente  $TX$  é uma variedade com o dobro da dimensão de  $X$  (Exercício 1.12).

## 1.2 Teorema da função implícita

O Teorema da função implícita dá-nos uma condição local suficiente para que um conjunto definido por um sistema de equações não lineares

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = b_i, \forall i = 1, \dots, k\}$$

seja localmente o gráfico de uma função suave. Vamos usá-lo como uma ferramenta analítica para justificar que conjuntos deste tipo são variedades.

Dizemos que um subconjunto  $X$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é o gráfico de uma função quando a relação

$$(x_1, \dots, x_n) \in X$$

define implicitamente algumas das variáveis  $x_i$  em função das restantes. Para precisar este conceito introduzimos alguma notação. Dado um conjunto de

índices  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ , onde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , e dado um vector  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , designamos por  $x_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$  o vector com as componentes associadas a índices em  $I$ , e por  $I^c$  o complementar de  $I$  em  $\{1, \dots, n\}$ .

**Definição 1.2.1.** Um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se o gráfico de uma função suave do tipo  $I \subset \{1, \dots, n\}$  se existir um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ , com  $k = |I|$ , e uma função  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{I^c} \in U \text{ e } x_I = \varphi(x_{I^c})\}$$

**Proposição 1.2.1.** Se  $X$  é o gráfico duma função suave de tipo  $I$  com  $|I| = k$  e domínio aberto em  $\mathbb{R}^{n-k}$  então  $X$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ .

*Proof.* Seja  $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{I^c} \in U \text{ e } x_I = \varphi(x_{I^c})\}$  o gráfico de tipo  $I$  da função suave  $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ . A aplicação linear  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ ,  $\Phi(x) := (x_{I^c}, x_I)$  é um isomorfismo. Definindo  $f: U \rightarrow X$ ,  $f(x) := \Phi^{-1}(x, \varphi(x))$ , e  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $g(x) := x_{I^c}$ , tem-se

$$f \circ g|_X = \text{id}_X \quad \text{e} \quad g|_X \circ f = \text{id}_U .$$

Logo  $f: U \rightarrow X$  é um difeomorfismo global do aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  sobre  $X$ , o que prova que  $X$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ .  $\square$

Dada uma matriz  $A$  de dimensão  $m \times n$ , e um conjunto de índices  $I \subset \{1, \dots, n\}$  com  $|I| = k$ , designamos por  $A_I$  a matriz  $m \times k$  formada pelas  $k$  colunas da matriz  $A$  com índices em  $I$ . Com esta notação, dada uma matriz  $A$  com dimensão  $m \times n$ , é válida a seguinte relação para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Ax = A_I x_I + A_{I^c} x_{I^c} .$$

Por exemplo, se  $I = \{1, 3\}$  e  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , então a decomposição acima reduz-se a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A_I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A_{I^c}} [x_2]$$

Em qualquer matriz  $A$  de dimensão  $k \times n$  o número máximo de linhas linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes. Este número diz-se a *característica* da matriz  $A$ , e é denotado

por  $\text{rank}(A)$ . É claro que  $\text{rank}(A) \leq \min\{k, n\}$ . Uma matriz, quadrada ou retangular, diz-se *singular* se  $\text{rank}(A) < \min\{k, n\}$ . Caso contrário, se  $\text{rank}(A) = \min\{k, n\}$ ,  $A$  diz-se *não singular*. Uma matriz quadrada  $A$ , de dimensão  $n \times n$ , é não singular se e somente se  $\text{rank}(A) = n$ , o que equivale a dizer que  $\det(A) \neq 0$ . Qualquer sistema de  $k \leq n$  equações em  $n$  incógnitas pode escrever-se na forma  $Ax = b$  para certas matrizes  $A$  e  $b$ ,  $A$  de dimensão  $k \times n$ , e  $b$  de dimensão  $k \times 1$ . Eliminando as equações redundantes podemos sempre supor que todas as equações são linearmente independentes. Isto equivale a dizer que  $\text{rank}(A) = k$ , ou seja que a matriz  $A$  é não singular.

**Proposição 1.2.2.** Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $k \times n$ , com  $\text{rank}(A) = k \leq n$ . Então o sub-espaço afim  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$  é o gráfico duma função afim de tipo  $I$ , para algum conjunto de índices  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  com  $|I| = k$ . Além disso,  $X$  é o gráfico de uma função afim de tipo  $I$  sse  $\det(A_I) \neq 0$ .

*Proof.* Como  $\text{rank}(A) = k$ , existem  $k$  colunas linearmente independentes, ou seja existe um conjunto  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , com  $|I| = k$ , tal que  $\det(A_I) \neq 0$ . Como

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A_I x_I + A_{I^c} x_{I^c} = b \\ &\Leftrightarrow A_I x_I = -A_{I^c} x_{I^c} + b \\ &\Leftrightarrow x_I = (A_I)^{-1} (-A_{I^c} x_{I^c} + b), \end{aligned}$$

$X$  é o gráfico da função afim de tipo  $I$ ,  $\varphi(x) := (A_I)^{-1} (-A_{I^c} x + b)$ .  $\square$

Por exemplo, o sub-espaço afim definido pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o gráfico duma função afim de tipo  $\{1, 3\}$ , porque  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , mas não de tipo  $\{2, 3\}$ , porque  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ .

Dada uma matriz  $A$  de dimensão  $k \times n$ , e um vector  $b \in \mathbb{R}^k$ , consideremos o sub-espaço afim  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ . Fixemos um conjunto de índices  $I \subset \{1, \dots, n\}$  com  $|I| = k$ . A submatriz quadrada  $A_I$  (formada pelas colunas de  $A$  com índices em  $I$ ) é invertível sse o sub-espaço  $S$  é o gráfico duma função afim  $\varphi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  de tipo  $I$ . Quando  $\det(A_I) \neq 0$ , a função  $\varphi$  vem dada explicitamente por  $\varphi(x) := (A_I)^{-1} (b - A_{I^c} x_{I^c})$ .

No parágrafo seguinte descrevemos o significado geométrico da condição  $\det(A_I) \neq 0$ , vertido também no Exercício 1.21.

Consideremos a decomposição em soma directa  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^I \oplus \mathbb{R}^{I^c}$ , onde  $\mathbb{R}^I := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ se } i \notin I\}$ , e onde  $\mathbb{R}^{I^c} := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ se } i \in I\}$ . Vamos convencionar chamar *verticais* às direcções em  $\mathbb{R}^I$ , e *horizontais* às direcções em  $\mathbb{R}^{I^c}$ . Observemos que  $S$  é o gráfico duma função do tipo  $I$  sse o sub-espaço  $S$  se projecta na vertical (paralelamente a  $\mathbb{R}^I$ ) isomorficamente sobre o sub-espaço das direcções horizontais  $\mathbb{R}^{I^c}$ . Seja agora  $S^\perp$  o espaço das direcções ortogonais a  $S$ . O núcleo da matriz  $A$ , denotado por  $\text{Nuc}(A)$ , é um sub-espaço linear paralelo ao sub-espaço afim  $S$ . Ambos estes sub-espaços partilham o mesmo complemento ortogonal  $S^\perp$ , que é gerado pelas linhas da matriz  $A$ . As linhas da submatriz  $A_I$  são as projecções horizontais sobre  $\mathbb{R}^I$  das linhas da matriz  $A$ . Como as linhas de  $A$  geram  $S^\perp$ , as linhas de  $A_I$  geram a projecção horizontal de  $S^\perp$  sobre  $\mathbb{R}^I$ . Usando as complementaridade entre  $S$  e  $S^\perp$ , respectivamente entre  $\mathbb{R}^I$  e  $\mathbb{R}^{I^c}$ , vemos que  $S$  se projecta vertical e isomorficamente sobre  $\mathbb{R}^{I^c}$  sse  $S^\perp$  se projecta horizontal e isomorficamente sobre  $\mathbb{R}^I$ . Ambas estas condições são equivalentes à desigualdade  $\det(A_I) \neq 0$ .

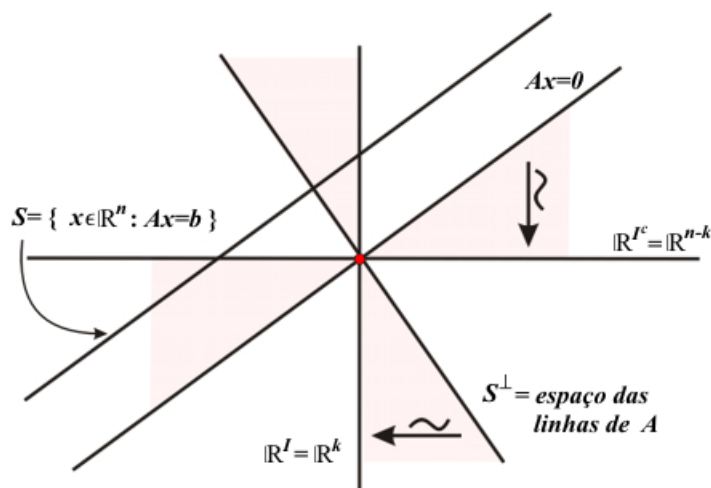


Figure 1.5: Subespaço afim visto como um gráfico do tipo  $I$

**Teorema 1.2.1** (Teorema da Função Implícita). Dados, uma função suave  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  num domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto, um conjunto de índices  $I \subset \{1, \dots, n\}$  com  $|I| = k$ , e um ponto  $p \in D$ , tais que

- (a)  $f(p) = b$ ,
- (b)  $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_I}(p)\right) \neq 0$ ,

o conjunto  $X = \{x \in D: f(x) = b\}$  é, numa vizinhança de  $p$ , o gráfico de uma função suave do tipo  $I$ . Mais precisamente, existem abertos  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ , e uma função suave  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$  tais que

$$X \cap V = \{x \in \mathbb{R}^n: x_{I^c} \in W \text{ e } x_I = \varphi(x_{I^c})\}.$$

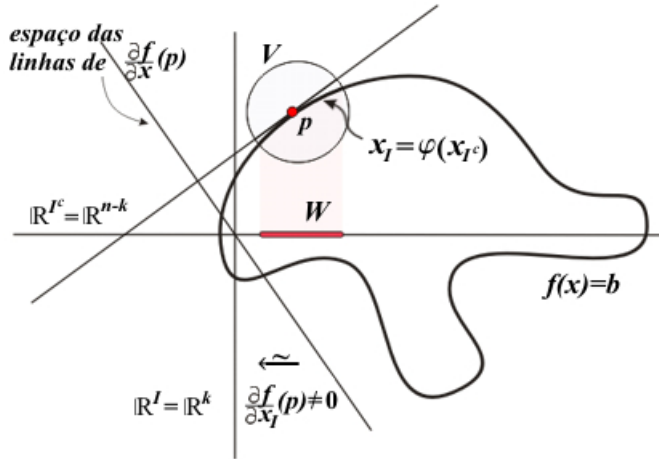


Figure 1.6: Função definida implicitamente pela equação  $f(x) = b$

*Proof.* Sem perda de generalidade supomos que  $I^c = \{1, \dots, n - k\}$ ,  $I = \{n - k + 1, \dots, n\}$  e identificamos  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ . Vamos denotar os elementos de  $\mathbb{R}^n$  como pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^{I^c}$  e  $y \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^I$ .

Seja  $p = (x_0, y_0) \in D$  um ponto tal que  $f(x_0, y_0) = b$  e a matriz  $A = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_I}(p)$  é invertível. Definindo a aplicação  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$g(x, y) := y - A^{-1}(f(x, y) - b)$$

resulta claro que

$$f(x, y) = b \iff g(x, y) = y. \tag{1.2}$$

Assim, um ponto  $(x, y) \in D$  é solução da equação  $f(x, y) = b$  sse  $y$  for um ponto fixo do mapa  $g(x, \cdot): y \mapsto g(x, y)$ . Por construção o mapa  $g(x_0, \cdot)$  tem derivada nula no ponto  $y_0$ .

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = I - A^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = I - A^{-1} A = 0.$$

Seja  $V = D_{r'}(x_0) \times D_r(y_0)$  onde  $D_{r'}(x_0)$  e  $D_r(y_0)$  representam discos fechados respectivamente centrados em  $x_0$  e  $y_0$  e com raios  $r' > 0$  e  $r > 0$ . Tomando

$r'$  e  $r$  suficientemente pequeno podemos supor que para todo  $(x, y) \in V$ ,  $\|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\| \leq 1/2$ . Pelo Teorema do valor médio segue que

$$\|g(x, y) - g(x, y')\| \leq \frac{1}{2} \|y - y'\|$$

quaisquer que sejam  $x \in D_{r'}(x_0)$  e  $y, y' \in D_r(y_0)$ . Em particular, para todo  $x \in D_{r'}(x_0)$ , o mapa  $g(x, \cdot)$  é uma contracção Lipschitz com constante de Lipschitz  $k = \frac{1}{2}$ .

Mantendo  $r$  fixo e diminuindo  $r'$ , por continuidade  $\|g(x, y_0) - y_0\| \leq \frac{r}{2}$  para todo o  $x \in D_{r'}(x_0)$ . Através duma desigualdade triangular apropriada vemos que cada mapa  $g(x, \cdot)$ , com  $x \in D_{r'}(x_0)$ , deixa invariante o disco  $D_r(y_0)$ . Logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (c.f. [12, Proposição 23]) para cada  $x \in D_{r'}(x_0)$ , o mapa  $g(x, \cdot)$  admite um único ponto fixo  $\varphi(x) \in D_r(y_0)$ . Segue então de (1.2) que  $f(x, \varphi(x)) = b$ , para  $x \in D_{r'}(x_0)$ .

Vejam agora a continuidade da aplicação  $\varphi: D_{r'}(x_0) \rightarrow D_r(y_0)$ . Pelo Teorema do valor médio tem-se

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(x')\| &= \|g(x, \varphi(x)) - g(x', \varphi(x'))\| \\ &\leq \|g(x, \varphi(x)) - g(x', \varphi(x))\| + \|g(x', \varphi(x)) - g(x', \varphi(x'))\| \\ &\leq \max_V \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\| \|x - x'\| + \frac{1}{2} \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \end{aligned}$$

donde resulta que  $\varphi$  é Lipschitz contínua

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq 2 \max_V \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\| \|x - x'\|.$$

Se  $r' > 0$  for suficientemente pequeno, segue da hipótese que para cada  $a \in D_{r'}(x_0)$  o mapa  $D_r(y_0) \ni y \mapsto f(a, y)$  é um difeomorfismo sobre a sua imagem. Para vermos que  $\varphi$  é diferenciável em  $D_{r'}(x_0)$  mostramos primeiro que a aplicação  $h: D_{r'}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $h(x) := f(a, \varphi(x))$ , é diferenciável num ponto  $a \in D_{r'}(x_0)$ . Consideremos então

$$\Delta_h(x) := -h(x) + h(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))(x - a).$$

Iremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\Delta_h(x)\|}{\|x - a\|} = 0 \tag{1.3}$$

justificando assim a diferenciabilidade de  $h$  no ponto  $a$ . Pelo Teorema fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} \Delta_h(x) &= f(a, \varphi(a)) - f(a, \varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))(x - a) \\ &= f(x, \varphi(x)) - f(a, \varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))(x - a) \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x - a), \varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a)) \right] (x - a) dt \end{aligned}$$

Usando a continuidade de  $\varphi$  e de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  o limite (1.3) é uma consequência desta fórmula integral para  $\Delta_h(x)$ .

Consideremos em seguida o erro na fórmula de Taylor de primeira ordem da função  $y \mapsto f(a, y)$  no ponto  $y = \varphi(a)$ ,

$$\Delta_f(y) := f(a, y) - f(a, \varphi(a)) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a))(y - \varphi(a)).$$

Como  $\varphi$  é Lipschitziana e  $f(a, \cdot)$  é uma função diferenciável temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\Delta_f(\varphi(x))\|}{\|x - a\|} = 0. \quad (1.4)$$

Das definições de  $\Delta_f(\varphi(x))$  e  $\Delta_h(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a)) \right]^{-1} [f(a, \varphi(x)) - f(a, \varphi(a)) - \Delta_f(\varphi(x))] \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a)) \right]^{-1} [h(x) - h(a) - \Delta_f(\varphi(x))] \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a)) \right]^{-1} \left[ -\frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))(x - a) - \Delta_h(x) - \Delta_f(\varphi(x)) \right] \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (\Delta_h(x) + \Delta_f(\varphi(x))) \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a))$ . Logo os limites (1.3) e (1.4) implicam a diferenciabilidade de  $\varphi(x)$  em  $x = a$  com derivada

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a)). \quad (1.5)$$

Finalmente, desta relação obtemos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  é contínua porque  $\varphi$  é contínua. Logo  $\varphi$  é de classe  $C^1$ . Argumentando desta forma obtemos recursivamente que  $\varphi$  é de classe  $C^k$  para todo o inteiro  $k \geq 1$ . Logo, a função implícita  $\varphi$  é uma aplicação suave.  $\square$

Vejamos o significado geométrico do Teorema da Função Implícita.

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma função suave, e consideremos o conjunto solução do sistema de  $k$  equações não lineares  $f_i(x_1, \dots, x_n) = b_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , em  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$ . Designemo-lo por  $X = \{x \in D : f(x) = b\}$ . Dado um ponto  $p \in X$ , o Teorema 1.2.1 dá-nos uma condição local suficiente para que  $X$  seja, numa vizinhança de  $p$ , o gráfico de uma função suave  $x_I = \varphi(x_{I^c})$  do tipo  $I$ . Essa condição local corresponde ao sub-espaco afim tangente a  $X$  no ponto  $p$  ser (também ele) o gráfico duma

função afim  $\varphi_p : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  de tipo  $I$ . Começemos por representar o sub-espaço afim tangente a  $X$  em  $p$  como o conjunto solução dum sistema de equações lineares. Para isso linearizamos  $f$  em torno de  $p$ ,

$$f(x) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-p) + o(\|x-p\|),$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right]_{i,j}$  representa a matriz *Jacobiana* com as derivadas parciais de  $f$  no ponto  $p$ .  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-p) = 0\}$  é o maior sub-espaço afim de  $\mathbb{R}^n$  tangente a  $X$  em  $p$  (Exercício 1.17). Seja agora  $\frac{\partial f}{\partial x_I}(p) := \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(p) \right]_I$  a submatriz quadrada de  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ , formada pelas colunas da matriz Jacobiana correspondentes às derivadas em ordem a variáveis  $x_i$  com índice  $i \in I$ . Pelas observações precedentes,  $S$  é o gráfico duma função afim  $\varphi_p : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  de tipo  $I$  sse  $\det \left[ \frac{\partial f}{\partial x_I}(p) \right] \neq 0$ . É precisamente esta a hipótese (b) do Teorema 1.2.1. As linhas da matriz Jacobiana, i.e., os gradientes das componentes de  $f$ , geram o espaço normal  $T_p X^\perp$ . A condição  $\det \left[ \frac{\partial f}{\partial x_I}(p) \right] \neq 0$  significa, portanto, que  $T_p X^\perp$  se projecta horizontal e isomorficamente sobre o espaço vertical  $\mathbb{R}^I$ , ou, equivalentemente, que  $T_p X$  se projecta vertical e isomorficamente sobre o espaço horizontal  $\mathbb{R}^{I^c}$  (Figura 1.6). Derivando a função implícita  $h$  obtemos a seguinte relação entre as duas funções implícitas  $h$  e  $\varphi_p$  (Exercício 1.17),

$$\varphi_p(x_{I^c}) = p_I + Dh_{p_{I^c}}(x_{I^c} - p_{I^c}).$$

**Corolário 1.2.1.** Sejam  $n \geq k$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma aplicação suave, e  $p \in D$  tais que

- (a)  $f(p) = b$ ,
- (b)  $\text{rank} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p) \right) = k$ ,

Então o conjunto  $f^{-1}(b) = \{x \in D : f(x) = b\}$  no ponto  $p$  é localmente difeomorfo a  $(\mathbb{R}^{n-k}, 0)$ , i.e.,  $(f^{-1}(b), p) \simeq (\mathbb{R}^{n-k}, 0)$ .

*Proof.* Se a matriz Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$  tem característica  $k$ , então as  $k$  linhas são linearmente independentes, e há pelo menos  $k$  das  $n$  colunas que são linearmente independentes também. Seja  $I \subset \{1, \dots, n\}$  o conjunto dos índices de  $k$  colunas linearmente independentes. Então a matriz  $\frac{\partial f}{\partial x_I}(p)$  é invertível. Pelo Teorema 1.2.1,  $X$  coincide, numa vizinhança de  $p$ , com o gráfico duma função suave com  $n-k$  argumentos, o que mostra que  $(X, p) \simeq (\mathbb{R}^{n-k}, 0)$ .  $\square$



Dada uma aplicação linear  $L : E \rightarrow F$  entre espaços lineares de dimensão finita  $E$  e  $F$ , chama-se *característica* de  $L$  à característica comum das matrizes que representam  $L$  em bases fixadas nos espaços  $E$  e  $F$ . A característica de  $L$  será designada por  $\text{rank}(L)$ . Em Álgebra Linear prova-se o seguinte resultado conhecido como o *Teorema do homomorfismo* (Figura 1.7)

**Teorema 1.2.2.** Seja  $L : E \rightarrow F$  uma aplicação linear. Então  $L$  induz um isomorfismo  $L : E/\text{Nuc}(L) \simeq L(E)$ . Em particular, se  $E$  e  $F$  tiverem ambos dimensão finita, então

$$\text{rank}(L) = \dim(L(E)) = \dim(E/\text{Nuc}(L)) = \dim(E) - \dim(\text{Nuc}(L)) .$$

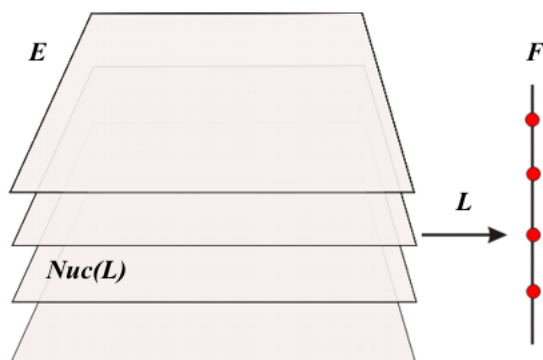


Figure 1.7: Níveis de uma aplicação linear

Seja  $f : X^n \rightarrow Y^k$  um mapa suave.

**Definição 1.2.2.** Dizemos que  $p \in X$  é um ponto crítico de  $f$  se  $\text{rank}(Df_p) < \min\{n, k\}$ . Caso contrário,  $p$  diz-se um ponto regular de  $f$ .

**Definição 1.2.3.** Um elemento  $c \in Y$  diz-se um valor crítico de  $f$  se o conjunto de nível  $f^{-1}(c) = \{p \in X : f(p) = c\}$  contiver algum ponto crítico. Caso contrário,  $c$  diz-se um valor regular de  $f$ .

Sempre que  $f^{-1}(c) = \emptyset$ , então  $c$  é automaticamente um valor regular. Numa função constante,  $f(x) = c$ , todos os pontos são críticos, porque  $Df_x = 0$ . No entanto neste caso  $c$  é o único valor crítico.

**Teorema 1.2.3** (Níveis regulares). Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave entre variedades  $X^n$  e  $Y^k$  com dimensões  $n = \dim(X) > \dim(Y) = k$ . Dado qualquer valor regular  $y \in Y$  de  $f$ , então  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , ou  $f^{-1}(y)$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ .

*Proof.* Seja  $y \in Y^k$  um valor regular de  $f$  tal que  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Dado  $p \in f^{-1}(y)$ , tomemos cartas locais  $\phi : (X^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (Y^k, y) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Consideremos o mapa  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ,  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ , representante de  $f$  nas cartas  $\phi$  e  $\psi$ .  $0$  é um ponto regular de  $\tilde{f}$  porque  $p$  é um ponto regular de  $f$ . Logo,  $\text{rank}(D\tilde{f}_0) = k$ . Pelo corolário a seguir ao Teorema da Função Implícita, obtemos  $(\mathbb{R}^{n-k}, 0) \simeq (\tilde{f}^{-1}(0), 0) \simeq (f^{-1}(y), p)$ , provando que  $f^{-1}(y)$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ .  $\square$

### 1.3 Teorema da função inversa

Dado um difeomorfismo local  $f : (X^n, p) \simeq (Y^n, q)$  a derivada  $Df_p : T_p X^n \rightarrow T_q Y^n$  é um isomorfismo. Reciprocamente, se  $f : (X^n, p) \rightarrow (Y^n, q)$  é um mapa suave tal que a derivada  $Df_p : T_p X^n \rightarrow T_q Y^n$  seja um isomorfismo então  $f$  é um difeomorfismo local. Este resultado não trivial é habitualmente conhecido como *Teorema da Função Inversa*.

**Teorema 1.3.1.** Seja  $f : (X^n, p) \rightarrow (Y^n, q)$  um mapa suave tal que a derivada  $Df_p : T_p X^n \rightarrow T_q Y^n$  é um isomorfismo. Então existe  $U \subset X^n$  aberto tal que

- (a)  $p \in U$ ,
- (b)  $W = f(U)$  é aberto em  $Y^n$ ,
- (c)  $f|_U : U \rightarrow W$  é bijectiva,
- (d) a inversa  $(f|_U)^{-1} : W \rightarrow U$  é suave.

Segue da regra da cadeia que a função  $g = (f|_U)^{-1}$  tem derivada  $Dg_q = (Df_p)^{-1}$ .

*Proof.* Sendo este um resultado local podemos tomar parametrizações locais de  $X^n$  em torno de  $p$ , e de  $Y^n$  em torno de  $q$ , de modo a reduzir a prova a um representante do mapa  $f$  nestas parametrizações locais.

Suponhamos então que  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um mapa suave, com domínio aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $Df_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo. Designamos por  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  a matriz Jacobiana de  $f$  na origem.

Para inverter a relação  $y = f(x)$  vamos usar o Teorema 1.2.1 aplicado à equação  $F(x, y) := y - f(x) = 0$ , onde  $F : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  assim definida é uma aplicação suave. Como  $F(0, 0) = 0 - f(0) = 0$ , e  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  é uma matriz invertível, pelo Teorema 1.2.1, o conjunto

$$M = \{(x, y) : F(x, y) = y - f(x) = 0\}$$

é, numa vizinhança de  $(0, 0)$ , o gráfico  $x = g(y)$  de uma função suave  $g : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Mais precisamente, existe um aberto  $V \subseteq D \times \mathbb{R}^n$  tal que

$$M \cap V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : y \in W \text{ e } x = g(y) \}.$$

Seja  $U = \{ x \in \mathbb{R}^n : (x, f(x)) \in V \}$ .  $U$  é aberto porque a aplicação  $x \mapsto (x, f(x))$  é contínua. Se  $x \in U$  então  $(x, f(x)) \in M \cap V$ , o que implica  $f(x) \in W$  e  $g(f(x)) = x$ . Logo,  $f(U) \subseteq W$  e  $g \circ f = \text{id}_U$ . Se  $y \in W$  então  $(g(y), y) \in M \cap V$ , o que implica  $g(y) \in U$  e  $y = f(g(y))$ . Logo,  $g(W) \subseteq U$  e  $f \circ g = \text{id}_W$ . Aplicando  $f$  a ambos os lados da inclusão  $g(W) \subseteq U$  obtemos

$$W = (f \circ g)(W) = f(g(W)) \subseteq f(U) \subseteq W,$$

o que prova a igualdade  $W = f(U)$ . Logo,  $f$  é uma bijecção entre  $U$  e  $W$ , cuja inversa é  $(f|_U)^{-1} = g$ .  $\square$

## 1.4 Exercícios

**Ex 1.1.** Dados conjuntos  $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , mostre que a restrição  $f|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  de uma aplicação suave  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação suave em  $X$ .

**Ex 1.2.** Veja que a suavidade de uma aplicação é um conceito local. Mais precisamente, mostre que dada uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se para cada  $p \in X$  existir uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $f|_{X \cap V} : X \cap V \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja suave então  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  é suave.

**Ex 1.3.** Mostre que a composição de aplicações suaves é suave. Mostre que a composição de difeomorfismos é um difeomorfismo.

**Ex 1.4.** Dadas variedades  $X \subseteq Y$ , seja  $i : X \rightarrow Y$  a aplicação inclusão. Dado  $p \in X$ , como se relacionam  $T_p X$  e  $T_p Y$ ? Determine explicitamente  $Di_p$ .

**Ex 1.5.** Dadas variedades  $X \subseteq Y$ , uma aplicação suave  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ , e dado  $p \in X$ , como se relacionam  $Df_p$  e  $D(f|_X)_p$ ?

**Ex 1.6.** Mostre que se  $f : X \rightarrow X'$  e  $g : Y \rightarrow Y'$  são aplicações suaves então  $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ , definida por  $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ , é também suave. Se  $f$  e  $g$  são difeomorfismos, então  $f \times g$  é um difeomorfismo.

**Ex 1.7.** Prove a regra da cadeia para funções suaves entre variedades (Proposição 1.1.4).

**Ex 1.8.** Mostre que se  $X$  e  $Y$  são variedades, então o produto cartesiano  $X \times Y$  é uma variedade. Qual é a dimensão do produto?

**Ex 1.9.** Determine explicitamente o espaço tangente de uma variedade produto  $T_{(x,y)}X \times Y$ , e a derivada do mapa produto  $D(f \times g)_{(x,y)}$ .

**Ex 1.10.** Seja  $X$  uma variedade de dimensão  $k$ . Mostre que o gráfico de uma aplicação suave  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$G_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^m : y = f(x)\},$$

é globalmente difeomorfo a  $X$ . Explícite as derivadas do difeomorfismo entre  $G_f$  e  $X$ .

**Ex 1.11.** Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  uma variedade, e  $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ . Mostre que existe uma variedade  $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , um difeomorfismo  $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$ , e uma função linear  $L : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f = L \circ \phi$ .

**Sugestão:** Considere  $\tilde{X}$  como sendo o gráfico de  $f$ .

**Ex 1.12.** Mostre que se  $X$  é uma variedade de dimensão  $n$ , então  $TX$  é uma variedade de dimensão  $2n$ .

**Sugestão:** Se  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$  é uma parametrização de  $X$  então  $T\phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TX$ ,  $T\phi(x, u) = (\phi(x), D\phi_x(u))$ , é uma parametrização de  $TX$ .

**Ex 1.13.** Mostre que  $T_{(x,0)}TX = T_xX \times T_xX$ .

**Sugestão:** Dada uma parametrização  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$  de  $X$ , considere a parametrização  $T\phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TX$ ,  $T\phi(x, u) = (\phi(x), D\phi_x(u))$  de  $TX$ .

**Ex 1.14.** Mostre que o fibrado tangente  $TS^1$  à circunferência  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  é difeomórfica ao cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

**Ex 1.15.** Mostre que, se  $X$  é o gráfico duma função suave, com domínio aberto, de tipo  $I$ , onde  $|I| = k$ , então  $X$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ .

**Ex 1.16.** Mostre que todo o sub-espaço afim  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - k$  é o gráfico de uma função afim  $\varphi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  de tipo  $I$ , para algum conjunto de índices  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  com  $|I| = k$ .

**Ex 1.17.** Dados  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  suave,  $p \in D$ ,  $I \subset \{1, \dots, n\}$  nas condições do Teorema da Função Implícita:  $f(p) = b$  e  $\det \left[ \frac{\partial f}{\partial x_I}(p) \right] \neq 0$ , designando por  $h$  a função definida implicitamente pela equação  $f(x) = b$  numa vizinhança do ponto  $p$ , mostre que

$$T_p f^{-1}(b) = \text{Nuc}(Df_p) = G_{Dh_{pIc}}.$$

Os próximos dois exercícios referem-se aos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 + x_1^2 x_2 = 1\} \\ B &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_3^2 + x_1 x_2 x_3 = 1\} \\ C &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_3^2 + x_2 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 3\} \\ D &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 x_4 = 1, x_1 - x_2 + x_4 = 1\} \end{aligned}$$

**Ex 1.18.** Em cada alínea veja se, localmente numa vizinhança de  $p$ , o conjunto dado é o gráfico de uma função suave de tipo  $I$

- (a)  $A$ ,  $p = (1, 1)$ ,  $I = \{2\}$ .
- (b)  $A$ ,  $p = (1, 1)$ ,  $I = \{1\}$ .
- (c)  $B$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{3\}$ .
- (d)  $B$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{1, 2\}$ .
- (e)  $C$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{1, 2\}$ .
- (f)  $C$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{3\}$ .
- (g)  $D$ ,  $p = (1, 1, 1, 1)$ ,  $I = \{3, 4\}$ .
- (h)  $D$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{1\}$ .
- (i)  $D$ ,  $p = (1, 1, 1)$ ,  $I = \{1, 2, 3\}$ .

**Ex 1.19.** Verifique se são variedades os conjuntos anteriores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , determinando a suas dimensões.

**Ex 1.20.** Mostre que  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  não é uma variedade.

**Ex 1.21.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  com  $m < n$  e característica  $m$ . Sejam  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$  e  $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ . Dado um conjunto  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , com  $|I| = m$ , sejam  $\pi_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^I$  e  $\pi_{I^c} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{I^c}$  as projecções canónicas. Prove que são equivalentes:

- (a)  $S$  é o gráfico duma função afim de tipo  $I$ ,
- (b)  $(\pi_{I^c})|_{S_0} : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^{I^c}$  é um isomorfismo,
- (c)  $S_0 \cap \mathbb{R}^I = \{0\}$ ,
- (d)  $S_0^\perp + \mathbb{R}^{I^c} = \mathbb{R}^n$ ,
- (e)  $S_0^\perp \cap \mathbb{R}^{I^c} = \{0\}$ ,
- (f)  $(\pi_I)|_{S_0^\perp} : S_0^\perp \rightarrow \mathbb{R}^I$  é um isomorfismo,
- (g)  $A_I$  é não singular.

**Sugestão:**  $\dim S = \dim S_0 = \dim \mathbb{R}^{I^c} = n - m$  e  $\dim S_0^\perp = \dim \mathbb{R}^I = m$ . Observe que o espaço gerado pelas linhas de  $A_I$  é igual a  $\pi_I(S_0^\perp)$ , sendo  $S_0^\perp$  o espaço gerado pelas linhas de  $A$ .

**Ex 1.22.** Quais são os pontos de intersecção da recta perpendicular no ponto  $p = (1, 1, 1)$  a  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 + xyz = 1\}$  com o conjunto  $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 3\}$ ?

**Ex 1.23.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio aberto e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma aplicação suave, com  $k \leq n$ , tal que  $X = f^{-1}(b) \neq \emptyset$  sendo  $b \in \mathbb{R}^k$  um valor regular de  $f$ . Mostre que para cada  $(x, v) \in TX$ ,

$$(a) \quad T_x X = \{v \in \mathbb{R}^n : Df_x(v) = 0\}$$

$$(b) \quad T_{(x,v)} TX = \{(u, w) \in \mathbb{R}^{2n} : Df_x(u) = 0, Df_x(w) + D^2f_x(u, v) = 0\}$$

**Sugestão:** Mostre que  $(b, 0)$  é um valor regular de  $Tf: D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  e que  $TX = (Tf)^{-1}(b, 0)$ .

**Ex 1.24.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^k$  variedades e  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $X \subset U$ . Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa suave com uma extensão suave  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Mostre que para cada  $(u, w) \in T_{(x,v)} TX$ ,

$$D(Tf)_{(x,v)}(u, w) = \left( Df_x(u), D\tilde{f}_x(w) + D^2\tilde{f}_x(u, v) \right).$$

## Chapter 2

# Mapas

Neste capítulo introduzimos algumas classes de mapas entre variedades, como as submersões, as imersões e os mergulhos. Fazemos a classificação local dos mapas entre variedades em torno de pontos regulares.

### 2.1 Equivalência entre mapas

Introduzimos a seguir a relação entre mapas, análoga à relação “ser difeomorfo a” entre variedades.

**Definição 2.1.1.** *Dois mapas suaves  $f : X \rightarrow Y$  e  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  dizem-se equivalentes sse existir um par de difeomorfismos  $\phi : X \simeq X_1$  e  $\psi : Y \simeq Y_1$  tais que  $\psi \circ f = f_1 \circ \phi$ . Por outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

Algumas observações, cujas verificações ficam ao cuidado do leitor:

- (a) O difeomorfismo  $\phi$  estabelece uma correspondência bijectiva entre os pontos críticos de  $f$  e os pontos críticos de  $f_1$ .
- (b) O difeomorfismo  $\psi$  estabelece uma correspondência bijectiva entre os valores críticos de  $f$  e os valores críticos de  $f_1$ .
- (c) A relação “ser equivalente a” entre mapas é uma relação de equivalência.

Fixando duas variedades  $X$  e  $Y$ , o espaço  $C^\infty(X, Y)$  de todas as aplicações suaves  $f : X \rightarrow Y$  pode ser munido de uma topologia natural, habitualmente chamada a *topologia de Whitney*. Um mapa  $f \in C^\infty(X, Y)$  diz-se *estável* se for equivalente a todos os mapas próximos, nesta topologia. Os mapas estáveis correspondem a classes de equivalência abertas. O mapa  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow$

$\mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sin(2\pi x)$ , é estável. Este mapa tem dois pontos críticos não degenerados, um máximo e um mínimo. A Figura 2.1 mostra além de  $f$  um exemplo dum mapa  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , com ponto crítico degenerado (de tipo cúbico) que é instável. O mapa  $g$  tem três pontos críticos, mas perto de  $g$  existem mapas com dois e quatro pontos críticos respectivamente. A instabilidade de mapas é fenómeno associado à ocorrência de *singularidades*, i.e., de pontos críticos degenerados.

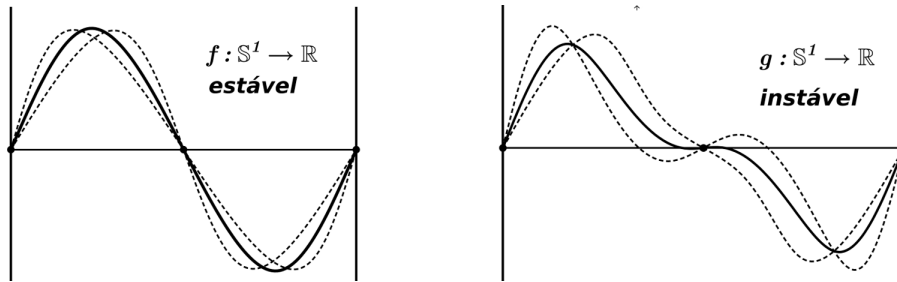


Figure 2.1: Um mapa estável  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  e um mapa instável  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

O conceito de equivalência pode ser localizado.

**Definição 2.1.2.** Os mapas  $f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$  e  $f_1: (X_1, p_1) \rightarrow (Y_1, q_1)$  dizem-se localmente equivalentes se existirem  $\phi: (X, p) \simeq (X_1, p_1)$  e  $\psi: (Y, q) \simeq (Y_1, q_1)$  difeomorfismos locais tais que  $\psi \circ f = f_1 \circ \phi$ . Por outras palavras, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{f} & (Y, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (X_1, p_1) & \xrightarrow{f_1} & (Y_1, q_1) \end{array}$$

**Teorema 2.1.1** (Classificação local de mapas em pontos regulares). Seja  $p \in X^n$  um ponto regular de um mapa suave  $f: (X^n, p) \rightarrow (Y^k, q)$ . Então

- se  $n = k$ ,  $f$  é localmente equivalente à identidade  $\text{id}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ .
- se  $n \geq k$ ,  $f$  é localmente equivalente à projecção linear  $\pi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ,  $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ .
- se  $n \leq k$ ,  $f$  é localmente equivalente à inclusão linear  $i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ,  $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ .



*Proof.* **Caso**  $n = k$ . Tomem-se cartas locais  $\phi : (X^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (Y^n, q) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ . Seja  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  o representante de  $f$  nestas cartas. Como  $p$  é regular,  $D\tilde{f}_0$  é um isomorfismo. Pelo Teorema 1.3.1  $\tilde{f}$  admite uma inversa local  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ . O seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (X^n, p) & \xrightarrow{f} & (Y^n, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow g \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

mostra que  $f$  é localmente equivalente à identidade  $\text{id} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ .

**Caso**  $n > k$ . Tomem-se cartas locais  $\phi : (X^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (Y^k, q) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Seja  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  o representante de  $f$  nestas cartas. Como  $p$  é regular,  $\text{rank}(D\tilde{f}_0) = k$ . Isto significa que a matriz Jacobiana  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0)$  tem as suas  $k$  linhas linearmente independentes, e, portanto, tem pelo menos  $k$  colunas linearmente independentes. Sem perda de generalidade podemos supor que isto acontece com as primeiras  $k$  colunas. Por outras palavras,  $\det \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (x_1, \dots, x_k)}(0) \right) \neq 0$ . Seja então  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o mapa

$$g(x) = (\tilde{f}(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Definindo  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ , temos  $\tilde{f} = \pi \circ g$ . O mapa  $g$  tem matriz Jacobiana na origem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (x_1, \dots, x_k)}(0) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (x_{k+1}, \dots, x_n)}(0) \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

com determinante  $\det \left( \frac{\partial g}{\partial x}(0) \right) = \det \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (x_1, \dots, x_k)}(0) \right) \neq 0$ . Logo,  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo local. Finalmente, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (X^n, p) & \xrightarrow{f} & (Y^k, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^k, 0) \\ g \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^k, 0) \end{array}$$

mostra que  $f$  é localmente equivalente à projecção linear  $\pi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ .

**Caso  $n < k$ .** Tomem-se cartas locais  $\phi : (X^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (Y^k, q) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Seja  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  o representante de  $f$  nestas cartas. Como  $p$  é regular,  $\text{rank}(D\tilde{f}_0) = n$ . Isto significa que a matriz Jacobiana  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0)$  tem as suas  $n$  colunas linearmente independentes, e, portanto, tem pelo menos  $n$  linhas linearmente independentes. Sem perda de generalidade podemos supor que isto acontece com as primeiras  $n$  linhas. Por outras palavras,  $\det \left( \frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) \right) \neq 0$ . Seja então  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  o mapa  $g(x) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_k)$ . Definindo  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

temos  $\tilde{f} = g \circ i$ . O mapa  $g$  tem matriz Jacobiana na origem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) & 0 \\ \hline \frac{\partial(f_{n+1}, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) & I \end{array} \right],$$

com determinante  $\det \left( \frac{\partial g}{\partial x}(0) \right) = \det \left( \frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) \right) \neq 0$ . Logo,  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$  é um difeomorfismo local.

Finalmente, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (X^n, p) & \xrightarrow{f} & (Y^k, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^k, 0) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow g^{-1} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^k, 0) \end{array}$$

mostra que  $f$  é localmente equivalente à inclusão linear  $i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ .  $\square$

## 2.2 Submersões e imersões

**Definição 2.2.1.** Um mapa suave aplicação  $f : X^n \rightarrow Y^k$  diz-se:

- (a) uma imersão se  $n \leq k$  e  $f$  não tem pontos críticos.
- (b) um difeomorfismo local se  $n = k$  e  $f$  não tem pontos críticos.
- (c) uma submersão se  $n \geq k$  e  $f$  não tem pontos críticos.

**Definição 2.2.2.** Dada uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  diz-se aberta se para cada subconjunto aberto  $U \subseteq X$ ,  $f(U)$  for aberto em  $Y$ .

**Teorema 2.2.1.** Seja  $f : X^n \rightarrow Y^k$ ,  $n \geq k$ , uma submersão. Então  $f$  é uma aplicação aberta. Em particular, se  $X^n$  é compacto e  $Y^k$  conexo então  $f$  é sobrejectiva.

*Proof.* Pelo teorema da classificação de mapas sem pontos regulares, numa vizinhança de cada ponto  $p \in X$ ,  $f$  é localmente equivalente a uma projecção linear  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Como a projecção  $\pi$  é uma aplicação aberta, o mapa  $f$  é aberto numa vizinhança de  $p$ . Logo,  $f$  é localmente um mapa aberto. Tendo em conta a propriedade  $f(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} f(V_i)$ ,  $f$  é globalmente um mapa aberto.

Como  $f$  é aberta, o conjunto  $f(X^n)$  é aberto em  $Y^k$ . Mas como  $X^n$  é compacto,  $f(X^n)$  é também compacto, o que implica que seja fechado em  $Y^k$ . Como  $Y^k$  é conexo, sendo  $f(X^n)$  simultaneamente não vazio, aberto e fechado em  $Y^k$ , tem-se  $f(X^n) = Y^k$ . Logo,  $f$  é sobrejectiva.  $\square$

**Teorema 2.2.2.** Seja  $f : X^n \rightarrow Y^n$  um difeomorfismo local numa variedade compacta  $X^n$  noutra variedade conexa  $Y^n$ . Então todas as pré-imagens  $f^{-1}(y)$ , com  $y \in Y^n$ , têm o mesmo número finito de elementos.

*Proof.* Exercício 2.9.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** Seja  $f : X^n \rightarrow Y^k$  uma submersão numa variedade compacta  $X^n$  noutra variedade conexa  $Y^k$ . Então todas as pré-imagens  $f^{-1}(y)$ , com  $y \in Y^k$ , são variedades de dimensão  $n - k$  difeomorfas entre si.

*Proof.* Pelo teorema dos níveis regulares cada pré-imagem  $f^{-1}(y)$  é uma variedade de dimensão  $n - k$ . Como  $Y^k$  é conexa, basta agora mostrar que para cada  $y_0 \in Y^k$  existe uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y^k$  tal que para cada  $y \in V$   $f^{-1}(y)$  é difeomorfa a  $f^{-1}(y_0)$ . A demonstração deste facto usa Teoria de Morse (Exercício 9.1).  $\square$

## 2.3 Mergulhos

**Definição 2.3.1.** Um mapa suave  $f : X \rightarrow Y$  diz-se um mergulho se

- (a) for uma imersão, i.e.,  $Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  for injectiva,  $\forall x \in X$ ,
- (b) for injectiva, e
- (c) a inversa  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  for contínua.

**Proposição 2.3.1.** Dadas variedades  $X$  e  $Y$ , um mapa  $f : X \rightarrow Y$  é um mergulho sse  $f : X \rightarrow f(X)$  é um difeomorfismo. Em particular, se  $f : X \rightarrow Y$  é um mergulho então a imagem  $f(X)$  é uma variedade.

*Proof.* Se  $f : X \rightarrow f(X)$  é um difeomorfismo então  $f : X \rightarrow Y$  é obviamente um mergulho.

Suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  é um mergulho. Como  $f$  é injectiva e  $f^{-1}$  contínua,  $f : X \rightarrow f(X)$  é um homeomorfismo. Resta ver que  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é suave. Para isso vamos mostrar que  $f^{-1}$  admite, localmente na vizinhança de cada ponto  $q \in f(X)$ , uma extensão suave a uma vizinhança aberta de  $q$  em  $Y$ . Seja  $p \in X$  tal que  $f(p) = q$ . Como  $p$  é um ponto regular, pelo teorema da classificação local de pontos regulares existem cartas locais  $\phi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (Y, q) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  tais que, sendo  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ , a inclusão linear definida por  $i(x) = (x, 0)$ , o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{f} & (Y, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^k, 0) \end{array}$$

A inversa da aplicação injectiva  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  estende-se naturalmente a  $\mathbb{R}^k$  como a projecção linear  $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\pi(x, y) = x$ . Logo, definindo  $g = \phi^{-1} \circ \pi \circ \psi$ , temos que  $g$  é uma aplicação suave definida numa vizinhança de  $q$  em  $Y$  tal que

$$g \circ f = \phi^{-1} \circ \pi \circ \psi \circ f = \phi^{-1} \circ \pi \circ i \circ \phi = \phi^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \phi = \text{id}_X,$$

o que mostra que  $f^{-1} = g$  numa vizinhança de  $q$  em  $f(X)$ , ou seja, que  $g$  é uma extensão local suave de  $f^{-1}$ .  $\square$

Um mergulho  $f : X \rightarrow Y$  deve ser visto como uma forma de representar a variedade  $X$  dentro da variedade  $Y$ . Um teorema clássico de Hassler Whitney diz que toda a variedade pode ser representada num ambiente euclideo com o dobro da sua dimensão. Esta dimensão não pode ser melhorada. Por exemplo, toda a superfície pode ser representada em  $\mathbb{R}^4$ , mas algumas superfícies, como a *Garrafa de Klein*, ou o *Plano Projectivo*, não podem ser representadas em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 2.3.1** (Whitney). Para toda a variedade  $X^n$ , de dimensão  $n$ , existe um mergulho  $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

Um segundo teorema de Whitney diz-nos que uma variedade de dimensão  $n$  pode ser sempre mergulhada como subvariedade fechada em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Teorema 2.3.2** (Whitney). Dada uma variedade  $X^n$  de dimensão  $n$  existe um mergulho  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  tal que  $f(X)$  é fechado em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Proof.* Ver [14, Teorema VI.3.4].  $\square$

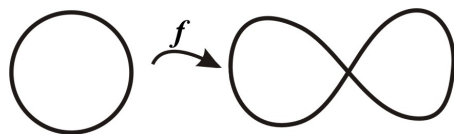


Figure 2.2: Imersão cuja imagem não é uma variedade

A condição de injectividade na definição de mergulho é fundamental para se garantir que a imagem seja uma variedade. A Figura 2.2 mostra um exemplo duma imersão não injectiva  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

A última condição na definição de mergulho é também crucial. Numa imersão injectiva pode acontecer  $f: X \rightarrow f(X)$  não ser um homeomorfismo, considerando em  $f(X)$  a topologia induzida por  $Y$ . Vejamos um exemplo. Seja  $\mathbb{S}^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$  a circunferência unitária. Consideremos o produto  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  habitualmente chamado de 2-toro. O 2-toro pode igualmente ser visto como o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  com os lados opostos identificados. O mapa  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,

$$g(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

é um difeomorfismo local (Exercício 2.14) tal que a imagem por  $g$  de cada quadrado  $[n, n+1] \times [k, k+1]$ , com  $n, k \in \mathbb{Z}$ , cobre completamente  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Consideremos a recta  $y = mx$  de declive  $m$ , e o mapa  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $f_m(x) = g(x, mx)$ .

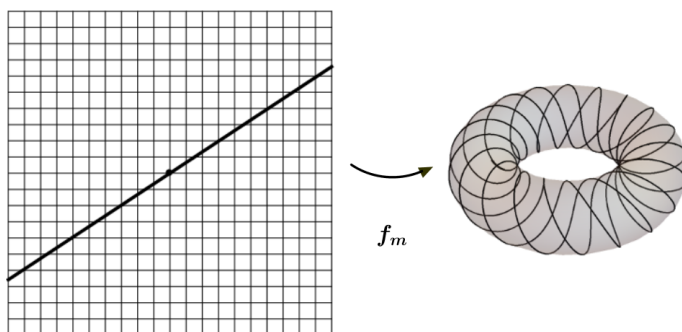


Figure 2.3: Uma imersão cuja imagem não é uma variedade

**Proposição 2.3.2.** (a) Se  $m \in \mathbb{Q}$  então  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  é uma imersão periódica, e  $f_m(\mathbb{R})$  é uma curva fechada.

(b) Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  então  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  é uma imersão injectiva com imagem  $f_m(\mathbb{R})$  densa em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Neste caso  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow f_m(\mathbb{R})$  não é um homeomorfismo.

*Proof.* A alínea (a) é muito simples. Para provar a primeira parte de (b) vejam-se os exercícios 2.12, 2.13 e 2.15. Como a imagem  $f_m(\mathbb{R})$  é densa, toda a vizinhança dum ponto  $q \in f_m(\mathbb{R})$  é uma união duma infinidade de segmentos da curva parametrizada por  $f_m$ . Logo, toda a vizinhança de  $q$  é desconexa (Figura 2.4).

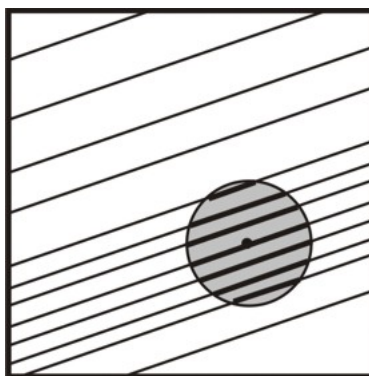


Figure 2.4: Aberto desconexo em  $f_m(\mathbb{R})$

Como em  $\mathbb{R}$  os pontos admitem vizinhanças conexas (intervalos) a correspondência  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow f_m(\mathbb{R})$  não pode ser um homeomorfismo.  $\square$

**Proposição 2.3.3.** Seja  $X$  uma variedade compacta. Então qualquer imersão injectiva  $f : X \rightarrow Y$  é um mergulho.

*Proof.* Como  $f : X \rightarrow f(X)$  é bijectiva e contínua, basta-nos mostrar que  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínua. Todo o conjunto fechado  $F \subseteq X$  é compacto, porque  $X$  é compacto. Logo,  $f(F)$  é compacto, porque  $f$  é contínua. Mas isto implica que  $f(F)$  seja fechado em  $f(X)$ . A continuidade de  $f^{-1}$  resulta da imagem inversa de todo o conjunto fechado  $F \subseteq X$  ser o conjunto  $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$  também ele fechado.  $\square$

**Definição 2.3.2.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa entre espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . O mapa  $f$  diz-se próprio se for contínuo e para todo o conjunto compacto  $K \subseteq Y$ , a sua imagem inversa  $f^{-1}(K)$  for compacta.

**Teorema 2.3.3** (Imersões Próprias). Toda a imersão injectiva e própria  $f : X \rightarrow Y$  é um mergulho.

Este teorema é consequência do seguinte resultado de topologia geral.

**Teorema 2.3.4** (Inversa dum Mapa Próprio). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos localmente compactos. Se  $f : X \rightarrow Y$  é um mapa contínuo, injectivo e próprio então  $f : X \rightarrow f(X)$  é um homeomorfismo.

Recordemos que um espaço topológico  $X$  diz-se *localmente compacto* se para todo o ponto  $p \in X$  e toda a vizinhança  $U$  de  $p$ , existir um compacto  $K \subseteq U$  contendo  $p$  no seu interior.

Observe que resulta da definição que sendo  $f : X \rightarrow Y$  um mapa próprio, se  $Y$  for compacto então  $X$  também é. Também é claro, da definição, que num espaço compacto  $X$  toda a aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é própria. Em espaços não compactos, intuitivamente, uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é própria se for contínua no infinito. Um ponto é considerado próximo de  $\infty$  se estiver fora dum conjunto compacto  $K \subset X$  “grande”. Se  $(x_n)$  for uma sucessão de pontos de  $X$ , dizemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  sse para todo o compacto  $K \subset X$  existir uma ordem  $p \in \mathbb{N}$ , a partir da qual  $x_n \notin K$  para todo  $n \geq p$ . Todo o espaço topológico de Hausdorff localmente compacto, mas não compacto, pode ser *compactificado* por junção dum ponto no infinito. A construção duma tal extensão compacta de  $X$  é chamada a *compactificação de Alexandroff*. Define-se o compactificado  $X^\bullet = X \cup \{\infty\}$  com a topologia cujos abertos são os abertos de  $X$  mais os conjuntos da forma  $\{\infty\} \cup (X \setminus K)$ , em que  $K \subset X$  é compacto. Com esta topologia o espaço  $X^\bullet$  é compacto, sempre que  $X$  seja um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. A definição acima de limite infinito corresponde à convergência nesta topologia para o ponto  $\infty$ . Qualquer aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  pode estender-se ao infinito definindo  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  por

$$f^\bullet(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \infty & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Obtem-se então a seguinte caracterização

**Proposição 2.3.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos localmente compactos, e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. O mapa  $f$  é próprio sse  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  é contínua no infinito.

*Proof.* Tendo em conta que  $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ , são equivalentes as afirmações:

- (a)  $K \subseteq Y$  é compacto  $\Rightarrow f^{-1}(K)$  é compacto.

- (b)  $\{\infty\} \cup (Y \setminus K)$  é uma vizinhança de  $\infty \Rightarrow (f^\bullet)^{-1}(\{\infty\} \cup (Y \setminus K)) = \{\infty\} \cup (X \setminus f^{-1}(K))$  é uma vizinhança de  $\infty$ .

□

*Demonstração do teorema 2.3.4.* Pela Proposição 2.3.3, se  $X$  é compacto então  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínua. Consideremos agora o caso em que  $X$  não é compacto. Temos que mostrar que  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínua. Seja  $q = f(p) \in f(X)$ . Tomemos  $K$  vizinhança compacta de  $q$  em  $Y$ . Como  $f$  é própria e contínua,  $f^{-1}(K)$  é uma vizinhança compacta de  $p$  em  $X$ . Facilmente se vê que  $f(f^{-1}(K)) = K \cap f(X)$ . Aplicando o caso compacto à restrição  $f|_{f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \rightarrow Y$  obtemos que  $f^{-1}|_{K \cap f(X)} : K \cap f(X) \rightarrow X$  é contínua. Logo, como  $q$  é interior a  $K \cap f(X)$  em  $f(X)$ , segue que  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínua no ponto  $q$ . Finalmente, como o ponto  $q \in f(X)$  é arbitrário, o mapa  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínuo em todos os pontos. □

## 2.4 Exercícios

**Ex 2.1.** Demonstre que uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$  de dimensão  $k < n$  é localmente, numa vizinhança de cada um dos seus pontos, um conjunto de nível regular duma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , definida num conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Sugestão:** A inclusão  $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  é uma imersão. Use o facto deste mapa ser localmente equivalente a uma inclusão linear  $j : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  para definir  $f$ .

**Ex 2.2.** Demonstre que uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$  de dimensão  $k < n$  é localmente, numa vizinhança de cada um dos seus pontos, o gráfico duma função suave  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , definida num conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ .

**Sugestão:** Pode usar o exercício anterior.

**Ex 2.3.** Mostre que se  $Z^k \subset X^n$  então existe uma carta local  $\psi : (X^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ , definida numa vizinhança  $U$  de  $p$  em  $X^n$ , tal que o conjunto  $\psi(Z \cap U)$  que representa a intersecção  $Z \cap U$  na carta local  $\psi$  é definido pelas equações  $x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$ .

**Sugestão:** A inclusão  $i : Z^k \hookrightarrow X^n$  é uma imersão. Use o facto deste mapa ser localmente equivalente a uma inclusão linear  $j : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  para definir a carta local  $(x_1, \dots, x_n) = \psi(p)$ .

**Ex 2.4.** Sejam  $k \leq n$ ,  $y \in Y^k$  e  $p \in f^{-1}(y)$  um ponto regular de  $f : X^n \rightarrow Y^k$ . Mostre que  $(f^{-1}(y), p) \simeq (\mathbb{R}^{n-k}, 0)$  e  $T_p f^{-1}(y) = \text{Nuc}(Df_p)$ .

**Sugestão:** Use o facto de a aplicação  $f : (X, p) \rightarrow (Y, y)$  ser localmente equivalente a uma projecção linear  $\pi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ .



**Ex 2.5.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um difeomorfismo local. Mostre que  $I = f(\mathbb{R})$  é um intervalo aberto, e que  $f : \mathbb{R} \rightarrow I$  é um difeomorfismo.

**Ex 2.6.** Dê um exemplo de um difeomorfismo local  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que não seja um difeomorfismo sobre a sua imagem  $f(\mathbb{R}^2)$ .

**Ex 2.7.** Mostre que, se  $f : X^n \rightarrow Y^n$  é um difeomorfismo local e  $f$  é injectiva, então  $f : X^n \rightarrow f(X^n)$  é um difeomorfismo.

**Ex 2.8.** Explique porque não existem submersões de variedades compactas em espaços euclidianos.

**Ex 2.9.** (Pilha de Cópias) Sejam  $X^n$  e  $Y^n$  variedades de dimensão  $n$ ,  $X^n$  compacta. Seja  $y \in Y^n$  um valor regular da aplicação suave  $f : X^n \rightarrow Y^n$ . Mostre que  $f^{-1}(y)$  é finito. Supondo que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ , mostre que existe um aberto  $U \subset Y^n$  contendo  $y$  tal que  $f^{-1}(U)$  é a união disjunta,  $f^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_k$  de  $k$  abertos  $V_i$  tais que  $x_i \in V_i$  e  $f$  transforma  $V_i$  difeomorficamente em  $U$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ .

**Sugestão:** Comece por tomar vizinhanças abertas  $W_i \subset X^n$  dos pontos  $x_i$  que sejam transformadas difeomorficamente por  $f$  em vizinhanças  $U_i$  de  $y$  em  $Y^n$ . Mostre que  $f(X \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i)$  é um compacto que não contém  $y$ .

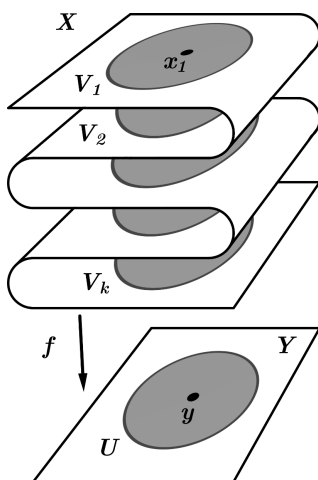


Figure 2.5: Pré-imagens por um difeomorfismo local

**Ex 2.10.** Seja  $f : X^n \rightarrow Y^n$  um difeomorfismo local numa variedade compacta  $X^n$  noutra variedade  $Y^n$ . Mostre que a função  $y \mapsto \#f^{-1}(y)$  é localmente constante.

**Sugestão:** Use o exercício anterior.

**Ex 2.11.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa entre variedades  $X$  e  $Y$ . Mostre que:

- (a) O conjunto dos pontos críticos de  $f$  é fechado em  $X$ .

**Sugestão:** Comece por estudar o caso em que  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação definida num aberto  $U$  dum espaço euclídeo. Exprima o facto de  $p \in U$  ser um ponto crítico de  $f$  através de condições nos menores<sup>1</sup> da matriz Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ . Note que estas condições diferem consoante  $n < k$  ou  $n \geq k$ . No caso geral, para mostrar que o conjunto  $C$  dos pontos críticos de  $f$  é fechado, tome uma sequência  $(p_n)_n$  de pontos em  $C$  convergindo para  $p \in X$ . O objectivo é mostrar que então  $p \in C$ . Tome cartas locais de  $X$  numa vizinhança de  $p$ , e de  $Y$  numa vizinhança de  $f(p)$ . Aplique então o caso anterior ao representante local de  $f : (X, p) \rightarrow (Y, f(p))$  nestas cartas.

- (b) Se  $X$  é compacta, o conjunto dos valores regulares de  $f$  é aberto.

**Ex 2.12.** Seja  $G \subseteq \mathbb{R}$  um subgrupo fechado de  $(\mathbb{R}, +)$ . Mostre que  $G = \mathbb{R}$  ou então  $G = a\mathbb{Z}$  para algum  $a \in G$ .

**Sugestão:** Defina  $a = \inf G \cap ]0, +\infty[$ . Mostre primeiro que  $a \in G$ , e depois que  $G = a\mathbb{Z}$  se  $a > 0$ , e que  $G$  é denso em  $\mathbb{R}$  se  $a = 0$ . Neste caso,  $a = 0$ , suponha, com vista a um absurdo, que  $G \cap ]m, n[ = \emptyset$ . Considere o intervalo  $]c, d[$  limitado entre o supremo  $c$  dos elementos de  $G$  menores ou iguais a  $m$  e o ínfimo  $d$  dos elementos de  $G$  maiores ou iguais a  $n$ , de modo que  $G \cap ]c, d[ = \emptyset$ . Veja que  $c \in G$  e  $d \in G$ . Obtenha uma contradição encontrando elementos de  $G$  em  $]c, d[$ .

**Ex 2.13.** Mostre que se  $m \in \mathbb{R}$  é um número irracional, então o conjunto  $G_m = \{k + mp : k, p \in \mathbb{Z}\}$  é um subgrupo denso em  $\mathbb{R}$ .

**Ex 2.14.** Considere o mapa  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,

$$g(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

Mostre que se trata dum difeomorfismo local.

**Ex 2.15.** Usando o difeomorfismo local  $g$  do exercício anterior, mostre que se  $m \in \mathbb{R}$  é um número irracional, o mapa  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $f_m(x) = g(x, mx)$ , é uma imersão injectiva com imagem densa.

**Sugestão:** Mostre que para  $t = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ ,  $f_m(\mathbb{R}) \cap \{t\} \times \mathbb{S}^1$  é denso em  $\{t\} \times \mathbb{S}^1$  vendo que a pré-imagem deste conjunto por  $g$  contem  $\{0\} \times G_m$ , um subgrupo aditivo denso em  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

**Ex 2.16.** Mostre que a curva  $g : t \mapsto (t, t^2, t^3)$  é um mergulho de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Represente a imagem  $g(\mathbb{R})$  como o conjunto de nível  $f^{-1}(b)$  correspondente a um valor regular  $b$  duma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Ex 2.17.** Mostre que se  $X$  é uma variedade, a projecção  $\pi : TX \rightarrow X$ ,  $\pi(x, v) = x$ , é uma submersão.

<sup>1</sup>Um menor é o determinante duma submatriz quadrada.

# Chapter 3

## Campos

Numa variedade, os campos escalares (funções) e os campos de vectores (normais e tangentes) são objecto de estudo em Topologia Diferencial. Neste capítulo afluamos a teoria da classificação local destes objectos.

### 3.1 Campos de vectores

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade.

**Definição 3.1.1.** *Chama-se campo de vectores em  $X$  a um mapa suave  $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Um campo  $\xi$  em  $X$  diz-se tangente a  $X$  se  $\xi(x) \in T_x X$  para todo  $x \in X$ . Um campo  $\xi$  em  $X$  diz-se normal a  $X$  se  $\xi(x) \in T_x X^\perp$  para todo  $x \in X$ .*

O espaço vectorial de funções suaves  $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$  é formado pelos campos vectoriais em  $X$ . Designamos por  $\mathcal{X}^\infty(X)$  o espaço dos campos tangentes a  $X$ , e por  $\mathcal{X}_\perp^\infty(X)$  o espaço dos campos normais a  $X$ . Ambos são subespaços vectoriais de  $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 3.1.1** (Decomposição em campos tangentes e normais). Todo o campo de vectores  $\xi \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$  decompõem-se de modo único numa soma  $\xi = \xi^T + \xi^\perp$  onde  $\xi^T \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\xi^\perp \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ , i.e.,

$$C^\infty(X, \mathbb{R}^n) = \mathcal{X}^\infty(X) \oplus \mathcal{X}_\perp^\infty(X).$$

Dado um subespaço vectorial  $E \subset \mathbb{R}^n$ , designamos por  $P_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a projecção ortogonal sobre  $E$ , que é caracterizada pelas propriedades

$$P_E \circ P_E = P_E, (P_E)^* = P_E \text{ e } P_E(\mathbb{R}^n) = E.$$

A projecção ortogonal sobre o complemento ortogonal  $E^\perp$  de  $E$  é complementar de  $P_E$ , i.e.,  $P_{E^\perp} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} - P_E$ .

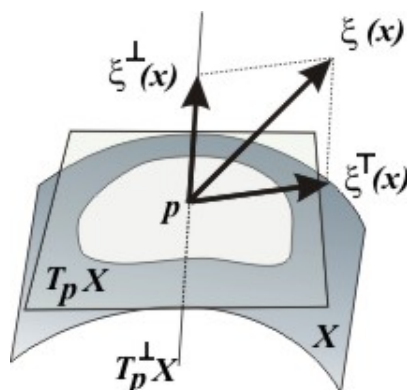


Figure 3.1: Componente tangente e normal de um campo de vectores

Definem-se as componentes tangente e normal de um campo de vectores  $\xi$  respectivamente por

$$\begin{aligned}\xi^T(x) &:= P_{T_x X}(\xi(x)) \\ \xi^\perp(x) &:= P_{(T_x X)^\perp}(\xi(x)) = \xi(x) - \xi^T(x).\end{aligned}$$

O Teorema 3.1 é uma consequência do lema seguinte.

**Lema 3.1.1.** Dado  $\xi \in C^\infty(X^k, \mathbb{R}^n)$ , a aplicação  $\xi^T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é suave.

Para a prova deste lema recordamos a seguir o *método de ortogonalização de Gram-Schmidt*. Dado um vector unitário  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|u\| = 1$ , consideremos o eixo  $E = \mathbb{R}u$  por ele gerado. A projecção ortogonal sobre o eixo  $E$  é dada por  $P_E(x) = (x \cdot u)u$ , enquanto a projecção ortogonal sobre o hiperplano ortogonal  $E^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot u = 0\}$  é dada por  $P_{E^\perp}(x) = x - (x \cdot u)u$ .

Uma família de vectores  $\{u_1, \dots, u_k\}$  se diz *ortonormada* se todos os seus vectores forem unitários e perpendiculares entre si, o que se traduz pelas relações de ortogonalidade  $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ , onde  $\delta_{ij}$  representa o símbolo de Kronecker

$$\delta_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  um subespaço de dimensão  $k$ , com uma base ortonormada  $\{u_1, \dots, u_k\}$ . As projecções ortogonais  $P_E$  e  $P_{E^\perp}$  podem ser expressas por:

$$P_E(x) = \sum_{i=1}^k (x \cdot u_i) u_i \quad \text{e} \quad P_{E^\perp}(x) = x - \sum_{i=1}^k (x \cdot u_i) u_i.$$

O método de Gram-Schmidt usa a forma explicita destas projecções para “ortonormalizar” qualquer família de vectores  $\{v_1, \dots, v_k\}$  linearmente independentes.

Começa-se por normalizar o primeiro vector,  $u_1 = v_1/\|v_1\|$ . A seguir projecta-se  $v_2$  ortogonalmente sobre o hiperplano perpendicular a  $u_1$  e normaliza-se o vector obtido:

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1 \quad \text{e} \quad u_2 = w_2/\|w_2\| .$$

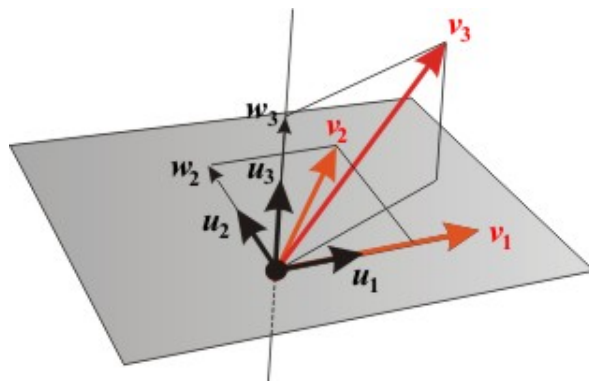


Figure 3.2: O método de Gram-Schmidt em  $\mathbb{R}^3$

Deste modo,  $\{u_1, u_2\}$  é uma base ortonormada do plano gerado pelos vectores  $\{v_1, v_2\}$ . Em geral, supondo encontrada uma base ortonormada  $\{u_1, \dots, u_n\}$  para o subespaço gerado pelos vectores  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Projecta-se  $v_{n+1}$  sobre o complemento ortogonal do subespaço gerado por estes vectores e normaliza-se o vector obtido:

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{i=1}^n (v_{n+1} \cdot u_i) u_i \quad \text{e} \quad u_{n+1} = w_{n+1}/\|w_{n+1}\| .$$

O resultado é uma base ortonormada  $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$  do subespaço gerado pelos vectores  $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ . Este processo (continuado recursivamente até  $n = k$ ) diz-se o método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

**Definição 3.1.2.** *Uma família de campos  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$  diz-se pontualmente independente, resp. ortonormada, se para cada  $x \in X$ , a família de vectores  $\{\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)\} \subset \mathbb{R}^n$  for linearmente independente, resp. ortonormada.*

Se aplicarmos o método de Gram-Schmidt a uma família de campos de vectores  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  pontualmente independente, obtemos uma família ortonormada de campos suaves  $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$  que em cada ponto gera o mesmo subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^n$  que a família original.

**Lema 3.1.2.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $k$ . Dado  $p \in X$ , existe um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $p \in U$  e uma submersão  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  tal que  $X \cap U = f^{-1}(0)$  e  $T_x X = \text{Nuc}(Df_x)$  para qualquer  $x \in X \cap U$ .*

Além disso existe uma família ortonormada  $\{\nu_1, \dots, \nu_{n-k}\} \subset \mathcal{X}_\perp^\infty(X \cap U)$  tal que  $\{\nu_1(x), \dots, \nu_{n-k}(x)\}$  é uma base de  $T_x^\perp X$ , para todo  $x \in \bar{X} \cap U$ .

*Proof.* A aplicação  $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) = x$ , é um mergulho e em particular uma imersão. Pelo Teorema 2.1.1 existem cartas locais  $\phi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  e  $\psi: (\mathbb{R}^n, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  que tornam comutativo o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^n, p) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^k, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde  $i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  representa a aplicação inclusão  $i(x) = (x, 0)$ . Pela comutatividade do diagrama anterior temos para cada  $x \in X$  suficientemente próximo de  $p$

$$\psi(x) = \psi(g(x)) = i(\phi(x)) = (\phi(x), 0). \quad (3.1)$$

Dada uma vizinhança suficientemente pequena  $V$  de 0 em  $\mathbb{R}^k$  existe  $W$  vizinhança de  $p$  em  $X$  tal que  $\phi: W \rightarrow V$  é um difeomorfismo. Analogamente, tomando outra (pequena) vizinhança  $V'$  de 0 em  $\mathbb{R}^{n-k}$  existe  $U$  vizinhança de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\psi: U \rightarrow V \times V'$  é um difeomorfismo. Suponhamos que estas vizinhanças foram escolhidas pequenas o suficiente de modo que (3.1) seja válida para todo  $x \in W$ . Se  $x \in W$  então  $\psi(x) = (\phi(x), 0) \in V \times \{0\} \subset V \times V'$  o que implica que  $x \in U$ . Logo  $g(W) = W \subset U$ .

Considerando a projecção  $\pi: V \times V' \rightarrow V'$ ,  $\pi(x, y) = y$ , temos

$$\pi^{-1}(0) = V \times \{0\} = i(V). \quad (3.2)$$

A aplicação  $f: U \rightarrow V'$ ,  $f := \pi \circ \psi$ , é uma submersão que torna comutativo o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{g} & U & \xrightarrow{f} & V' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi & & \parallel \\ V & \xrightarrow{i} & V \times V' & \xrightarrow{\pi} & V' \end{array}$$

Como os mapas  $\phi: W \rightarrow V$  e  $\psi: U \rightarrow V \times V'$  são difeomorfismos segue de (3.2) que

$$f^{-1}(0) = W.$$

Dado  $x \in W = f^{-1}(0)$ , como  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é uma submersão a aplicação linear  $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é sobrejectiva e  $\dim(\text{Nuc}(Df_x)) = k = \dim(T_x X)$ . Assim basta mostrar a inclusão  $T_x X \subset \text{Nuc}(Df_x)$  para concluirmos a igualdade entre estes subespaços.

Finalmente, dado  $v \in T_x X$  existe uma curva suave  $\alpha: I \rightarrow X$  definida num intervalo aberto  $I$  com  $0 \in I$  tal que  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha'(0) = v$ . Diminuindo

se necessário o intervalo  $I$  temos  $\alpha(t) \in U$  para cada  $t \in I$ . Logo  $(f \circ \alpha)(t) \equiv 0$  o que implica que  $Df_x v = (f \circ \alpha)'(0) = 0$ , ou seja  $v \in \text{Nuc}(Df_x)$ .

Os gradientes  $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)\}$  das componentes de  $f$  constituem uma base do espaço normal  $T_x^\perp X$ , porque  $Df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é sobrejectiva e

$$\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)\}^\perp = \text{Nuc}(Df_x) = T_x X$$

para todo  $x \in X \cap U$ . Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt a estes gradientes, obtemos a família ortonormada de campos normais desejada.  $\square$

O Lema 3.1.1, e o Teorema 3.1, seguem do Lema 3.1.2 porque

$$\xi^T(x) = \xi(x) - \sum_{j=1}^{n-k} (\xi(x) \cdot \nu_j(x)) \nu_j(x).$$

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade.

**Definição 3.1.3.** *Chama-se fibrado normal de  $X$  ao conjunto*

$$T^\perp X := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X, v \in T_x^\perp X\}.$$

Este conjunto  $T^\perp X$  é uma variedade em  $\mathbb{R}^{2n}$  de dimensão  $n$  (Exercício 3.7).

Os fibrados tangente e normal,  $TX$  e  $T^\perp X$ , são instancias do conceito abstracto de *fibrado vectorial* (Apêndice 14.7). Cada espaço tangente  $T_p X$  ou normal  $T_p^\perp X$  é referido como a *fibra* no ponto  $p$ . Os campos tangentes e normais a  $X$  correspondem a *secções suaves* do fibrado tangente e normal, respectivamente.

## 3.2 Fluxos

Todo o campo de vectores tangente  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  determina uma equação diferencial ordinária (autónoma) na variedade  $X$

$$x' = \xi(x).$$

Uma função diferenciável  $x: I \rightarrow X$ , definida num intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , diz-se uma *solução* desta equação se para todo  $t \in I$  se tem  $x(t) \in X$  e  $x'(t) = \xi(x(t))$ .

**Teorema 3.2.1** (Fluxo máximo dum campo). Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  existe um aberto  $D \subset \mathbb{R} \times X$  e uma (única) função  $\varphi: D \rightarrow X$  tais que:

- (a) (existência local) Para cada  $p \in X$ ,  $D_p := \{t \in \mathbb{R}: (t, p) \in D\}$  é um intervalo aberto contendo 0 e a aplicação  $x: D_p \rightarrow X$  definida por  $x(t) := \varphi(t, p)$  é solução do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(0) = p$ .
- (b) (unicidade global) Dada outra solução  $x: I \rightarrow X$  do problema de Cauchy em (a) temos  $x(t) = \varphi(t, p)$  para todo  $t \in I \cap D_p$ .
- (c) (propriedade de grupo) Se  $(t, x) \in D$  e  $(s, \varphi(t, x)) \in D$  então
- $$(t + s, x) \in D \text{ e } \varphi(t + s, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)).$$
- (d) (maximalidade) O domínio  $D$  contém o gráfico de qualquer solução  $x: I \rightarrow X$  do problema de Cauchy em (a), i.e.,  $I \subset D_p$ .
- (e) (diferenciabilidade) A função  $\varphi: D \rightarrow X$  é suave.

*Proof.* Se  $X$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  este teorema é um resultado clássico da teoria das equações diferenciais ordinárias [22].

Vamos agora reduzir o caso geral ao caso em que  $X$  é um aberto.

Para a existência local, alínea (a), fixemos  $p \in X$  e uma carta local  $\psi: W \rightarrow V$ , onde  $W$  é uma vizinhança aberta de  $p$  em  $X$  e  $V$  é uma vizinhança aberta de 0 em  $\mathbb{R}^k$ . Através da mudança de variável  $u = \psi(x)$  a equação  $x' = \xi(x)$  transforma-se na equação equivalente

$$u' = D\psi_x(x') = D\psi_x(\xi(x)) = D\psi_{\psi^{-1}(u)}(\xi(\psi^{-1}(u))) =: \tilde{\xi}(u).$$

O campo de vectores  $\tilde{\xi}(u)$ , definido no aberto  $V$ , diz-se o representante local de  $\xi$  na carta  $\psi$ . O campo  $\tilde{\xi}(u)$  está bem definido porque  $u \in V$  implica que  $\psi^{-1}(u) \in W \subset X$ , pelo que  $\xi(\psi^{-1}(u)) \in T_{\psi^{-1}(u)}X$ , o que por sua vez justifica que a derivada da carta  $\psi$  no ponto  $\psi^{-1}(u)$  segundo o vector  $\xi(\psi^{-1}(u))$  esteja bem definida.

Sendo  $u: I \rightarrow V$  uma solução do problema de Cauchy  $u' = \tilde{\xi}(u)$ ,  $u(t_0) = 0$ , da equivalência entre as equações  $x' = \xi(x)$  e  $u' = \tilde{\xi}(u)$  resulta que a função  $x: I \rightarrow X$ ,  $x(t) = \psi^{-1}(u(t))$ , é uma solução do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(t_0) = p$ .

Do mesmo modo, a unicidade local das soluções da equação  $x' = \xi(x)$  reduz-se àquela da equação  $u' = \tilde{\xi}(u)$ . Para a unicidade global, alínea (b), consideremos duas soluções  $x_1: I_1 \rightarrow X$  e  $x_2: I_2 \rightarrow X$  do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(t_0) = 0$ . Definindo  $J := \{t \in I_1 \cap I_2: x_1(t) = x_2(t)\}$ , como as soluções  $x_i(t)$  são funções contínuas,  $J$  é fechado em  $I_1 \cap I_2$ . Da unicidade local resulta que  $J$  é também aberto. Logo, como  $I_1 \cap I_2$  é um intervalo, por conectividade  $J = I_1 \cap I_2$ , o que prova (b).

Seja agora  $D$  o conjunto dos pontos  $(t, p) \in \mathbb{R} \times X$  tais que existe uma solução  $x: I \rightarrow X$  do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(0) = p$ , num intervalo aberto  $I$  que contém 0 e  $t$ , que usamos para definir o fluxo  $\varphi: D \rightarrow X$ ,



$\varphi(t, p) := x(t)$ . As considerações anteriores mostram que esta aplicação está em definida.

Suponhamos que  $(t_0, x_0) \in D$  e  $(s_0, \varphi(t_0, x_0)) \in D$ .

A função  $x_0(s) := \varphi(s, \varphi(t_0, x_0))$  é uma solução do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(0) = \varphi(t_0, x_0)$ , definida num intervalo aberto  $I$  que contém 0 e  $s_0$ . Assim a função  $x_1(t) := x_0(t - t_0)$  é uma solução de  $x' = \xi(x)$ ,  $x(t_0) = \varphi(t_0, x_0)$ , num intervalo  $J$  que contém os tempos  $t_0$  e  $t_0 + s_0$ . Por outro lado  $x_2(t) = \varphi(t, x_0)$  é uma solução do mesmo problema de Cauchy no intervalo  $D_{x_0}$  que contém 0 e  $t_0$ . Logo  $x_2(t) = x_1(t)$  para todo  $t \in J \cap D_{x_0}$ , e juntando estas duas soluções obtemos uma solução do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , num intervalo que contém 0 e  $t_0 + s_0$ . Provámos assim que  $(t_0 + s_0, x_0) \in D$ . Para concluir (c) temos

$$\varphi(t_0 + s_0, x_0) = x_1(t_0 + s_0) = x_0(s_0) = \varphi(s_0, \varphi(t_0, x_0)).$$

Da existência e unicidade locais, jogando com a propriedade de grupo, resulta que o domínio  $D$  é aberto em  $\mathbb{R} \times X$ .

Na alínea (d) a maximalidade do fluxo  $\varphi$  é uma consequência da definição do seu domínio  $D$ .

Finalmente, a diferenciabilidade do fluxo, alínea (e), sendo uma propriedade local, reduz-se à diferenciabilidade do fluxo do campo  $\xi$  no aberto  $V$ , representante de  $\xi$  na carta  $\psi$ .  $\square$

**Definição 3.2.1.** A função  $\varphi: D \rightarrow X$  cuja existência e unicidade é assegurada no Teorema 3.2.1 diz-se o fluxo máximo do campo de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , e será denotada por  $\varphi_\xi(t, \cdot) = \varphi_\xi^t(\cdot)$ .

**Definição 3.2.2.** Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , o seu suporte é o fecho topológico do conjunto dos pontos onde  $\xi$  não se anula,

$$\text{supp}(\xi) := \overline{\{x \in X : \xi(x) \neq 0\}}.$$

**Definição 3.2.3.** Um campo tangente  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  diz-se completo se o seu fluxo máximo estiver definido em  $\mathbb{R} \times X$ .

**Definição 3.2.4.** Chama-se grupo a um parâmetro de difeomorfismos a uma família de mapas  $\{\varphi^t: X \rightarrow X\}_{t \in \mathbb{R}}$  tal que, quaisquer que sejam  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

- (a)  $\varphi^0 = \text{id}_X$ ;
- (b)  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ ;
- (c)  $\varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}$ .

Um grupo a um parâmetro de difeomorfismos é também chamado de *sistema dinâmico* (invertível) a tempo contínuo. O conjunto  $X$  diz-se o *espaço de estados*, ou o *espaço de fases*, do sistema dinâmico. Dado  $x \in X$ , o conjunto  $\mathcal{O}(x) := \{\varphi^t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  diz-se uma *órbita* do sistema. As órbitas do sistema particionam o espaço de fases  $X$ . Chama-se *retrato de fases* a uma representação gráfica desta partição do espaço de fases em órbitas.

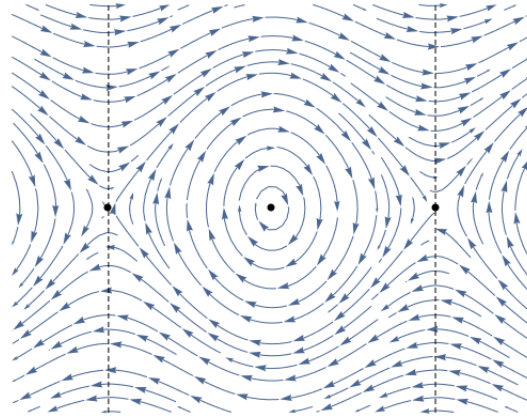


Figure 3.3: Retrato de fases do campo  $\xi(x, y) := (y, -\sin x)$ .

O fluxo máximo dum campo completo  $\xi$  determina o grupo a um parâmetro de difeomorfismos  $\varphi_\xi^t := \varphi(t, \cdot) : X \rightarrow X$ .

A Figura 3.3 é o retrato de fases do fluxo (máximo) do campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\xi(x, y) := (y, -\sin x)$ . Sendo periódico, com período  $2\pi$  na variável  $x$ , a aplicação  $\xi(x, y)$  determina um campo de vectores no cilindro  $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  cujo fluxo  $\varphi_\xi^t$  é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de  $C$ . As linhas verticais na Figura 3.3 (a tracejado) são identificadas no cilindro  $C$ .

**Teorema 3.2.2.** Todo o campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  com suporte compacto é completo. Em particular  $\xi$  determina um grupo a um parâmetro de difeomorfismos  $\varphi_\xi^t : X \rightarrow X$ .

*Proof.* Seja  $\varphi : D \rightarrow X$  o fluxo máximo do campo  $\xi$ . Pela compacidade do suporte de  $\xi$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $[-\epsilon, \epsilon] \times X \subseteq D$ .

Por indução, obtemos  $[-n\epsilon, n\epsilon] \times X \subseteq D$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com efeito, supondo que  $[-n\epsilon, n\epsilon] \times X \subseteq D$ , cada elemento de  $[-(n+1)\epsilon, (n+1)\epsilon]$  pode ser escrito na forma  $nt + s$  com  $t, s \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Dado  $x \in X$ , por hipótese de indução  $(nt, x) \in D$  e  $(s, \varphi^t(x)) \in D$ . Logo, pela propriedade de grupo do fluxo máximo,  $(nt + s, x) \in D$ , o que mostra que  $[-(n+1)\epsilon, (n+1)\epsilon] \times X \subseteq D$ . Logo  $D = \mathbb{R} \times X$ , pelo que  $\xi$  é completo.  $\square$

### 3.3 Conjugação entre campos

Vamos agora introduzir uma noção natural de equivalência entre campos de vectores.

**Definição 3.3.1.** Dado um difeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades  $X$  e  $Y$ , e um campo de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , chama-se push-forward de  $\xi$  ao campo de vectores  $\eta = f_*\xi \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  definido por  $\eta(x) := Df_{f^{-1}(x)}\xi(f^{-1}(x))$ . O difeomorfismo  $f$  diz-se uma conjugação entre os campos  $\xi$  e  $\eta$ .

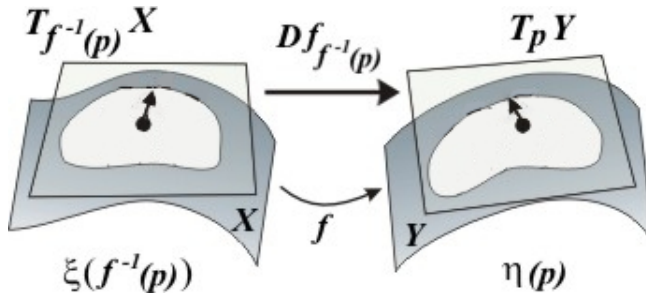


Figure 3.4: Push-forward de um campo de vectores

**Definição 3.3.2.** Dois campos  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  dizem-se conjugados se existir um difeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $\eta = f_*\xi$ .

Da proposição seguinte resulta que esta é uma relação de equivalência.

**Proposição 3.3.1.** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  difeomorfismos. Dado um campo tangente  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ ,  $(g \circ f)_*\xi = g_*(f_*\xi)$ .

*Proof.* Exercício 3.4. □

**Proposição 3.3.2.** Dados campos conjugados  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  e uma conjugação  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $\eta = f_*\xi$ , os fluxos máximos  $\varphi_\xi : D_\xi \rightarrow X$  e  $\varphi_\eta : D_\eta \rightarrow Y$  dos campos  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente, estão relacionados por

$$\varphi_\eta(t, f(x)) = f(\varphi_\xi(t, x)), \quad (3.3)$$

sendo que

$$(t, f(x)) \in D_\eta \Leftrightarrow (t, x) \in D_\xi.$$

*Proof.* Basta ver que uma função diferenciável  $x : I \rightarrow X$  é solução do problema de Cauchy  $x' = \xi(x)$ ,  $x(0) = p$  se e somente se  $y = f \circ x : I \rightarrow Y$  for solução do problema de Cauchy  $y' = \eta(y)$ ,  $y(0) = f(p)$ .

Supondo que  $x(t)$  é solução de  $x' = \xi(x)$  temos

$$\begin{aligned} y'(t) &= (f \circ x)'(t) = Df_{x(t)}(x'(t)) = Df_{x(t)}(\xi(x(t))) \\ &= Df_{f^{-1}(y(t))}(\xi(f^{-1}(y(t)))) = \eta(y(t)), \end{aligned}$$

pelo que  $y(t) = f(x(t))$  é solução de  $y' = \eta(y)$ . A implicação recíproca reduz-se a esta porque  $\xi = (f^{-1})_*\eta$ .  $\square$

Se  $X$  e  $Y$  forem variedades compactas, os campos  $\xi$  e  $\eta$  são completos e a relação (3.3) equivale a dizer que

$$\varphi_\eta^t \circ f = f \circ \varphi_\xi^t \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Esta igualdade mostra que a conjugação  $f: X \rightarrow Y$  transforma órbitas do campo  $\xi$  em órbitas do campo  $\eta$ . O conceito de conjugação corresponde à noção natural de ‘isomorfismo’ entre os sistemas dinâmicos a tempo contínuo determinados pelos campos  $\xi$  e  $\eta$ .

Poderíamos tentar dizer que um campo de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  é *estável* quando a sua classe de equivalência seja um conjunto aberto em  $\mathcal{X}^\infty(X)$ , mas este conceito fica trivial: nenhum campo de vectores (numa variedade compacta) que tenha uma singularidade é estável neste sentido. Definimos a seguir uma noção mais fraca de estabilidade baseada no seguinte conceito:

**Definição 3.3.3.** *Dois campos  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  dizem-se topologicamente conjugados se existir um homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $(t, f(x)) \in D_\eta$  sse  $(t, x) \in D_\xi$ , e além disso*

$$\varphi_\eta(t, f(x)) = f(\varphi_\xi(t, x)) \quad \forall (t, x) \in D_\xi.$$

Tal como anteriormente a relação de conjugação topológica é uma relação de equivalência.

Um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  numa variedade compacta  $X$  diz-se  *$C^r$ -estruturalmente estável* ( $r \geq 1$ ) se a sua classe de conjugação topológica for aberta no espaço de Banach  $\mathcal{X}^r(X)$  dos campos de vectores de classe  $C^r$  em  $X$ . A teoria hiperbólica (dos sistemas dinâmicos) caracteriza o conjunto aberto formado pelos campos de vectores estruturalmente estáveis numa variedade compacta.

### 3.4 Conjugação local entre campos

Introduzimos agora a versão local do conceito de equivalência por conjugação entre campos de vectores.

**Definição 3.4.1.** Dados campos de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  e pontos  $p \in X$ ,  $q \in Y$ , dizemos  $\xi$  e  $\eta$  são localmente conjugados nos pontos  $p$  e  $q$ , e escrevemos  $(\xi, p) \simeq (\eta, q)$  se existir um difeomorfismo local  $\phi: (X, p) \simeq (Y, q)$  tal que  $\phi_*\xi = \eta$  numa vizinhança de  $q$ .

**Definição 3.4.2.** Se  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\psi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  for uma carta local da variedade  $X$  então o campo de vectores  $\tilde{\xi} = \psi_*\xi$  diz-se o representante local de  $\xi$  na carta  $\psi$ .

Este conceito de representante local dum campo  $\xi$  numa carta  $\psi$  foi usado na prova do Teorema 3.2.1.

**Definição 3.4.3.** Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ . Chama-se ponto regular de  $\xi$  a um ponto  $p \in X$  tal que  $\xi(p) \neq 0$ . Chama-se singularidade de  $\xi$  a um ponto  $p \in X$  tal que  $\xi(p) = 0$ .

À volta dum ponto regular, o retrato de fases dum campo de vectores é essencialmente sempre o mesmo.

**Proposição 3.4.1.** Seja  $\eta$  o campo constante  $\eta \equiv (1, 0, \dots, 0)$  em  $\mathbb{R}^k$ . Se  $p \in X^k$  é um ponto regular do campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X^k)$  então  $(\xi, p) \simeq (\eta, 0)$ .

*Proof.* Exercício 3.2. □

As figuras seguintes ilustram como em torno de singularidades os retratos de fases de dois campos de vectores podem ser radicalmente distintos.

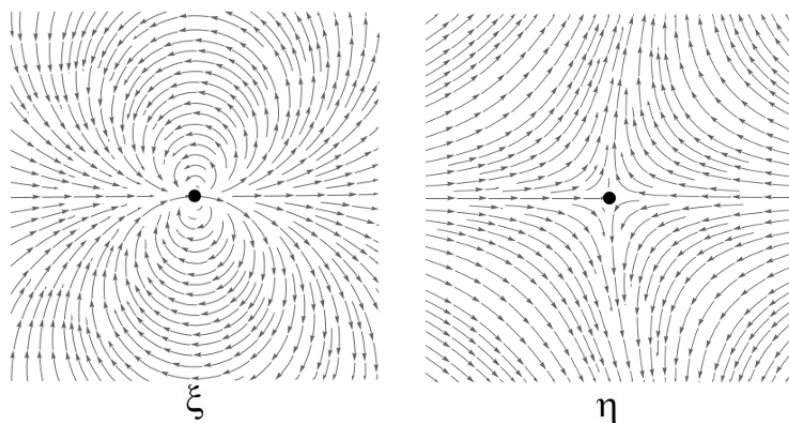


Figure 3.5: Dois campos de vectores não lineares em  $\mathbb{R}^2$  com singularidades na origem:  $\xi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  e  $\eta(x, y) = (-x + y^2/8, y)$  que não são localmente conjugados

Perto duma singularidade  $p \in X$  todo o campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  é aproximadamente linear. Dada uma carta local  $\phi: (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ , o representante  $\tilde{\xi} = \phi_*\xi$  tem uma singularidade na origem que satisfaz

$$\tilde{\xi}(x) = Ax + o(\|x\|) \quad (x \rightarrow 0),$$

onde  $A = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}(0)$  é a matriz Jacobiana de  $\tilde{\xi}$ .

**Definição 3.4.4.**  $A = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}(0)$  diz-se a matriz Jacobiana de  $(\xi, p)$  na carta  $\phi$ .

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade e  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo de vectores.

**Proposição 3.4.2.** Se  $p \in X$  é uma singularidade de  $\xi$  então a derivada  $D\xi_p: T_pX \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\xi$  em  $p$  satisfaz  $D\xi_p(T_pX) \subseteq T_pX$ .

*Proof.* Exercício 3.3. □

**Proposição 3.4.3.** Sejam  $p \in X$  uma singularidade de  $\xi$  e  $\phi: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  uma parametrização local de  $(X, p)$ . Então a matriz Jacobiana de  $(\xi, p)$  na carta  $\phi^{-1}$  representa o endomorfismo linear  $D\xi_p: T_pX \rightarrow T_pX$  na base  $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(p)\}$ . Em particular todas as matrizes Jacobianas de  $\xi$  são conjugadas entre si.

*Proof.* Dada uma parametrização local  $\phi: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  vamos mostrar que sendo  $\tilde{\xi} = (\phi^{-1})_*\xi$  o correspondente representante local de  $\xi$ , o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} T_pX & \xrightarrow{D\xi_p} & T_pX \\ D\phi_0 \uparrow & & \uparrow D\phi_0 \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{D\tilde{\xi}_0} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

donde segue que a matriz Jacobiana  $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}(0)$  representa o endomorfismo  $D\xi_p$  na base indicada.

Como  $\xi = \phi_*\tilde{\xi}$ , temos para todo  $x$  numa vizinhança de 0 em  $\mathbb{R}^k$

$$D\phi_x\tilde{\xi}(x) = \xi(\phi(x)).$$

Derivando esta relação segundo um vector  $v \in \mathbb{R}^k$

$$D^2\phi_x(v, \tilde{\xi}(x)) + D\phi_x D\tilde{\xi}_x(v) = D\xi_{\phi(x)} D\phi_x(v),$$

e em  $x = 0$  obtemos  $D\phi_0 \circ D\tilde{\xi}_0 = D\xi_p \circ D\phi_0$ , porque  $\tilde{\xi}(0) = 0$  e  $\phi(0) = p$ . □

Olhemos agora para o caso dos campos lineares. Seja  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  o espaço vectorial das matrizes  $A$  de dimensão  $n \times n$  com coeficientes reais. Cada

matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  define o campo linear  $\xi_A \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\xi_A(x) := Ax$ . Dada uma matriz invertível  $M$ , seja  $T_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o isomorfismo linear  $T_M(x) = Mx$ . O push-forward do campo  $\xi_A$  pelo mapa  $T_M$  é outro campo linear  $\xi_B$ , associado à matriz  $B = MAM^{-1}$ . Note que  $D(T_M)_x(v) = Mv$ , e  $(T_M)^{-1}(x) = M^{-1}x$ . Recorde ainda que duas matrizes  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  se dizem *conjugadas* se existir uma matriz invertível  $M$  tal que  $B = MAM^{-1}$ . Matrizes conjugadas têm sempre o mesmo determinante, o mesmo traço, os mesmos valores próprios e as mesmas dimensões dos subespaços próprios correspondentes.

**Proposição 3.4.4.** Dois campos lineares  $\xi_A$  e  $\xi_B$  em  $\mathbb{R}^n$  são localmente conjugados (na origem) enquanto campos de vectores sse as matrizes  $A$  e  $B$  forem conjugadas.

*Proof.* Se  $B = MAM^{-1}$  então  $\xi_B = (T_M)_*\xi_A$  mostra que  $\xi_A$  e  $\xi_B$  são conjugados como campos de vectores. Reciprocamente, se  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo tal que  $\xi_B = \phi_*\xi_A$ , considerando a matriz Jacobiana de  $\phi$  na origem,  $M = \frac{\partial\phi}{\partial x}(0)$ , vale a relação  $B = MAM^{-1}$ .  $\square$

A proposição anterior mostra que a classificação por conjugação dos campos lineares é equivalente à classificação das matrizes em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  pela relação de conjugação, que é feita via teoria espectral das matrizes. As *formas normais de Jordan* são os representantes canónicos das classes de conjugação em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  (ver Apêndice 14.2).

Dada uma matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , o fluxo do campo linear  $\xi_A$  é dado pela exponencial de  $A$ ,  $\varphi_A^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_A^t(x) = e^{tA}x$ .

O comportamento qualitativo do fluxo  $\varphi_A^t$  depende dos sinais das partes reais dos valores próprios de  $A$ . Por exemplo, se  $v = x + iy \in \mathbb{C}^n$ , com  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda \in \mathbb{C}$ , i.e., se  $Av = \lambda v$ , então

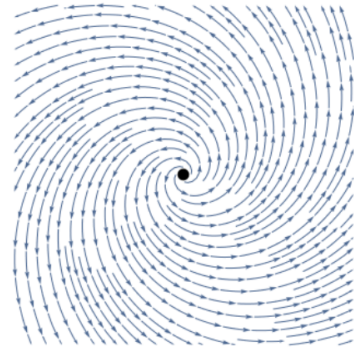
$$\max\{\|e^{tA}x\|, \|e^{tA}y\|\} \leq \|e^{tA}v\| = \|e^{t\lambda}v\| = |e^{t\lambda}|\|v\| = e^{t\text{Re}\lambda} \|v\|.$$

Logo,

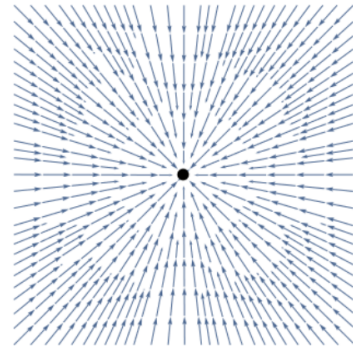
$$\begin{aligned} \text{Re}\lambda < 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_A^t(x) = 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_A^t(y) = 0, \\ \text{Re}\lambda > 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_A^t(x) = 0, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_A^t(y) = 0. \end{aligned}$$

Estas conclusões estendem-se aos vectores próprios generalizados (Apêndice 14.2).

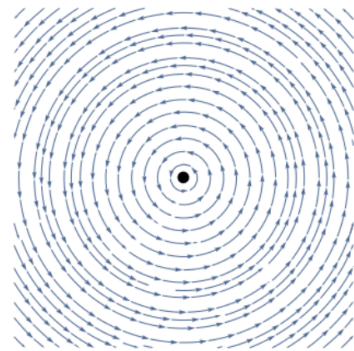
A Figura 3.6 apresenta alguns retratos de fase de fluxos lineares em  $\mathbb{R}^2$ . Os sinais da parte real dos valores próprios da matriz determinam o comportamento qualitativo das órbitas do campo linear.



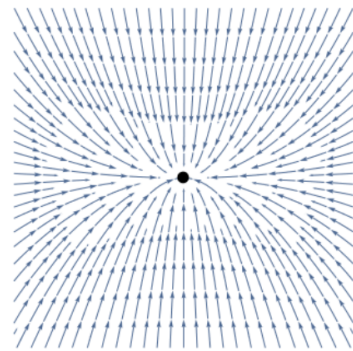
$$\lambda = \alpha \pm i\beta \quad \operatorname{Re}\lambda = \alpha > 0$$



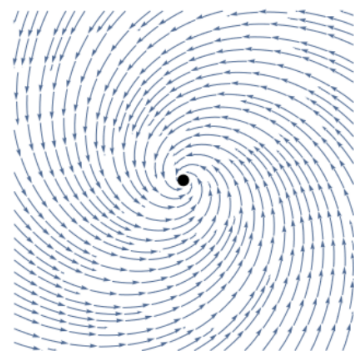
$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$



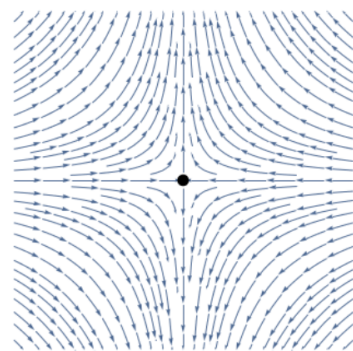
$$\lambda = \pm i\beta \quad \operatorname{Re}\lambda = 0$$



$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$



$$\lambda = \alpha \pm i\beta \quad \operatorname{Re}\lambda = \alpha < 0$$



$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Figure 3.6: Fluxos lineares em  $\mathbb{R}^2$



**Definição 3.4.5.** Uma matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  diz-se hiperbólica se todo o valor próprio  $\lambda \in \text{spec}(A)$  satisfizer  $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ .

O conjunto das matrizes hiperbólicas

$$\mathcal{H}_n := \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) : A \text{ é hiperbólica}\}$$

é grande tanto no sentido topológico como no sentido de teoria da medida.

**Proposição 3.4.5.** O conjunto  $\mathcal{H}_n$  é aberto e denso em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  e tem medida de Lebesgue total no espaço  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .

*Proof.* O conjunto  $\mathcal{H}_n$  é aberto e denso [9, Proposição 2.11]. Por outro lado o complementar  $\mathcal{N} := \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_n$  é a projecção em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  do seguinte conjunto algébrico

$$\tilde{\mathcal{N}} := \{(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \text{Mat}_n(\mathbb{R}) : \det(A - \lambda I) = 0 \text{ e } \text{Re}(\lambda) = 0\}.$$

Pelo Teorema de Tarski-Seidenberg [1, Theorem 2.3.4], o conjunto  $\mathcal{N}$  é semialgébrico. Como  $\mathcal{N}$  é um conjunto fechado com interior vazio,  $\mathcal{N}$  está contido numa variedade algébrica de co-dimensão positiva. Logo  $\mathcal{N}$  tem medida de Lebesgue nula.  $\square$

Designando por  $E^s = E^s(A)$ , resp.  $E^u = E^u(A)$ , a soma de todos os subespaços próprios generalizados (reais) associados a valores próprios com parte real negativa, resp. positiva, a decomposição em soma directa  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$  é invariante pela matriz  $A$  no sentido que  $A E^s = E^s$  e  $A E^u = E^u$ . Segue que ela é também invariante pelo fluxo do campo  $\xi_A$ , i.e.,  $\varphi_A^t(E^s) = E^s$  e  $\varphi_A^t(E^u) = E^u$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso valem as igualdades

$$\begin{aligned} E^s(A) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_A^t(x) = 0\}, \\ E^u(A) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_A^t(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Em dimensão dois, quando a matriz tem dois valores próprios de sinais contrários os espaços invariantes  $E^s$  e  $E^u$  têm dimensão um e a órbita de qualquer ponto fora dos eixos  $E^s$  e  $E^u$  é uma hipérbole (imagem à esquerda na figura 3.7).

Chama-se *índice de estabilidade* duma matriz hiperbólica  $A$  à dimensão

$$\text{ind}(A) = \dim E^s(A)$$

que coincide com o número de valores próprios com parte real negativa, contados com multiplicidade.

**Proposição 3.4.6.** Dadas  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  hiperbólicas, o campo  $\xi_A$  é topologicamente conjugado a  $\xi_B$  se e somente se  $\text{ind}(A) = \text{ind}(B)$ .

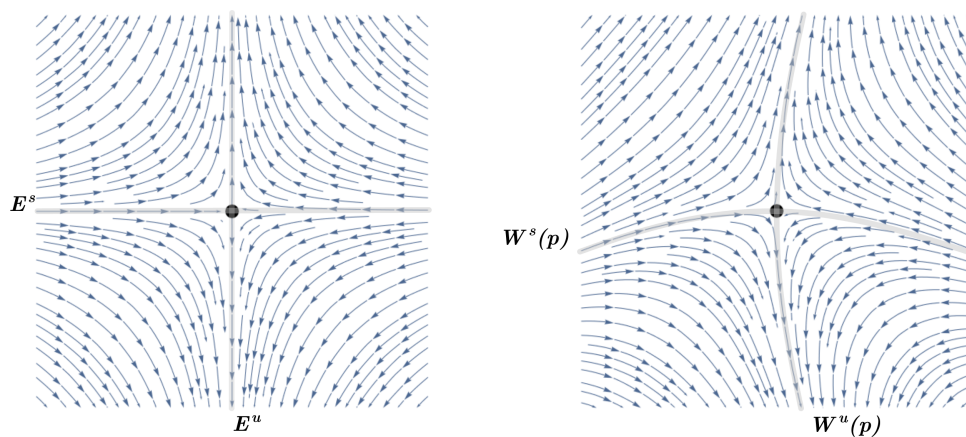


Figure 3.7: Singularidades hiperbólicas

*Proof.* Ver [9, Proposição 5.4]. □

Uma singularidade  $p \in X$  dum campo de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  diz-se  $C^r$ -linearizável ( $r \geq 1$ ) se existir uma conjugação local  $f : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  de classe  $C^r$  entre o campo  $\xi$  numa vizinhança de  $p$  e o campo linear  $\xi_A$  numa vizinhança de 0, onde  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz que representa  $D\xi : T_p X \rightarrow T_p X$  numa certa base. Quando  $r = 0$ , esta relação de conjugação local corresponde a dizer que

$$f(\varphi_\xi(t, x)) = e^{tA} f(x)$$

para todo o  $x$  numa vizinhança de  $p$  em  $X$  e todo  $t$  perto de 0.

Uma singularidade  $p \in X$  dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  diz-se *hiperbólica* se uma (qualquer) matriz Jacobiana  $A$  de  $D\xi : T_p X \rightarrow T_p X$  for hiperbólica.

**Teorema 3.4.1** (Hartman-Grobman). Toda a singularidade hiperbólica dum campo de vectores é  $C^0$ -linearizável.

*Proof.* Ver [22, Teorema 4]. □

Da Proposição 3.4.6 e do Teorema 3.4.1 obtém-se facilmente o seguinte:

**Corolário 3.4.1.** Toda a singularidade hiperbólica dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  é localmente  $C^0$ -estruturalmente estável.

O teorema seguinte descreve a geometria à volta de uma singularidade hiperbólica. Ver Figura 3.7.

**Teorema 3.4.2** (da variedade estável e instável). Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo com uma singularidade hiperbólica no ponto  $p \in X$ . Então os conjuntos

$$W^s(p) := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\xi^t(x) = p\}$$

$$W^u(p) := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_\xi^t(x) = p\}$$

são subvariedades de  $X$  tais que  $T_p W^s(x) = E^s$  e  $T_p W^u(x) = E^u$ , onde  $T_p X = E^s \oplus E^u$  representa a decomposição hiperbólica de  $D\xi_p: T_p X \rightarrow T_p X$ .

*Proof.* Ver [9, Teorema 6.2]. □

O teorema seguinte mostra como a parte linear dum campo classifica, genericamente, as singularidades hiperbólicas.

**Teorema 3.4.3** (Poincaré-Sternberg). Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo com uma singularidade hiperbólica no ponto  $p \in X$ . Se o espectro desta singularidade  $\text{spec}(D\xi_p) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  satisfizer as seguintes condições de não ressonância

$$\lambda_i \neq \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$$

quaisquer que sejam os inteiros  $m_1, \dots, m_n \geq 0$  com  $m_1 + \dots + m_n \geq 2$ , então a singularidade  $p$  do campo  $\xi$  é  $C^\infty$ -linearizável.

Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $p \in X$  tal que  $\xi(p) = 0$ . Dizemos que a singularidade  $p$  é *não degenerada* se  $\det(D\xi_p) \neq 0$ . Dizemos que a singularidade  $p$  é *isolada* se existir uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  em  $X$  tal que  $\xi(x) \neq 0$  para todo  $x \in U \setminus \{p\}$ .

**Proposição 3.4.7.** Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , toda a singularidade não degenerada de  $\xi$  é isolada.

*Proof.* Seja  $p \in X$  uma singularidade do campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ . Seja  $\tilde{\xi} = \phi_* \xi$  o representante de  $\xi$  numa carta  $\phi: (X^k, p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Se  $\det(D\xi_p) = \det(D\tilde{\xi}_0) \neq 0$  então, pelo Teorema da função inversa,  $\tilde{\xi}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo local. Logo  $\tilde{\xi}(0) = 0$  é uma singularidade isolada de  $\tilde{\xi}$ , o que implica que  $p$  seja uma singularidade isolada de  $\xi$ . □

A recíproca da proposição anterior é falsa. O campo  $\xi$  na Figura 3.5 à esquerda tem uma singularidade isolada e degenerada na origem.

### 3.5 Campos escalares

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave numa variedade  $X$ .

**Definição 3.5.1.** Chama-se gradiente de  $f$  no ponto  $p \in X$  ao único vector  $\nabla f(p) \in T_p X$  tal que para todo  $v \in T_p X$ ,

$$v \cdot \nabla f(p) = Df_p(v).$$

Chama-se *espaço Euclideano* a um espaço vectorial real  $V$  munido de um producto interno. Todo o espaço tangente  $V = T_p X$  a uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um espaço Euclideano quando munido do produto interno induzido pelo produto canónico em  $\mathbb{R}^n$ . A definição anterior justifica-se pelo seguinte facto de Geometria Euclideana.

**Proposição 3.5.1.** Seja  $V$  um espaço Euclideano. Dada uma forma linear  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$  existe um único vector  $u \in V$  tal que para todo  $v \in V$ ,  $\lambda(v) = u \cdot v$ .

*Proof.* Exercício 3.8. □

**Proposição 3.5.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Se  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for uma extensão suave de  $f : X \cap U \rightarrow \mathbb{R}$  então para todo  $x \in U \cap X$ ,

$$\nabla f(x) = P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x)) = (\nabla \tilde{f}(x))^T.$$

Em particular  $\nabla f \in \mathcal{X}^\infty(X)$ .

*Proof.* Dados  $x \in U \cap X$  e  $v \in T_x X$  temos

$$v \cdot \nabla f(x) = Df_x(v) = D\tilde{f}_x(v) = v \cdot \nabla \tilde{f}(x) = v \cdot P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x))$$

a última igualdade porque

$$\nabla \tilde{f}(x) - P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x)) = P_{(T_x X)^\perp}(\nabla \tilde{f}(x)) \in (T_x X)^\perp.$$

Logo  $\nabla f(x) = P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x))$ . Como  $\tilde{f}$  é de classe  $C^\infty$  o mesmo acontece com o gradiente  $\nabla \tilde{f}$ , e pelo Teorema 3.1.1 segue que  $\nabla f = (\nabla \tilde{f})^T$  é um campo de vectores suave. □

### 3.6 Formas quadráticas

Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e suponhamos que 0 é um ponto crítico de  $f$ . O desenvolvimento de Taylor de segunda ordem de  $f$  em 0 permite-nos compreender a geometria do gráfico de  $f$  em torno da origem. Quando  $x \rightarrow 0$  temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \underbrace{Df_0(x)}_{=0} + \frac{1}{2!} D^2 f_0(x, x) + o(\|x\|^2) \\ &= f(0) + \frac{1}{2} D^2 f_0(x, x) + o(\|x\|^2) \\ &= f(0) + \frac{1}{2} x^T A x + o(\|x\|^2) \end{aligned}$$

onde  $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right]$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) representa a matriz Hessiana de  $f$  no ponto 0. A matriz Hessiana  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$  é sempre uma matriz simétrica e a expressão quadrática que lhe está associada neste desenvolvimento diz-se uma forma quadrática.

Mais precisamente, chama-se *forma quadrática* a qualquer polinómio homogéneo de 2º grau  $P(x)$  nas variáveis  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Designamos por  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  o espaço linear das formas quadráticas e por

$$\text{Mat}_n^S := \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) : A^T = A\}$$

o espaço das matrizes simétricas.

Cada matriz simétrica  $A \in \text{Mat}_n^S$  define a forma quadrática  $Q_A(x) := x^T A x$ . Além disso a correspondência  $\Phi: \text{Mat}_n^S \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Phi(A) := Q_A$ , é isomorfismo (Exercício 3.11). Qualquer que seja  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,  $A$  e  $S = (A + A^T)/2$  definem a mesma forma quadrática  $Q_A$ , sendo  $S$  a única matriz simétrica que define  $Q_A$  (Exercício 3.10). É habitual identificar a forma quadrática  $Q_A$  com a única matriz simétrica  $A$  que a define.

Dada uma matriz invertível  $M$ , a composição da forma quadrática  $Q_A$  com o automorfismo linear  $T_M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T_M(x) := Mx$ , é outra forma quadrática  $Q_B$ , associada à matriz  $B = M^T A M$ .

$$Q_A \circ T_M(x) = Q_A(Mx) = (Mx)^T A (Mx) = x^T (M^T A M) x = Q_B(x).$$

**Definição 3.6.1.** *Duas matrizes  $A, B \in \text{Mat}_n^S$  dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível  $M$  tal que  $B = M^T A M$ , ou seja, tal que  $Q_B = Q_A \circ T_M$ . Neste caso diremos também que as formas quadráticas  $Q_B$  e  $Q_A$  são semelhantes.*

Chama-se *nulidade* duma forma quadrática  $Q = Q_A$  à dimensão do núcleo da matriz  $A$ . A nulidade de  $Q$  será denotada por  $\text{nul}(Q)$ . Uma

forma quadrática  $Q(x)$  diz-se *definida positiva* se  $Q(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Analogamente,  $Q(x)$  diz-se *definida negativa* se  $Q(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Observe que  $Q(x)$  é definida positiva ou definida negativa consoante 0 é um mínimo estrito, respectivamente um máximo estrito, da função  $Q(x)$ . Chama-se *índice* duma forma quadrática  $Q(x)$  ao maior inteiro  $k = 0, 1, \dots, n$  para o qual existe um subespaço linear  $S \subset \mathbb{R}^n$  de dimensão  $k$  tal que a restrição de  $Q(x)$  a  $S$  é definida negativa. Denotaremos por  $\text{ind}(Q)$  o índice da forma quadrática  $Q$ . Resulta desta definição que uma forma quadrática  $Q(x)$  é definida positiva sse  $\text{nul}(Q) = \text{ind}(Q) = 0$ , enquanto  $Q(x)$  é definida negativa sse  $\text{nul}(Q) = 0$  e  $\text{ind}(Q) = n$ . Uma forma quadrática  $Q(x)$  diz-se *não degenerada* se  $\text{nul}(Q) = 0$ .

**Proposição 3.6.1.** Se  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  são formas quadráticas semelhantes então  $\text{nul}(Q_1) = \text{nul}(Q_2)$  e  $\text{ind}(Q_1) = \text{ind}(Q_2)$ .

*Proof.* Sejam  $Q_A$  e  $Q_B$  duas formas quadráticas com  $A, B \in \text{Mat}_n^S(\mathbb{R})$ . Supondo que elas são semelhantes existe  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  invertível tal que  $B = M^T A M$ . Então  $Bx = 0$  sse  $AMx = 0$ , donde resulta que  $M \text{Nuc}(B) = \text{Nuc}(A)$ . Logo,

$$\text{nul}(Q_B) = \dim(\text{Nuc}(B)) = \dim(M \text{Nuc}(B)) = \dim(\text{Nuc}(A)) = \text{nul}(Q_A).$$

Como  $Q_B(x) = Q_A(Mx)$ , dado um subespaço linear  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Q_B(x)$  é definida negativa em  $S$  sse  $Q_A(x)$  é definida negativa em  $MS$ . Logo, como  $M$  é invertível,  $\dim(S) = \dim(M \cdot S)$ . Segue que  $\text{ind}(Q_A) = \text{ind}(Q_B)$ .  $\square$

Uma forma quadrática  $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  diz-se *diagonal* se existir uma matriz diagonal  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  tal que para cada  $x \in \mathbb{R}^n$

$$Q(x) = Q_D(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2.$$

Uma matriz  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  diz-se *ortogonal* se  $M^T M = I$ . Uma matriz  $M$  é ortogonal sse as linhas (resp. colunas) de  $M$  formarem uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $M$  é ortogonal o automorfismo  $T_M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma isometria.

**Teorema 3.6.1.** Dada uma forma quadrática  $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  existe uma matriz ortogonal  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  tal que a forma  $Q \circ T_M$  é diagonal.

*Proof.* Seja  $A \in \text{Mat}_n^S(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica tal que  $Q = Q_A$ . Por simetria a matriz  $A$  tem  $n$  valores próprios reais  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  e admite uma base ortonormada de vectores próprios  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  tais que  $A u_i = \lambda_i u_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Designando por  $M$  a matriz ortogonal cujas colunas são os vectores  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tem-se

$$\begin{aligned} Q_A(Mx) &= Q_A\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right)^T A \left(\sum_{j=1}^n x_j u_j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i^T\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j A u_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i^T\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j u_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j u_i^T u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.6.1.** Seja  $Q_A(x)$  uma forma quadrática associada a uma matriz  $A \in \text{Mat}_n^S$  com valores próprios  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  repetidos de acordo com a sua multiplicidade. Então

$$\begin{aligned} \text{nul}(Q_A) &= \#\{1 \leq j \leq n : \lambda_j = 0\} \\ \text{ind}(Q_A) &= \#\{1 \leq j \leq n : \lambda_j < 0\} \end{aligned}$$

*Proof.* Seja  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormada de vectores próprios de  $A$  associada à sequência de valores próprios dada. Consideremos a decomposição em soma directa  $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ , onde  $E^-$ ,  $E^0$  e  $E^+$  são os subespaços gerados pelos vectores próprios  $u_i$  tais que  $\lambda_i < 0$ ,  $\lambda_i = 0$ , e  $\lambda_i > 0$ , respectivamente. É claro que  $E^0 = \text{Nuc}(A)$ , pelo que  $\dim(E^0) = \text{nul}(Q_A)$ . A forma quadrática  $Q_A$  é definida negativa sobre  $E^-$ , pelo que  $\dim(E^-) \leq \text{ind}(Q_A)$ . Reciprocamente, dado um subespaço  $S \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $Q_A$  é definida negativa sobre  $S$ , temos  $S \cap (E^0 \oplus E^+) = \{0\}$ , pelo que  $\dim(S) \leq \dim(E^-)$ . Como  $S$  é arbitrário vem  $\text{ind}(Q_A) \leq \dim(E^-)$ . Logo,  $\dim(E^-) = \text{ind}(Q_A)$ . □

Seja  $Q_k^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a forma quadrática modelo

$$Q_k^n(x_1, \dots, x_n) = -(x_1)^2 - \dots - (x_k)^2 + (x_{k+1})^2 + \dots + (x_n)^2.$$

que satisfaz  $\text{nul}(Q_k^n) = 0$  e  $\text{ind}(Q_k^n) = k$ .

**Corolário 3.6.2** (Teorema Fundamental das Formas Quadráticas). Toda a forma quadrática  $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  com índice  $k$  e nulidade 0 é semelhante à forma quadrática modelo  $Q_k^n$ .

*Proof.* Pelo Teorema fundamental das formas quadráticas,  $Q_A$  é semelhante a uma forma diagonal  $Q_D$  com  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , onde  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  são os valores próprios de  $A$ . Como  $\text{nul}(Q_A) = 0$  todos estes valores próprios são diferentes de 0. Seja para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\epsilon_i = \text{sgn}(\lambda_i) \in \{-1, +1\}$ . Se  $A$  tem índice  $k$ , então a matriz diagonal  $E = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ , define a forma quadrática  $Q_k^n(x)$ . Como a matriz diagonal  $D$  admite a seguinte decomposição

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_n|} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \epsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_n|} \end{bmatrix}$$

as formas  $Q_A$ ,  $Q_D$  e  $Q_E = Q_k^n$  são semelhantes entre si.  $\square$

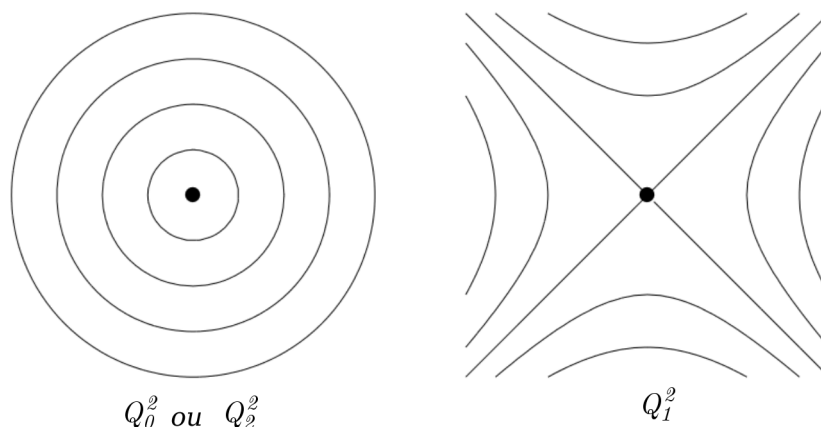


Figure 3.8: Curvas de nível das formas quadráticas  $Q_k^2$  em  $\mathbb{R}^2$

### 3.7 Representação local duma função num ponto crítico

Duas funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  dizem-se *semelhantes* se existe um difeomorfismo  $\phi : X \rightarrow Y$  e uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $f = c + g \circ \phi$ .

Vamos dizer que  $f : (X, p) \rightarrow (\mathbb{R}, r)$  e  $g : (Y, q) \rightarrow (\mathbb{R}, s)$  são *localmente semelhantes* se existe um difeomorfismo local  $\phi : (X, p) \simeq (Y, q)$  tal que  $f = r - s + g \circ \phi$ .



3.7. REPRESENTAÇÃO LOCAL DUMA FUNÇÃO NUM PONTO CRÍTICO 55

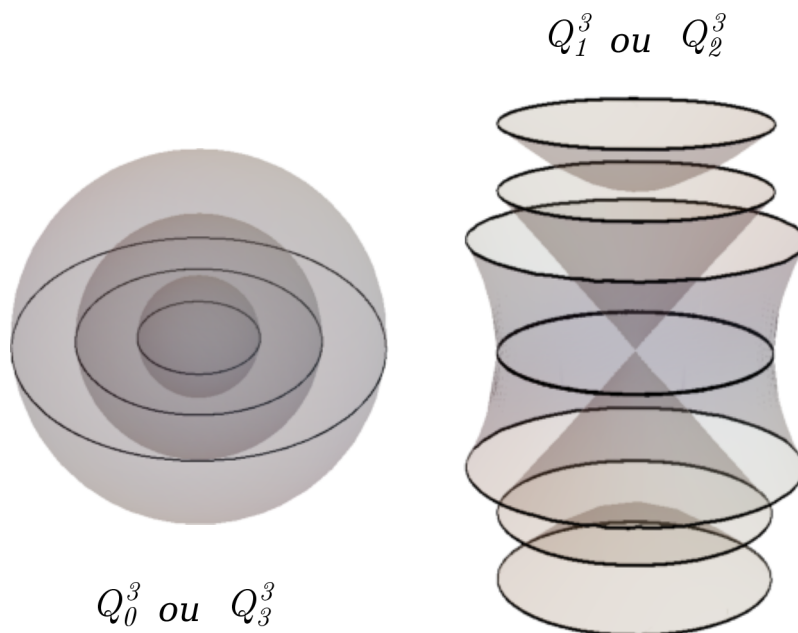


Figure 3.9: Superfícies de nível das formas quadráticas  $Q_k^3$  em  $\mathbb{R}^3$

Dada uma parametrização local  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \simeq (X, p)$  a função  $\tilde{f}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ , definida por  $\tilde{f} = -f(p) + f(\phi(x))$ , diz-se um *representante local* de  $f$  na carta  $\phi^{-1}$  de  $X$ . A matriz  $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(0)$  diz-se a *Hessiana* de  $f$  no ponto  $p$  relativa à carta  $\phi^{-1}$ .

**Proposição 3.7.1.** Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in X$  um ponto crítico de  $f$ . Todas as Hessianas de  $f$  em  $p$  relativas a diferentes cartas locais são semelhantes entre si.

*Proof.* Se  $g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  e  $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  são representantes locais duma função  $f: (X, p) \simeq (\mathbb{R}, c)$ , então são localmente semelhantes entre si. Seja  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo local tal que  $g = h \circ \phi$ . Derivando uma vez obtemos

$$Dg_x(u) = Dh_{\phi(x)}(D\phi_x(u)).$$

Derivando a segunda vez em  $x = 0$ , e usando que  $Dh_0 = 0$ ,

$$D^2g_0(u, u) = D^2h_0(D\phi_0(u), D\phi_0(u)) + \underbrace{Dh_0}_{=0}(D^2\phi_0(u, u)).$$

Temos então

$$D^2g_0(u, u) = D^2h_0(D\phi_0(u), D\phi_0(u))$$

Em termos das matrizes Hessianas, esta relação é equivalente a

$$u^T \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) u = (Mu)^T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0) (Mu)$$

onde  $M = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0)$ . Logo  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) = M^T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0) M$ .  $\square$

Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in X$  um ponto crítico de  $f$ .

**Definição 3.7.1.** Chama-se nulidade de  $f$  em  $p$  à nulidade de qualquer matriz Hessiana de  $f$  em  $p$ . Analogamente, chama-se índice de  $f$  em  $p$  ao índice de qualquer matriz Hessiana de  $f$  em  $p$ .

Pela proposição anterior a nulidade e o índice são independentes das matrizes Hessianas. Vamos denotá-las respectivamente por  $\text{nul}(f, p)$  e  $\text{ind}(f, p)$ .

**Definição 3.7.2.** Um ponto crítico  $p \in X$  de  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se não degenerado se  $\text{nul}(f, p) = 0$ , o que equivale a dizer que qualquer das suas matrizes Hessianas é não degenerada.

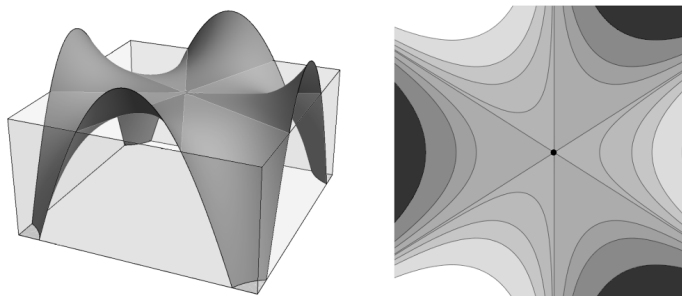


Figure 3.10: A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4$  tem um ponto crítico degenerado na origem.

**Proposição 3.7.2.** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in X$ . Então  $p$  é um ponto crítico não degenerado de  $f$  sse  $p$  é uma singularidade não degenerada de  $\nabla f$ .

*Proof.* Seja  $\tilde{f}: (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}, f(p))$  uma extensão local de  $f$  tal que  $p$  é um ponto crítico de  $\tilde{f}$ . A existência duma tal extensão é demonstrada a seguir no Lema 3.7.1. Seja  $\phi: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  uma parametrização local da variedade  $X$ . Seja  $g = -f(p) + f \circ \phi$  a função representante local de  $f$  na carta  $\phi^{-1}$ . Finalmente, seja  $\xi$  o campo gradiente  $\nabla f$ .

### 3.7. REPRESENTAÇÃO LOCAL DUMA FUNÇÃO NUM PONTO CRÍTICO 57

Temos para todo  $v \in T_x X$ ,

$$\xi(x) \cdot v = \nabla f(x) \cdot v = \nabla \tilde{f}(x) \cdot v = D\tilde{f}_x(v) .$$

Derivando em  $x = p$  obtemos

$$D\xi_p(u) \cdot v = D^2 \tilde{f}_p(u, v) .$$

Por outro lado, derivando  $g = \text{const} + f \circ \phi = \text{const} + \tilde{f} \circ \phi$  temos

$$Dg_x(v) = D\tilde{f}_{\phi(x)} D\phi_x(v) .$$

Derivando novamente em  $x = 0$  vem

$$\begin{aligned} u^T \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) v &= D^2 g_0(u, v) = D\tilde{f}_p^2(D\phi_0(u), D\phi_0(v)) + \underbrace{D\tilde{f}_p}_{=0} D^2 \phi_0(u, v) \\ &= D\tilde{f}_p^2(D\phi_0(u), D\phi_0(v)) = D\xi_p(D\phi_0(u)) \cdot D\phi_0(v) . \end{aligned}$$

Desta fórmula resulta a equivalência entre as afirmações seguintes:

- (i) A matriz  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)$  é não degenerada, i.e.,  $p$  é um ponto crítico não degenerado de  $f$ ;
- (ii)  $D\xi_p : T_p X \rightarrow T_p X$  é um isomorfismo, i.e.,  $p$  é uma singularidade não degenerada de  $\xi = \nabla f$ .

□

**Lema 3.7.1.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in X$  um ponto crítico de  $f$ . Então existe uma extensão suave  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  a uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $p$  tal que  $p$  é um ponto crítico de  $\tilde{f}$ .

*Proof.* Começemos por tomar uma extensão local  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}, f(p))$  de  $f$  a uma vizinhança de  $p$ . Seja  $h : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-k}, 0)$  uma submersão definida numa vizinhança de  $p$ , tal que nessa vizinhança  $X = h^{-1}(0)$ . Como  $\text{Nuc}(Dh_p) = T_p X$ , a restrição da derivada  $Dh_p$  a  $(T_p X)^\perp$  induz um isomorfismo  $Dh_p : (T_p X)^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Considerando a forma linear  $\alpha : (T_p X)^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\alpha(v) := D\tilde{f}_p(v)$ , existe  $w \in \mathbb{R}^{n-k}$  tal que  $w \cdot Dh_p(v) = \alpha(v)$ , para todo  $v \in (T_p X)^\perp$ . Definindo  $\hat{f}(x) := \tilde{f}(x) - w \cdot h(x)$ ,  $\hat{f}(x)$  é uma extensão suave de  $f$ , numa vizinhança de  $p$  onde  $\tilde{f}$  e  $h$  estão ambos definidos, que satisfaz

$$D\hat{f}_p(v) = D\tilde{f}_p(v) - w \cdot Dh_p(v) = 0 ,$$

para todo  $v \in (T_p X)^\perp$ . Como para  $v \in T_p X$ , se tem  $D\hat{f}_p(v) = Df_p(v) = 0$ ,  $p$  é um ponto crítico de  $\hat{f}$ . □

**Proposição 3.7.3** (Lema de Morse). Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in X$  um ponto crítico não degenerado de  $f$  com  $\text{ind}(f, p) = k$ . Então  $f: (X, p) \rightarrow (\mathbb{R}, f(p))$  é localmente semelhante à forma quadrática modelo  $Q_k^n: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ .

*Proof.* Podemos supor que  $X$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e que o ponto crítico  $p$  é a origem,  $p = 0$ , com  $f(0) = 0$ . Temos  $Df_0 = 0$  porque  $p = 0$  é um ponto crítico. Fixemos  $u \in X$  e consideremos a curva  $\gamma(t) := f(tu)$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u) - f(0) = \gamma(1) - \gamma(0) \\ &= \int_0^1 \gamma'(t) dt = \int_0^1 Df_{tu}(u) dt. \end{aligned}$$

Fixamos  $u$  e  $t$ , consideremos a função  $h(s) := Df_{stu}(u)$ . Aplicando de novo o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} Df_{tu}(u) &= Df_{tu}(u) - Df_0(u) = h(1) - h(0) \\ &= \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 t D^2 f_{stu}(u, u) ds. \end{aligned}$$

Substituindo obtemos

$$f(u) = \int_0^1 \int_0^1 t D^2 f_{stu}(u, u) ds dt = u^T B_u u,$$

onde  $B_u$  representa a matriz

$$B_u = \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(stu) ds dt.$$

A matriz Hessiana  $B_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$  é não degenerada, pelo que  $B_u$  é semelhante a  $B_0$ , qualquer que seja  $u$  numa vizinhança de 0 em  $\mathbb{R}^n$ . Isto significa que existem matrizes invertíveis  $M_u$  tais que  $B_u = M_u^T B_0 M_u$ . Como a função matricial  $u \mapsto B_u$  é suave, a função  $u \mapsto M_u$  também pode ser escolhida suave e satisfazendo  $M_0 = I$  (Exercício 3.22). Definimos agora, numa vizinhança de 0 em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi(u) = M_u u$ . Com esta definição temos

$$\begin{aligned} f(u) &= u^T B_u u = u^T M_u^T B_0 M_u u \\ &= (M_u u)^T B_0 (M_u u) = \phi(u)^T B_0 \phi(u) = Q_{B_0}(\phi(u)). \end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que  $D\phi_0(v) = v$ . Logo  $D\phi_0$  é um isomorfismo e pelo Teorema da Função Inversa  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo local. Concluimos assim que  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  é localmente semelhante a  $Q_{B_0}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . Mas pelo Corolário 3.6.2 já sabemos que  $Q_{B_0}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  é localmente equivalente à forma modelo  $Q_k^n$ , onde  $k = \text{ind}(B_0) = \text{ind}(f, 0)$ . Logo  $f$  é localmente semelhante a  $Q_k^n: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ .  $\square$

O Lema de Morse dá-nos a classificação local completa das funções suaves em pontos críticos não degenerados.

### 3.8 Exercícios

**Ex 3.1.** Seja  $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo suave num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $X \subset U$  uma subvariedade tal que  $\xi(x) \in T_x X$  para todo  $x \in X$ . Mostre que o fluxo do campo  $\xi$  em  $U$  é uma extensão do fluxo do campo  $\xi|_X \in \mathcal{X}^\infty(X)$ .

**Ex 3.2.** Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $p \in X$  um ponto regular, i.e.,  $\xi(p) \neq 0$ . Mostre que  $(\xi, p)$  é localmente equivalente a um campo constante.

**Sugestão:** Tome uma subvariedade  $\Sigma \subset X$  com  $\dim(\Sigma) = \dim(X) - 1$  tal que  $p \in \Sigma$  e  $\xi(p) \in T_p \Sigma^\perp$ . Seja  $\varphi: D \rightarrow X$  o fluxo máximo de  $\xi$  e tome  $\epsilon > 0$  tal que  $] -\epsilon, \epsilon[ \times \Sigma \subset D$ . Considere o campo constante  $\eta = (1, 0)$  na variedade produto  $] -\epsilon, \epsilon[ \times \Sigma$  e mostre que  $\varphi_* \eta = \xi$ .

**Ex 3.3.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade. Dado um campo tangente  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , mostre que a derivada  $D\xi_p: T_p X \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz  $D\xi_p(T_p X) \subseteq T_p X$  em toda a singularidade  $p \in X$ .

**Sugestão:** Para cada campo  $\nu \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ , derive a relação  $\nu(x) \cdot \xi(x) = 0$  na singularidade  $p$ .

**Ex 3.4.** Prove a Proposição 3.3.1. Conclua que tanto a equivalência como a equivalência local entre campos de vectores são relações de equivalência.

**Ex 3.5.** Sejam  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  dois campos de vectores nas variedades  $X$  e  $Y$ , com singularidades nos pontos  $p \in X$  e  $q \in Y$  respectivamente. Mostre que se  $(\xi, p) \sim (\eta, q)$  então os endomorfismos  $D\xi_p: T_p X \rightarrow T_p X$  e  $D\eta_q: T_q Y \rightarrow T_q Y$  são conjugados.

**Ex 3.6.** Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$  com  $\dim(X) = k$ , mostre que para cada  $p \in X$  existe um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  com  $p \in U$  e existem campos suaves  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset \mathcal{X}^\infty(X \cap U)$  tais que  $\{\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)\}$  é uma base de  $T_x X$  para todo  $x \in X \cap U$ .

**Sugestão:** Considere uma parametrização local  $\phi: (\mathbb{R}^k, 0) \simeq (X, p)$  e a família de campos de vectores obtidos por push-forward

$$\xi_j = \phi_* e_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \circ \phi^{-1} \quad 1 \leq j \leq k$$

dos campos constantes  $e_j$  em  $\mathbb{R}^k$ .

**Ex 3.7.** Mostre que se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $k \leq n$  então  $TX^\perp$  é uma variedade de dimensão  $n$ .

**Sugestão:** Suponha que  $\dim(X) = k$ . Localmente,  $X$  é o nível  $X \cap U =$

$f^{-1}(c)$  dum valor regular  $c$  por função suave  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sobre o aberto  $U$  tome uma família de campos de vectores  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset \mathcal{X}^\infty(X \cap U)$  tais que  $\{\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)\}$  é uma base de  $T_x X$ , qualquer que seja  $x \in X \cap U$ .

Definindo a aplicação suave  $F: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$

$$F(x, v) := (f(x), \xi_1(x) \cdot v, \dots, \xi_k(x) \cdot v)$$

mostre que

$$T(X \cap U)^\perp = F^{-1}(c, 0),$$

onde  $(c, 0)$  é um valor regular do mapa  $F$ .

**Ex 3.8.** Dado um espaço Euclideo  $V$  e uma aplicação linear  $\lambda: V \rightarrow \mathbb{R}$  mostre que existe um único  $u \in V$  tal que  $\lambda(v) = u \cdot v$  para todo  $v \in V$ .

**Sugestão:** Mostre que a aplicação linear  $\lambda: V \rightarrow V^*$ ,  $u \mapsto \lambda_u$ , onde  $\lambda_u$  é a forma definida por  $\lambda_u(v) := u \cdot v$ , é um isomorfismo.

**Ex 3.9.** Sejam  $\phi: X \rightarrow Y$  um difeomorfismo e  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Mostre que para todo  $x \in X$ ,

$$\nabla(f \circ \phi)(x) = (D\phi_x)^* \nabla f(\phi(x)),$$

onde  $(D\phi_x)^*: T_{\phi(x)} Y \rightarrow T_x X$  representa a adjunta de  $D\phi_x: T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ .

**Ex 3.10.** Seja  $\text{Mat}_n$  o espaço das matrizes reais  $n \times n$ ,  $\text{Mat}_n^S$  o subespaço das matrizes simétricas ( $A^T = A$ ), e  $\text{Mat}_n^A$  o subespaço das matrizes anti-simétricas ( $A^T = -A$ ). Mostre que  $\text{Mat}_n = \text{Mat}_n^S \oplus \text{Mat}_n^A$ .

**Sugestão:**  $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$

**Ex 3.11.** Seja  $\mathcal{Q}_n := \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  o espaço das formas quadráticas em  $\mathbb{R}^n$ , Mostre que  $Q: \text{Mat}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n$ ,  $A \mapsto Q_A$ , onde  $Q_A(x) = x^T A x$ , é uma aplicação linear sobrejectiva cujo núcleo é o subespaço  $\text{Mat}_n^A$ , e que a restrição de  $Q|_{\text{Mat}_n^S}: \text{Mat}_n^S \rightarrow \mathcal{Q}_n$  é um isomorfismo.

**Ex 3.12.** Analise o comportamento “crítico” das seguintes funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  na origem. É um ponto crítico não degenerado? É isolado? É um máximo ou um mínimo local? Qual o seu índice e a nulidade?

(a)  $f(x, y) = x^2 + 4y^3$

(b)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

(c)  $f(x, y) = x^2 + y^4$

(d)  $f(x, y) = x^2 + 11xy + y^2/2 + x^6$

(e)  $f(x, y) = 10xy + y^2 + 75y^3$

**Ex 3.13.** Prove o Lema de Morse para funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Sugestão:** Use o seguinte lema elementar de Cálculo. Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , e um ponto  $a \in \mathbb{R}$ , definindo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \int_0^1 \int_0^1 t f''(a + ts(x-a)) ds dt ,$$

$g$  é uma função de classe  $C^\infty$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)^2 g(x) .$$

**Ex 3.14.** Seja  $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma quadrática associada à matriz simétrica  $A$ . Mostre que:

- (a)  $\text{Nuc}(A)$  é o conjunto dos pontos críticos de  $Q_A$ .
- (b)  $2A$  é a matriz Hessiana de  $Q_A$  em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (c) os pontos críticos de  $Q_A$  são não degenerados sse  $\text{nul}(Q_A) = 0$ .

**Ex 3.15. Método dos Multiplicadores de Lagrange.** Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções suaves definidas sobre um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n-k}$  um valor regular de  $f$ , e  $X = f^{-1}(c)$ . Mostre que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $g|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  sse existem escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$  tais que

$$\nabla g(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_{n-k} \nabla f_{n-k}(p) .$$

Por outras palavras, os pontos críticos de  $g|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  são as soluções do seguinte sistema de  $n + (n - k)$  equações nas  $n + (n - k)$  variáveis  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k})$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = c_i & \text{para } i = 1, \dots, n - k \\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + \dots + \lambda_{n-k} \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) & \text{para } j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

**Sugestão:** Observe que é equivalente dizer que  $p$  é um ponto crítico de  $g|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dizer que  $Dg_p \equiv 0$  sobre  $T_p X$ , e dizer que  $\nabla g(p) \in T_p^\perp X$ .

**Ex 3.16.** Considere o elipsóide  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Ache os pontos críticos da função  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = -x^2 + 2y^2 - 2yz + 2z^2$ . Determine os respectivos índices.

Chama-se espaço euclidiano a um espaço linear  $E$  munido dum produto interno. Seja  $E$  um espaço euclidiano. Um operador  $L : E \rightarrow E$  diz-se *simétrico*, ou *auto-adjunto*, sse  $u \cdot L(v) = L(u) \cdot v$ , quaisquer que sejam  $u, v \in E$ .

**Ex 3.17.** Mostre que um operador  $L : E \rightarrow E$  é simétrico sse a sua matriz relativa a uma base ortonormada for simétrica.

Dado um operador simétrico  $L : E \rightarrow E$  num espaço euclidiano  $E$ , a função  $Q_L : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_L(x) = x \cdot L(x)$  diz-se uma *forma quadrática*.

**Ex 3.18.** Considere a esfera  $S = \{x \in E : \|x\|^2 = x \cdot x = 1\}$ . Dado um operador simétrico  $L : E \rightarrow E$ , mostre que os vectores próprios de  $L$  com norma um são os pontos críticos de  $Q_L|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ , e que os valores próprios de  $L$  são os valores críticos de  $Q_L|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Deduza que  $L : E \rightarrow E$  tem pelo menos um valor próprio.

**Ex 3.19.** Seja  $L : E \rightarrow E$  um operador simétrico, e  $u \in E$  um vector próprio de  $L$ . Mostre que  $F = \{u\}^\perp$  é um subespaço  $L$ -invariante, i.e.,  $L(F) \subseteq F$ , e que a restrição  $L|_F : F \rightarrow F$  é um novo operador simétrico tal que  $Q_L(x) = Q_{L|_F}(x)$  para todo  $x \in F$ .

**Ex 3.20.** Mostre (por indução na dimensão de  $E$ ) que todo o operador simétrico  $L : E \rightarrow E$  admite uma base ortonormada de vectores próprios.

**Sugestão:** Use os dois exercícios anteriores.

**Ex 3.21.** Mostre que o grupo ortogonal

$$O_n := \{M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) : M^T M = I\}$$

é uma variedade de dimensão  $\frac{n(n-1)}{2}$  tal que  $T_I O_n = \text{Mat}_n^A$ .

**Ex 3.22.** Dada  $A \in \text{Mat}_n^S$  com  $\text{ind}(Q_A) = k$  e  $\text{nul}(Q_A) = 0$  mostre que existe uma vizinhança  $U \subset \text{Mat}_n^S$  de  $A$  e uma função suave  $M : U \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \mapsto M_B$ , tal que  $M_A = I$  e  $Q_B(M_B x) = Q_k^n(x)$  para todo  $B \in U$ , sendo  $M_B$  uma matriz invertível.

**Sugestão:** Observe que basta provar este resultado para uma qualquer matriz particular com índice  $k$  e nulidade 0. Suponha que  $A = \text{Diag}(a)$  é uma matriz diagonal com  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $a_1 < \dots < a_k < 0 < a_{k+1} < \dots < a_n$ . Aplique o Teorema da função implícita à função  $F : \text{Mat}_n^S \times \mathbb{R}^n \times O_n \rightarrow \text{Mat}_n^S$ ,  $F(B, x, R) := B - R \text{Diag}(x) R^T$  no ponto  $(B, x, R) = (A, a, I)$  para encontrar funções  $x(B)$  e  $R_B$  tais que para todo  $B \in \text{Mat}_n^S$  numa vizinhança de  $A$

$$(R_B)^T B R_B = \text{Diag}(x(B)).$$

Finalmente defina

$$M_B := R_B \text{Diag} \left( |x_1(B)|^{-\frac{1}{2}}, \dots, |x_n(B)|^{-\frac{1}{2}} \right).$$



## Chapter 4

# Variedades com Bordo

Neste capítulo introduzimos uma classe mais ampla de variedades, ditas *variedades com bordo*, que inclui modelos como a bola fechada

$$B^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

e o hemisfério

$$S_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_1 \geq 0\}.$$

Por outro lado esta classe de variedades com bordo inclui as variedades usuais, ditas *sem bordo*, para as quais o bordo é o conjunto vazio.

### 4.1 Variedades com bordo

Definimos o semi-espço,

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}.$$

**Definição 4.1.1.** Dizemos que  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n$  se para cada  $x \in X$ ,  $(X, x) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  ou  $(X, x) \simeq (H^n, 0)$ .

**Proposição 4.1.1.**  $(\mathbb{R}^n, 0) \not\simeq (H^n, 0)$ .

*Proof.* De facto, se tivéssemos  $(\mathbb{R}^n, 0) \simeq (H^n, 0)$ ,  $H^n$  seria uma variedade de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n$ . Como as variedades de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n$  são os conjuntos abertos,  $H^n$  teria de ser um conjunto aberto. Logo, porque  $H^n$  não é aberto,  $(\mathbb{R}^n, 0)$  não pode ser localmente difeomorfo a  $(H^n, 0)$ .  $\square$

**Definição 4.1.2.** Define-se o bordo de  $X$  como

$$\partial X = \{x \in X : (X, x) \simeq (H^n, 0)\}.$$

Os pontos em  $X \setminus \partial X$  dizem-se interiores a  $X$ .

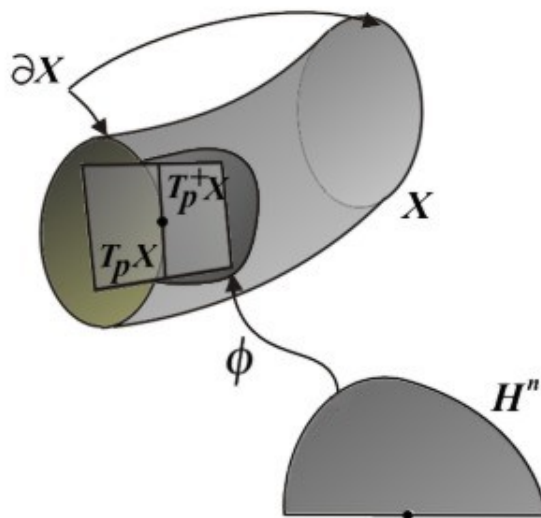


Figure 4.1: variedade com bordo

**Exemplo 4.1.1.** O semi-espaço  $H^n$  é uma variedade com bordo, e

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

**Proposição 4.1.2.** Se  $X$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n$ , então  $\partial X$  é uma variedade sem bordo de dimensão  $n - 1$ .

*Proof.* Dado  $p \in \partial X$ , tomemos uma parametrização  $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \simeq (X, p)$ . Suponhamos que  $\phi : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo entre um aberto  $U$  de  $H^n$  contendo 0, e um aberto  $V$  de  $X$  contendo  $p$ . Para cada  $x \in U$ ,  $\phi : (H^n, x) \simeq (X, \phi(x))$ . Definindo  $U' = U \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , temos  $(H^n, x) \simeq (H^n, 0)$  sse  $x \in U'$ . Logo, como o difeomorfismo  $\phi$  transforma pontos  $x \in U$  tais que  $(H^n, x) \simeq (H^n, 0)$ , em pontos  $x \in X$  tais que  $(X, x) \simeq (H^n, 0)$ , temos  $\phi(U') = V \cap \partial X$ , o que prova que  $(\mathbb{R}^{n-1}, 0) \simeq (\partial X, p)$ .  $\square$

Uma variedade  $X$  diz-se *fechada* se for compacta e e sem bordo.

**Proposição 4.1.3.** Se  $X$  é uma variedade com bordo então  $\partial X$  é fechado em  $X$ . Em particular, se  $X$  é compacta então  $\partial X$  é uma variedade fechada.

*Proof.* Basta-nos ver que  $X \setminus \partial X$  é aberto em  $X$ . Dado  $p \in X \setminus \partial X$ , existe uma carta  $\phi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ . Seja  $U$  o domínio do difeomorfismo  $\phi$ . Então para cada  $x \in U$ ,  $\phi : (X, x) \simeq (\mathbb{R}^n, \phi(x)) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ , o que mostra que  $U \subseteq X \setminus \partial X$ . Logo  $X \setminus \partial X$  é aberto.  $\square$

Seja  $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$ .

**Definição 4.1.3.** Dada  $X \subset \mathbb{R}^N$  variedade com bordo e  $p \in \partial X$ , um vector  $v \in \mathbb{R}^N$  diz-se estritamente tangente a  $(X, p)$  se existir uma curva suave  $\alpha: (\mathbb{R}_+, 0) \rightarrow (X, p)$  tal que  $\alpha'(0) = v$ . Definimos

$$T_p^+ X := \{v \in \mathbb{R}^N : v \text{ é estritamente tangente a } (X, p)\}.$$

Designamos por  $T_p X$  o subespaço linear gerado por  $T_p^+ X$ .

**Observação 4.1.1.**  $T_0 H^n = \mathbb{R}^n$  e  $T_0^+ H^n = H^n$  (Exercício 4.1).

Pela proposição seguinte  $T_p^+ X$  é um semi-espaço isomorfo a  $H^n$ .

**Proposição 4.1.4.** Seja  $X$  uma variedade com bordo.

- (a) Se  $p \in X \setminus \partial X$  e  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \simeq (X, p)$  for uma parametrização local então  $T_p^+ X = T_p X = D\phi_0(\mathbb{R}^n)$ .
- (b) Se  $p \in \partial X$  e  $\phi: (H^n, 0) \simeq (X, p)$  for uma parametrização local então  $T_p^+ X = D\phi_0(H^n)$  e  $T_p X = D\phi_0(\mathbb{R}^n)$ .

*Proof.* A alínea (a) segue da Proposição 1.1.2.

Vejamos agora a alínea (b). Dado um vector  $v \in H^n$  consideremos a curva  $\alpha(t) = \phi(t v)$  definida para  $t \geq 0$ . Então  $\alpha(0) = \phi(0) = p$  e como esta curva toma valores em  $X$ ,  $\alpha'(0) = D\phi_0(v) \in T_p^+ X$ . Logo  $D\phi_0(H^n) \subset T_p^+ X$ .

Reciprocamente, dado  $v \in T_p^+ X$  existe uma curva  $\alpha: (\mathbb{R}_+, 0) \rightarrow (X, p)$  tal que  $v = \alpha'(0)$ . Definindo  $\beta(t) = \phi^{-1}(\alpha(t))$  temos que  $\beta: (\mathbb{R}_+, 0) \rightarrow (H^n, 0)$  é uma curva suave com valores em  $H^n$ . Como  $H^n$  é um cone convexo temos  $w = \beta'(0) \in H^n$ . Logo, como  $\alpha(t) = \phi(\beta(t))$ , derivando obtemos

$$v = \alpha'(0) = D\phi_0(\beta'(0)) = D\phi_0(w) \in D\phi_0(H^n),$$

o que estabelece a inclusão  $T_p^+ X \subset D\phi_0(H^n)$ .  $\square$

**Proposição 4.1.5.** Sejam  $X$  uma variedade (sem bordo) com  $\dim(X) \geq 1$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Se  $c \in \mathbb{R}$  for um valor regular na imagem de  $f$  então  $X_c = f^{-1}[c, +\infty[$  é uma variedade com bordo tal que  $\partial X_c = f^{-1}(c)$ . Além disso para cada  $p \in \partial X_c$ , tem-se

$$T_p \partial X_c = \{v \in T_p X : Df_p(v) = 0\}$$

$$T_p^+ X_c = \{v \in T_p X : Df_p(v) \geq 0\}$$

*Proof.* Seja  $p \in X_c$ . Tomemos uma carta local  $\psi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ . Se  $f(p) > c$  então  $X_c$  é uma vizinhança de  $p$  em  $X$ , pelo que  $(X_c, p) \simeq (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ .

Caso  $f(p) = c$ , como  $p$  é regular, pelo Teorema 2.1.1 alínea (b), existem difeomorfismos locais  $\phi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (\mathbb{R}, c) \simeq (\mathbb{R}, 0)$  tais que o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, c) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}, 0) \end{array}$$

comuta, com  $\pi(x_1, \dots, x_n) := x_1$ . Sem perda de generalidade podemos supôr que  $\psi : (\mathbb{R}, c) \simeq (\mathbb{R}, 0)$  é estritamente crescente. De facto como  $\psi \circ f = \pi \circ \phi$  implica que  $(-\psi) \circ f = \pi \circ (-\phi)$ , podemos sempre substituir  $\psi$  por  $-\psi$  e  $\phi$  por  $-\phi$  de modo a garantir que  $\psi$  seja estritamente crescente.

Da comutatividade do diagrama acima segue que

$$\begin{aligned} f(x) \geq c &\Leftrightarrow \psi(f(x)) \geq 0 &\Leftrightarrow \pi(\phi(x)) \geq 0 \\ f(x) = c &\Leftrightarrow \psi(f(x)) = 0 &\Leftrightarrow \pi(\phi(x)) = 0 \end{aligned}$$

Logo  $\phi$  transforma (localmente)  $X_c$  em  $H^n$ , o que implica que  $\phi : (X_c, p) \simeq (H^n, 0)$ . Finalmente, como  $\psi'(c) > 0$ ,

$$\begin{aligned} T_p^+ X_c &= D(\phi^{-1})_0(H^n) \\ &= (D\phi_p)^{-1} (D\pi_0)^{-1}([0, +\infty[)) \\ &= (D\pi \circ \phi)_p^{-1}[0, +\infty[ \\ &= (D\psi \circ f)_p^{-1}[0, +\infty[ \\ &= (Df_0)^{-1}[0, +\infty[. \end{aligned}$$

□

O conceito de campo normal exterior introduzido a seguir será fundamental no Capítulo 6 (sobre orientações) para induzir uma orientação no bordo duma variedade orientada com bordo.

**Teorema 4.1.1** (Existência do campo normal exterior). Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade com bordo. Existe um único campo suave  $\xi$  sobre  $\partial X$  tal que para todo o  $p \in \partial X$ :

- (a)  $\xi(p) \in T_p X$  e  $\xi(p) \notin T_p^+ X$ ,
- (b)  $\xi(p) \in (T_p \partial X)^\perp$ ,
- (c)  $\|\xi(p)\| = 1$ .

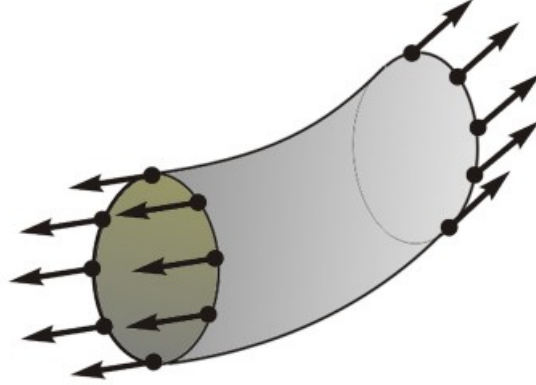


Figure 4.2: Campo normal exterior ao bordo

*Proof.* Dada uma carta local  $\phi : (X, p) \rightarrow (H^n, 0)$  definida numa vizinhança aberta  $U \subset X$  de  $p$ , seja  $f_\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f_\phi(x) := \phi_1(x)$ , onde  $\phi_1(x)$  designa a primeira componente do vector  $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\phi$  é um difeomorfismo local em  $U$ , temos  $\nabla f_\phi \neq 0$  em  $U$ , pelo que  $0$  é um nível regular de  $f_\phi$  tal que  $U = (f_\phi)^{-1}([0, +\infty[)$  e  $\partial X \cap U = (f_\phi)^{-1}(0)$ . Em  $\partial X \cap U$  definimos  $\xi_\phi(x) := -\frac{\nabla f_\phi(x)}{\|\nabla f_\phi(x)\|}$ , onde  $\nabla f_\phi(x)$  representa o gradiente de  $f_\phi$  na variedade  $X$ , i.e., a projecção ortogonal sobre  $T_x X$  do gradiente dum extensão local de  $f_\phi$  a um aberto do espaço ambiente. A expressão explícita usada para definir  $\xi_\phi$  mostra que este campo é suave. Por outro lado, este campo satisfaz as condições (1), (2) e (3) acima, que o determinam univocamente. Logo, os vários campos locais  $\xi_\phi$  colam num único campo suave definido globalmente.  $\square$

Este campo cuja existência e unicidade acabámos de estabelecer diz-se o *campo normal exterior* ao longo de  $\partial X$ .

## 4.2 Teorema dos níveis regulares com bordo

O teorema seguinte estende o Teorema 1.2.3 a níveis regulares de variedades com bordo. Ele será fundamental na elaboração da Teoria do Grau de Brouwer, no Capítulo 10.

**Teorema 4.2.1** (Níveis regulares). Sejam  $X, Y$  duas variedades,  $X$  com bordo e  $Y$  sem bordo tais que  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ . Se  $c \in Y$  for um valor

regular de  $f : X \rightarrow Y$  e de  $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$  tal que  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$  então  $f^{-1}(c)$  é uma variedade com bordo de dimensão igual a  $\dim(X) - \dim(Y)$  tal que

$$\partial f^{-1}(c) = f^{-1}(c) \cap \partial X.$$

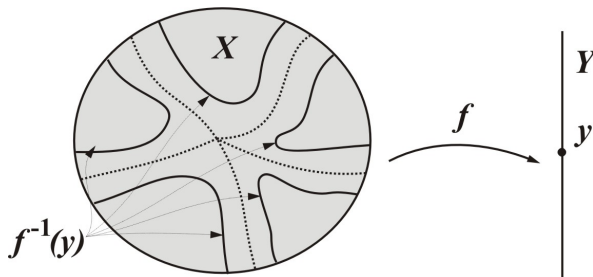


Figure 4.3: Níveis regulares com bordo

*Proof.* Seja  $p \in f^{-1}(c)$ . Vamos supor que  $\dim(X) = n$  e  $\dim(Y) = n - k$ . Aplicando o Teorema 1.2.3 à restrição de  $f$  à variedade sem bordo  $X \setminus \partial X$ , temos

$$(1) \quad (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1}(c), p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0).$$

Vamos agora mostrar que

$$(2) \quad (X, p) \simeq (H^n, 0) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1}(c), p) \simeq (H^k, 0).$$

Observemos que (1) e (2) juntos mostram que  $f^{-1}(c)$  é uma variedade com bordo, de dimensão  $k$  em todos os pontos. Vejamos agora que  $\partial f^{-1}(c) = f^{-1}(c) \cap \partial X$ . Dado  $p \in f^{-1}(c) \cap \partial X$ , temos  $p \in \partial X$ , pelo que  $(X, p) \simeq (H^n, 0)$ . Por (2) segue que  $(f^{-1}(c), p) \simeq (H^k, 0)$ , o que implica  $p \in \partial f^{-1}(c)$ . Logo,  $\partial f^{-1}(c) \supset f^{-1}(c) \cap \partial X$ . Reciprocamente, dado  $p \in \partial f^{-1}(c)$ , é claro que  $p \in f^{-1}(c)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $p \notin \partial X$ . Então  $(X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ , e segue por (1) que  $(f^{-1}(c), p) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$ . Este facto implica que  $p \notin \partial f^{-1}(c)$ , em contradição com a hipótese feita. Logo,  $\partial f^{-1}(c) \subset f^{-1}(c) \cap \partial X$ .

Vamos agora provar (2). Seja  $p \in f^{-1}(c)$  tal que  $(X, p) \simeq (H^n, 0)$ . A demonstração baseia-se na existência do seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} (X, p) & \xrightarrow{f} & (Y, c) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\ (H^n, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^{n-k}, 0) \\ \phi \downarrow & & \parallel \\ (H^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^{n-k}, 0) \end{array}$$

onde:

- (a)  $\psi : (X, p) \simeq (H^n, 0)$  e  $\tilde{\psi} : (Y, c) \simeq (H^k, 0)$  representam cartas locais das variedades  $X$  e  $Y$  nos pontos  $p$  e  $c$  respectivamente;
- (b)  $\tilde{f} : U \subset H^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é um representante local de  $f$  nestas cartas, sendo  $U$  um aberto de  $H^n$  tal que  $0 \in U$ ;
- (c)  $\phi : U \subset H^n \rightarrow H^n$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_k, \tilde{f}(x_1, \dots, x_n))$ ;
- (d)  $\pi : H^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é a projecção  $\pi(x_1, \dots, x_n) := (x_{k+1}, \dots, x_n)$ .

É claro que  $\phi(U) \subset H^n$  e  $\tilde{f} = \pi \circ \phi$ . Vamos mostrar a seguir que, a menos duma re-ordenação das variáveis  $(x_2, \dots, x_n)$ ,  $D\phi_0$  é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, seguirá que  $\phi$  é um difeomorfismo local numa vizinhança da origem. Logo

$$(f^{-1}(c), p) \simeq (\tilde{f}^{-1}(0), 0) \stackrel{\phi}{\simeq} (\pi^{-1}(0), 0) \equiv (H^k, 0).$$

Para mostrar que  $D\phi_0$  é um isomorfismo, consideremos a derivada

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline * & \frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}(0) \end{array} \right].$$

Sabemos, por hipótese, que  $p$  é um ponto regular de  $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ . Logo,  $0 \in \partial H^n$  é um ponto regular de  $\tilde{f}|_{\partial H^n} : U \cap \partial H^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Como  $\partial H^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ , e esta restrição é o mapa  $(0, x_2, \dots, x_n) \mapsto \tilde{f}(0, x_2, \dots, x_n)$ , segue que a matriz Jacobiana  $\frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-k})}{\partial(x_2, \dots, x_n)}(0)$  tem característica  $n-k$ . Assim esta matriz tem pelo menos  $n-k$  colunas linearmente independentes. A menos de re-ordenar as variáveis  $(x_2, \dots, x_n)$  podemos supor que as últimas  $n-k$  colunas são linearmente independentes. Isto implica que  $\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = \det \left[ \frac{\partial(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}(0) \right] \neq 0$ .  $\square$

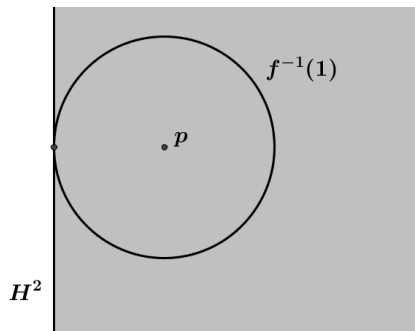


Figure 4.4: Exemplo onde falha a conclusão do Teorema 4.2.1

**Exemplo 4.2.1.** A função  $f : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := (x-1)^2 + y^2$ , tem apenas o valor crítico 0 associado ao ponto crítico  $p = (1, 0)$ . Logo 1 é um valor regular de  $f$  que corresponde ao nível representado na Figura 4.4. Neste exemplo a conclusão do Teorema 4.2.1 falha:

$$\partial f^{-1}(1) = \emptyset \neq \{(0, 0)\} = f^{-1}(1) \cap \partial X.$$

No entanto, como 1 é um valor crítico da restrição  $f|_{\partial H^2} : \partial H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o teorema não pode ser aplicado.

### 4.3 Vizinhanças tubulares

O conceito de vizinhança tubular de uma variedade compacta e sem bordo  $X$ , que vamos agora introduzir, será usado nos capítulos 5 (transversalidade) e 8 (homotopia) como uma técnica para perturbar explicitamente mapas que tenham valores na variedade  $X$ .

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$ , chama-se *fibrado normal* de  $X$  a

$$TX^\perp = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X, v \in T_x X^\perp\}.$$

Este subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n}$  é uma variedade de dimensão  $n$  (Exercício 3.7) contendo a cópia de  $X \times \{0\}$  de  $X$ . A variedade  $TX^\perp$  será usada como modelo para a geometria do ambiente  $\mathbb{R}^n$  numa vizinhança da variedade  $X$ . Nos pontos  $(p, 0) \in X \times \{0\}$ , tem-se  $T_{(p,0)}(TX^\perp) = T_p X \times T_p^\perp X$ , (Exercício 4.4). Consideremos agora o mapa

$$E : TX^\perp \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad E(x, v) = x + v,$$

que projecta  $TX^\perp$  no ambiente  $\mathbb{R}^n$ , transformando  $X \times \{0\}$  em  $X$ . Como este mapa é a restrição duma função linear em  $\mathbb{R}^{2n}$ , a sua derivada nos pontos  $(p, 0) \in X \times \{0\}$  é dada por

$$DE_{(p,0)} : T_{(p,0)}(TX^\perp) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad DE_{(p,0)}(u, v) = u + v.$$

Esta derivada é um isomorfismo linear porque  $\mathbb{R}^n = T_x X \oplus T_x^\perp X$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  definimos

$$\begin{aligned} T_\epsilon X^\perp &= \{(x, v) \in TX^\perp : \|v\| \leq \epsilon\} \quad \text{e} \\ V_\epsilon(X) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}_X(x) \leq \epsilon\}, \end{aligned}$$

onde  $\text{dist}_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função

$$\text{dist}_X(x) := \inf_{y \in X} \|x - y\|.$$



**Teorema 4.3.1** (Existência duma Vizinhança Tubular). Dada uma variedade compacta sem bordo  $X \subset \mathbb{R}^n$  existem  $\epsilon > 0$  e  $\pi: V_\epsilon(X) \rightarrow X$  tais que

- (1) O mapa  $E: T_\epsilon X^\perp \rightarrow V_\epsilon(X)$  é um difeomorfismo;
- (2)  $V_\epsilon(X)$  é uma variedade com bordo;
- (3) A função  $x \mapsto \text{dist}_X(x)^2$  é suave em  $V_\epsilon(X)$ ;
- (4)  $\pi$  é uma submersão suave;
- (5)  $\pi$  é uma projecção, i.e.,  $\pi(x) = x$  para todo  $x \in X$ ;
- (6)  $x - \pi(x) \in T_{\pi(x)}^\perp X$  para todo  $x \in V_\epsilon(X)$ ;
- (7)  $\text{dist}_X(x) = \|x - \pi(x)\|$ , para todo  $x \in V_\epsilon(X)$ .

Diremos que  $V_\epsilon(X)$  é uma *vizinhança tubular de  $X$*  para exprimir que o raio  $\epsilon > 0$  satisfaz todas as conclusões deste teorema.

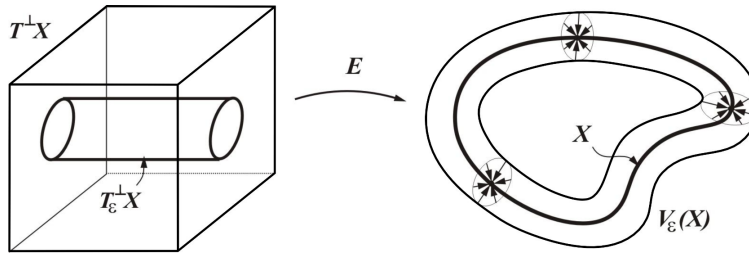


Figure 4.5: Vizinhança tubular

*Proof.* (1) Por definição é óbvio que  $E(T_\epsilon X^\perp) \subseteq V_\epsilon(X)$ , qualquer que seja  $\epsilon > 0$ . Como  $DE_{(p,0)}$  é um isomorfismo em todos os pontos  $(p, 0) \in X \times \{0\}$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $E|_{T_\epsilon X^\perp}: T_\epsilon X^\perp \rightarrow V_\epsilon(X)$  é um difeomorfismo local. Esta restrição é, portanto, localmente injectiva. Fazendo  $\epsilon > 0$  ainda menor, se necessário, podemos supor que se  $E(x, v) = E(y, w)$ , com  $(x, v), (y, w) \in T_\epsilon X^\perp$  mas  $(x, v) \neq (y, w)$ , então  $\|x - y\| \geq \epsilon$ . Suponhamos, por absurdo, que esta restrição não é injectiva para nenhum  $\epsilon > 0$ . Então, para cada inteiro  $n \geq 1$  existem pontos  $(x_n, v_n), (y_n, w_n) \in T_{1/n} X^\perp$  tais que  $(x_n, v_n) \neq (y_n, w_n)$  e  $E(x_n, v_n) = E(y_n, w_n)$ . Observemos que pela injectividade local de  $E$  se tem  $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ . Os vectores  $w_n$  e  $v_n$  tendem para 0, porque têm norma menor ou igual a  $1/n$ . Por compacidade de  $X$  extraindo subsucessões convergentes de  $x_n$  e  $y_n$  podemos logo assumir que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Logo,

$$x = E(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(y_n, w_n) = E(y, 0) = y$$

enquanto por outro lado  $\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ . Deste absurdo, concluímos que a restrição de  $E$  a uma vizinhança aberta de  $T_\epsilon X^\perp$  tem de ser injectiva para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Pelo Teorema 1.3.1 a inversa desta restrição de  $E$  é suave por se tratar dum difeomorfismo local sobre um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Logo  $E|_{T_\epsilon X^\perp}: T_\epsilon X^\perp \rightarrow E(T_\epsilon X^\perp)$  é um difeomorfismo global.

Vejamos agora que  $V_\epsilon(X) \subseteq E(T_\epsilon X^\perp)$ . Dado  $p \in V_\epsilon(X)$ , minimizemos a função  $g(x) = \|p - x\|^2$  sobre a variedade compacta  $X$ . Seja  $q$  um ponto de mínimo absoluto de  $g(x)$ . Derivando em  $q$  a extensão quadrática  $g(x) = \|p - x\|^2$  de  $g$  a  $\mathbb{R}^n$  temos  $\nabla g_q = 2(p - q) \in T_q X^\perp$ . Como  $\|p - q\| = \text{dist}_X(p) \leq \epsilon$ , segue que

$$p = q + (p - q) = E(q, p - q) \in E(T_\epsilon X^\perp).$$

Logo  $V_\epsilon(X) \subseteq E(T_\epsilon X^\perp)$ , o que encerra a prova de (1).

(2) Consideremos agora a função suave  $h: TX^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, v) = \|v\|^2$ . O único valor crítico da função  $h$  é 0. Como  $T_\epsilon X^\perp = h^{-1}[-\infty, \epsilon]$ , pela Proposição 4.1.5,  $T_\epsilon X^\perp$  é uma variedade com bordo. Logo,  $V_\epsilon(X)$ , que é difeomorfo a  $T_\epsilon X^\perp$ , é também uma variedade com bordo.

(3) A função  $\text{dist}_X(x)^2$  é suave em  $V_\epsilon(X)$  porque o argumento anterior mostra que  $\text{dist}_X(p)^2 = h \circ E^{-1}(p)$ , para todo  $p \in V_\epsilon(X)$ .

(4) Definimos  $\pi: V_\epsilon(X) \rightarrow X$ , pondo  $\pi = p \circ E^{-1}$ , onde  $\hat{\pi}: TX^\perp \rightarrow X$  é a projecção  $\hat{\pi}(x, v) = x$ . Como  $\hat{\pi}$  é uma submersão,  $\pi$  também é.

(5) O mapa  $\hat{\pi}$  é tal que  $\hat{\pi}(x, 0) = x$ , e o mesmo acontece com o mapa  $E$  que também satisfaz  $E(x, 0) = x$ , qualquer que seja  $x \in X$ . Logo, para todo  $x \in X$ , tem-se  $\pi(x) = \hat{\pi} \circ E^{-1}(x) = \hat{\pi}(x, 0) = x$ .

(6) O argumento usado na prova do facto (1) mostra que dado  $p \in V_\epsilon(X)$  existe  $q \in X$  tal que  $(q, p - q) \in T_\epsilon X^\perp$ . Logo,  $E^{-1}(p) = (q, p - q)$ , e  $\pi(p) = \hat{\pi}(q, p - q) = q$ , donde  $p - \pi(p) = p - q \in T_q X^\perp = T_{\pi(p)} X^\perp$ .

(7) Finalmente, tendo em conta que o ponto  $q \in X$  foi encontrado minimizando a distância a  $X$ ,  $\text{dist}_X(p) = \|p - q\| = \|p - \pi(p)\|$ .  $\square$

## 4.4 Exercícios

**Ex 4.1.** Mostre que o semi-espaco  $H^n$  é uma variedade com bordo, e

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Vea ainda que  $T_0 H^n = \mathbb{R}^n$ ,  $T_0^+ H^n = H^n$  e  $T_0 \partial H^n = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Ex 4.2.** Seja  $f : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x, y) := x^2 + (y - 1)^2$ . Veja que:

- (a) 0 é o único valor crítico de  $f$ , associado ao ponto crítico  $p = (0, 1)$ ;
- (b)  $f^{-1}(1)$  é uma variedade sem bordo, i.e.,  $\partial f^{-1}(1) = \emptyset$ ;
- (c)  $f^{-1}(1) \cap \partial X = \{(0, 0)\}$ .

**Ex 4.3.** Sejam  $X$  uma variedade sem bordo,  $\Phi = (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave,  $c \in \mathbb{R}$  um valor regular de  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X_c = g^{-1}[c, +\infty[$  a correspondente variedade com bordo. Mostre que  $f^{-1}(c') \cap \partial X_c = \Phi^{-1}(c', c)$  e que dado  $c' \in \mathbb{R}$  são equivalentes as afirmações:

- (a)  $(c', c)$  é um valor regular de  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,
- (b)  $c'$  é um valor regular de  $f|_{\partial X_c} : \partial X_c \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ex 4.4.** Mostre que  $T_{(p,0)}(TX^\perp) = T_p X \times T_p X^\perp$  e que  $DE_{(p,0)} : T_{(p,0)}(TX^\perp) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o isomorfismo linear  $DE_{(p,0)}(u, v) = u + v$ , para todo o ponto  $p \in X$ .

**Sugestão:** Pelo Exercício 3.7 temos localmente  $TX^\perp = F^{-1}(c, 0)$ , pelo que

$$T_{(x,v)}(TX^\perp) = \text{Nuc}(DF_{(x,v)}).$$

**Ex 4.5.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade e  $p \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que os pontos críticos da função  $\rho_p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho_p(x) = \|x - p\|^2$ , são os pontos  $x \in X$  tais que  $x - p \in T_p^\perp X$ .

Nos quatro problemas seguintes  $W$  é um espaço vectorial real de dimensão finita e  $f : W \times X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave que pode ser identificada com a família de funções  $f_w : X \rightarrow \mathbb{R}$  indexadas em  $w \in W$ , definida por  $f_w(x) := f(w, x)$ . Nestes problemas  $W_\epsilon := \{w \in W : \|w\| < \epsilon\}$ .

**Ex 4.6.** Mostre que se  $p \in X$  é um ponto crítico não degenerado de  $f_0$  então existe  $\epsilon > 0$ , e uma função suave  $\tilde{p} : W_\epsilon \rightarrow X$  tal que para cada  $w \in W_\epsilon$ ,  $\tilde{p}(w)$  é o único ponto crítico de  $f_w$  próximo de  $p$ .

A função  $w \mapsto \tilde{p}(w)$  é dita a *continuação analítica* do ponto crítico  $p$ .

**Sugestão:** Considere um representante do mapa  $f$  numa carta local de  $X$  e aplique o Teorema da Função Implícita.

**Ex 4.7.** Mostre a seguinte fórmula de derivação para a função *valor crítico*  $A : W_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A(w) := f(w, \tilde{p}(w))$ :  $\forall v \in W$ ,  $w_0 \in W_\epsilon$ ,

$$(DA)_{w_0}(v) = D[f(w, \tilde{p}(w))]_{w=w_0}(v).$$

**Ex 4.8.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade sem bordo,  $f_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $W$  um espaço vectorial de dimensão finita consistindo de funções polinomiais  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definindo  $f : W \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(Q, x) := f_0(x) + Q(x)$ , considere um ponto crítico não degenerado  $p_0 \in X$  de  $f_0$ , a continuação analítica  $\tilde{p} : W_\epsilon \rightarrow X$  de  $p_0$ , definida Exercício 4.6, e a função  $A : W_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A(Q) := f(Q, \tilde{p}(Q))$  do Exercício 4.7. Mostre que  $\forall Q \in W_\epsilon, V \in W$ .

$$(DA)_Q(V) = V(\tilde{p}(Q)).$$

**Ex 4.9.** Mostre que se a variedade  $X$  é compacta e  $f_0$  é uma função com  $N$  pontos críticos, todos não degenerados, então para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno existem funções suaves  $\tilde{p}_i : W_\epsilon \rightarrow X$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que para cada  $w \in W_\epsilon$ ,  $f_w$  é uma função com  $N$  pontos críticos  $\{\tilde{p}_1(w), \dots, \tilde{p}_N(w)\}$ , todos não degenerados.

**Ex 4.10.** Sejam  $X$  uma variedade sem bordo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f^{-1}[a, b]$  é um conjunto compacto, e  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo de suporte compacto tal que

- (a)  $\nabla f(x) \cdot \xi(x) \geq 0, \quad \forall x \in X,$
- (b)  $\nabla f(x) \cdot \xi(x) = 1, \quad \forall x \in f^{-1}[a, b],$

Finalmente, seja  $\varphi^t$  o fluxo do campo  $\xi$ . Mostre que:

- (a)  $f$  não tem pontos críticos em  $f^{-1}[a, b]$ .
- (b)  $t \mapsto f(\varphi^t(x))$  é uma função crescente,  $\forall x \in X$ .
- (c)  $\varphi^t(f^{-1}[a, +\infty)) = f^{-1}[a + t, +\infty)$ , para cada  $t \geq 0$  tal que  $a + t \leq b$ .

**Sugestão:** Veja que  $f(\varphi^t(x)) = f(x) + t$ , quaisquer que sejam  $a \leq f(x) \leq b$ , e  $t \geq 0$  tal que  $f(x) + t \leq b$

**Ex 4.11.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave entre variedades compactas,  $Y$  sem bordo. Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(Y)$  mostre que existe uma aplicação suave  $\tilde{f} : ] - \delta, \delta[ \times X \rightarrow Y$  tal que para todo  $x \in X$ ,

- (a)  $\tilde{f}(0, x) = f(x),$
- (b)  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(0, x) = \xi(f(x)).$

**Sugestão:** Use o teorema da vizinhança tubular para construir uma família a um parâmetro  $\tilde{f}_t(x) = \tilde{f}(t, x)$  de perturbações do mapa  $f : X \rightarrow Y$  na direcção do campo de vectores  $\xi$  tangente a  $Y$ .

## Chapter 5

# Transversalidade

Sejam  $Y$  e  $Z$  duas subvariedades duma variedade  $X$  que se intersectam num ponto  $p \in Y \cap Z$ . Esta intersecção diz-se *robusta em  $X$*  quando quaisquer perturbações  $\tilde{Y} \subset X$  e  $\tilde{Z} \subset X$  suficientemente próximas de  $Y$  e  $Z$  respectivamente se intersectarem num ponto  $\tilde{p} \in \tilde{Y} \cap \tilde{Z}$  próximo de  $p$ . O conceito de *transversalidade* que iremos introduzir e estudar neste capítulo, encapsula esta ideia intuitiva de intersecção robusta.

### 5.1 Teorema de Sard

O Teorema de Sard é um ingrediente fundamental na caracterização da transversalidade.

Dado um mapa suave  $f : X^n \rightarrow Y^k$  definimos

$$C(f) := \{x \in X^n : \text{rank}(Df_x) < k\}.$$

**Teorema 5.1.1** (Sard). Dado um mapa suave  $f : X^n \rightarrow Y^k$  o conjunto  $f(C(f))$  de medida nula em  $Y^k$ .

Dizemos que um subconjunto  $A \subset X^n$  tem *medida nula* numa variedade  $X^n$  se  $A$  tiver medida nula em todas as cartas locais de  $X^n$ . Por outras palavras, qualquer que seja  $\phi : U \subset X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  carta local de  $X^n$ ,  $\phi(A \cap U)$  deve ter medida nula em  $\mathbb{R}^n$ .

Recordemos que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem *medida nula em  $\mathbb{R}^n$*  se para cada  $\epsilon > 0$  existe uma família numerável de rectângulos  $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$  e  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{vol}_n(R_i) \leq \epsilon$ . Por *rectângulo* entenda-se qualquer produto de intervalos fechados  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Por fim, chama-se volume  $n$ -dimensional do rectângulo  $R$  ao produto

$$\text{vol}_n(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Pelo Teorema de integração por mudança de variáveis, difeomorfismos de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  transformam conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula (Exercício 5.2). Logo, se um conjunto  $A \subset X^n$  for coberto pelos domínios  $U$  e  $V$  de duas cartas  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então  $\phi(A)$  tem medida nula sse  $\psi(A)$  tem medida nula. Observe que  $\psi(A)$  é a imagem de  $\phi(A)$  pelo difeomorfismo de mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1}$ .

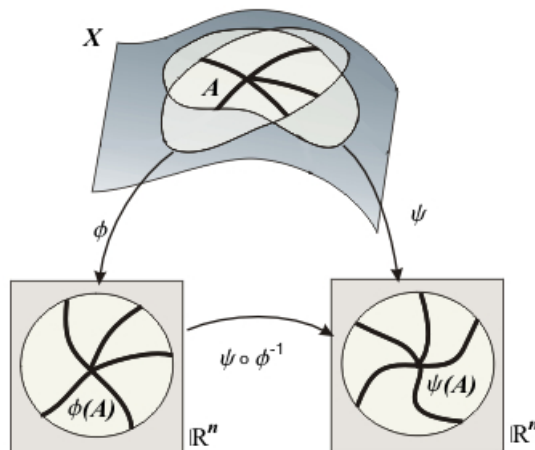


Figure 5.1: Ter medida nula independe das cartas

**Proposição 5.1.1.** Seja  $\{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$  um atlas da variedade  $X^n$ . Dado  $A \subset X^n$ , se para todo  $i \in I$ ,  $\phi_i(A \cap U_i)$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$  então  $A$  tem medida nula em  $X^n$ .

*Proof.* Exercício 5.1. □

Vejamos agora dois corolários do Teorema de Sard.

**Corolário 5.1.1.** Se  $n < k$ , para todo o mapa suave  $f : X^n \rightarrow Y^k$ , o conjunto  $f(X^n)$  tem medida nula em  $Y^k$ .

*Proof.* Neste caso,  $\text{rank}(Df_x) \leq n$ , para todo  $x \in X^n$ . Logo  $C(f) = X^n$ , e, pelo Teorema de Sard,  $f(X^n) = f(C(f))$  tem medida nula. □

**Corolário 5.1.2.** Dado um mapa suave  $f : X^n \rightarrow Y^k$ , o conjunto dos valores críticos de  $f$  tem medida nula.

*Proof.* Se  $n < k$  então  $f(X^n)$  tem medida nula em  $Y^k$ , e este conjunto contém todos os valores críticos de  $f$ . No caso  $n \geq k$ ,  $C(f) = \{x \in X^n : \text{rank}(Df_x) < k\}$  é exactamente o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , enquanto  $f(C(f))$  é o conjunto dos valores críticos de  $f$ . □

**Observação 5.1.1.** Pelo Exercício 2.11 o conjunto  $\text{Crit}(f)$  de todos os pontos críticos de  $f : X \rightarrow Y$  é fechado em  $X$ . Se  $X$  for compacta então  $f(\text{Crit}(f))$  é compacto, pelo que o conjunto  $Y \setminus f(\text{Crit}(f))$  dos valores regulares de  $f$  é aberto em  $Y$  (Exercício 5.9).

**Observação 5.1.2.** O Teorema principal desta secção foi demonstrado em 1942 pelo matemático americano Arthur Sard. A sua conclusão permanece válida, mais geralmente, para mapas de classe  $C^r$   $f : X^n \rightarrow Y^k$  onde  $r \geq 1$  e  $r \geq n - k + 1$ .

### 5.1.1 Esboço da Prova do Teorema de Sard

Começemos por notar que basta demonstrar que para cada  $p \in X^n$  existe um aberto  $U_p \subseteq X^n$  com  $p \in U_p$  tal que  $f(C(f) \cap U_p)$  tem medida nula. De facto podemos cobrir  $X^n$  com um atlas cujas cartas tenham domínios contidos nos abertos  $U_p$ . A imagem do conjunto  $C(f)$  nessas cartas tem medida nula. Logo, pela Proposição 5.1.1,  $f(C(f))$  tem medida nula.

Como a condição acima é local podemos sem perda de generalidade supor que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma função suave definida num domínio aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Vamos aqui esboçar a demonstração em três casos apenas. A prova geral pode ser lida no livro [17] de J. Milnor, ou ainda no apêndice I do livro [5] de V. Guillemin e A. Polack. O presente esboço de prova está baseado no argumento de J. Milnor.

Dada uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  de classe  $C^r$  e um inteiro  $r \in \mathbb{N}$  definimos

$$C_r(f) := \{x \in D : Df_x = 0, D^2f_x = 0, \dots, D^r f_x = 0\}.$$

**Lema 5.1.1.** Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  é de classe  $C^{r+1}$  com  $r > \frac{n}{k} - 1$  então o conjunto  $f(C_r(f))$  tem medida nula.

*Proof.* Denotemos por  $\mathcal{L}^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$  o espaço das aplicações  $l$ -lineares  $B : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Como a aplicação  $D^{r+1}f : D \rightarrow \mathcal{L}^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$  é suave ela é também localmente limitada. Pela observação acima podemos supor que  $D$  é limitado em  $\mathbb{R}^n$  e que  $D^{r+1}f$  é limitada em  $D$ . Seja  $K$  uma constante positiva tal que para todo  $x \in D$ ,  $\|D^{r+1}f_x\| \leq (r+1)!K$ .

Usando um desenvolvimento de Taylor de ordem  $r+1$  temos para cada  $x \in C(f)$  e  $y \in D$  tal que  $[x, y] \subset D$ ,

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} D^{r+1}f_{x+t(y-x)}(y-x, \dots, y-x) dt,$$

o que implica que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq K \|y - x\|^{r+1}. \quad (5.1)$$

Seja agora  $\{R_1, \dots, R_N\}$  uma cobertura de  $C(f)$  formada por  $N$  cubos de lado  $\varepsilon$ , contidos em  $D$ , com interiores disjuntos dois a dois e  $R_j \cap C(f) \neq \emptyset$  para cada  $j = 1, \dots, N$ . Então

$$N \varepsilon^n = \sum_{j=1}^N \text{vol}_n(R_j) \leq \text{vol}_n(D). \quad (5.2)$$

Como cada cubo  $R_j \subset \mathbb{R}^n$  tem diâmetro  $\sqrt{n}\varepsilon$ , tomando  $x \in R_j \cap C(f)$  por (5.1) a imagem  $f(R_j) \subset \mathbb{R}^k$  está contida na bola de centro  $f(x)$  e raio  $K n^{\frac{r+1}{2}} \varepsilon^{r+1}$ . Logo, designando por  $\sigma_k$  o volume da bola de raio 1 em  $\mathbb{R}^k$ , temos

$$\text{vol}_k(f(R_j)) \leq \sigma_k K^k n^{\frac{k(r+1)}{2}} \varepsilon^{k(r+1)} = \tilde{K} \varepsilon^{k(r+1)}$$

onde  $\tilde{K}$  é uma constante dependente dos inteiros  $n$ ,  $k$  e  $r$ . Finalmente, usando (5.2) obtemos

$$\text{vol}_k(f(C(f))) \leq N \tilde{K} \varepsilon^{k(r+1)} \leq \tilde{K} \text{vol}_n(D) \varepsilon^{k(r+1)-n}.$$

Da hipótese  $r > \frac{n}{k} - 1$  resulta que  $k(r+1) - n > 0$ , pelo que o lado direito da desigualdade acima tende para 0 quando  $\varepsilon \searrow 0$ , provando assim que  $\text{vol}_k(f(C(f))) = 0$ .  $\square$

**Caso (A),**  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  tem-se  $C_1(f) = \{x \in D : f'(x) = 0\}$ . Neste caso  $n = k = 1$ , a condição  $r > \frac{n}{k} - 1 = 0$  é satisfeita com  $r = 1$ , e o Lema 5.1.1 mostra que  $f(C_1(f))$  tem medida nula em  $\mathbb{R}$ .

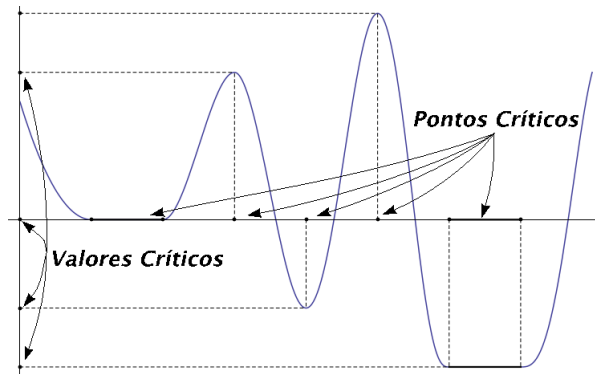


Figure 5.2: Valores críticos duma função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**Caso (B),**  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^3$  tem-se

$$C_2(f) = \{x \in D : Df_x = 0 \text{ e } D^2f_x = 0\}.$$



Neste caso  $n = 2$ ,  $k = 1$ , a condição  $r > \frac{n}{k} - 1 = 1$  é satisfeita com  $r = 2$ , e o Lema 5.1.1 mostra que  $f(C_2(f))$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^2$ .

O conjunto dos pontos críticos de  $f$ ,  $C_1(f) = \{x \in D: Df_x = 0\}$ , contem o conjunto  $C_2(f)$ . Note-se que  $Df_x = 0$  sse  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0$ , enquanto  $D^2f_x = 0$  sse  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 0$ .

Vejamos agora que  $f(C_1(f) \setminus C_2(f))$  também tem medida nula. Dado  $p \in C_1 \setminus C_2$ , temos  $Df_p = 0$ , mas uma das derivadas parciais de segunda ordem:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p)$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p)$ , será não nula. Suponhamos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) \neq 0$ . Os outros dois casos são tratados de maneira análoga. Seja  $U_p$  uma vizinhança de  $p$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_p$ . Consideremos a curva definida por  $\Sigma = \{x \in U_p : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0\}$ . Pelo Teorema da Função Implícita, o conjunto  $\Sigma$  é o gráfico duma função suave  $x_1 = \varphi(x_2)$ , e em particular é uma variedade de dimensão 1. Seja  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $g = f|_{\Sigma}$ . Por definição de  $\Sigma$  é claro que  $C \cap U_p \subseteq \Sigma$ . Como  $f$  é uma extensão de  $g$ , os pontos críticos de  $f$  são também pontos críticos de  $g$ . Logo  $C_1(f) \cap U_p \subseteq C_1(g)$  o que implica  $f(C_1(f) \cap U_p) \subseteq g(C_1(g))$ . Aplicando o Caso (A) à função de  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , vemos que este último conjunto tem medida nula.

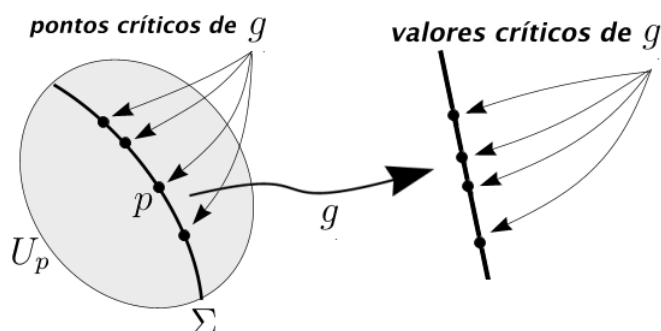


Figure 5.3: Pontos e valores críticos de  $g = f|_{\Sigma}$

**Caso (C),**  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um mapa de classe  $C^2$  define-se

$$C_1(f) = \{x \in D: Df_x = 0\}.$$

Neste caso  $n = k = 2$ , a condição  $r > \frac{n}{k} - 1 = 0$  é satisfeita com  $r = 1$ , e o Lema 5.1.1 mostra que  $f(C_1(f))$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^2$ .

O conjunto dos pontos críticos de  $f$ ,  $C(f) = \{x \in D: \det(Df_x) = 0\}$ , contem o conjunto  $C_1(f)$ . Observamos que  $Df_x = 0$  equivale a dizer que se anulam as quatro derivadas parciais  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)$ .

Vejam agora que  $f(C(f) \setminus C_1(f))$  também tem medida nula. Dado  $p \in C \setminus C_1$ , temos  $\det(Df_p) = 0$ , mas uma das derivadas parciais da matriz Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$  não se anula. Suponhamos que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$ . Os outros três casos são tratados de maneira análoga. Seja  $U_p$  uma vizinhança aberta de  $p$  tal que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_p$ . Consideremos o conjunto aberto  $J = f_1(U_p) \subseteq \mathbb{R}$ . Para cada  $t \in J$ , seja

$$\Sigma_t = \{x \in U_p : f_1(x) = t\} = f^{-1}(\{t\} \times \mathbb{R}).$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita a cada um dos conjuntos  $\Sigma_t$ , vemos que estes são gráficos de funções suaves  $x_1 = \varphi_t(x_2)$ . Seja então para cada  $t \in J$ ,  $g_t : \Sigma_t \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição de  $f_2$  a  $\Sigma_t$ ,  $g_t = f_2|_{\Sigma_t}$ , e consideremos o conjunto dos seus pontos críticos  $C_1(g_t) = \{x \in \Sigma_t : D(g_t)_x = 0\}$ . Como cada  $\Sigma_t$  é uma variedade de dimensão 1, pelo Caso (A) resulta que  $g_t(C_1(g_t))$  tem medida nula em  $\mathbb{R}$ , para todo  $t \in J$ .

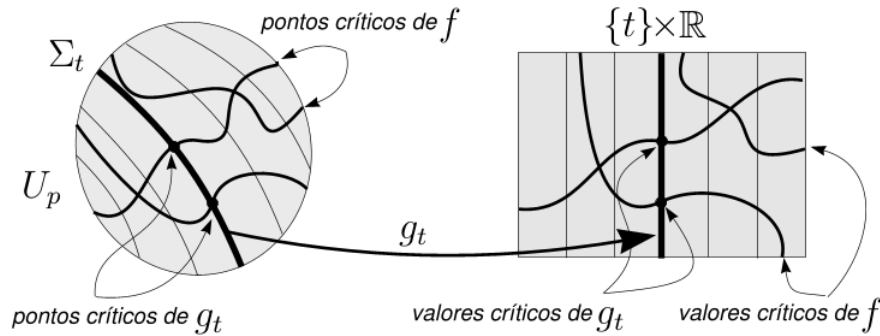


Figure 5.4: Pontos e valores críticos de  $g_t = f|_{\Sigma_t}$

Se  $x \in C(f) \cap \Sigma_t$  é um ponto crítico de  $f$  então os gradientes  $\nabla f_1(x)$  e  $\nabla f_2(x)$  são linearmente dependentes. Por outro lado, como em  $\Sigma_t$  temos  $f_1 \equiv t$  segue que  $\nabla f_1(x) \in (T_x \Sigma_t)^\perp \setminus \{0\}$ . Por dependência linear destes gradientes vemos que também  $\nabla f_2(x) \in (T_x \Sigma_t)^\perp$ , o que implica que  $x \in C_1(g_t)$ . Provamos assim que  $C(f) \cap \Sigma_t \subseteq C_1(g_t)$ , donde resulta que  $f(C(f) \cap \Sigma_t) \subseteq g_t(C_1(g_t))$ . Logo,

$$\text{vol}_2(f(C \cap U_p)) \leq \int_J \underbrace{\text{vol}_1(g_t(C_1(g_t)))}_{=0} dt = 0.$$

### Caso Geral.

A prova do caso geral é feita por indução na dimensão do domínio  $X^n$ ,

considerando a hierarquia

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_r$$

onde  $C = C(f)$  designa o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , e para cada inteiro  $j$ ,  $C_j = C_j(f)$  representa o conjunto definido imediatamente antes do lemma 5.1.1. Por este lema, se  $f$  é de classe  $C^r$  com  $r > \frac{n}{k} - 1$  então  $f(C_r)$  tem medida nula em  $Y^k$ .

Para  $1 \leq i \leq \frac{n}{k} - 1$ , mostra-se que  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula usando que numa vizinhança dum ponto  $p \in C_i \setminus C_{i+1}$  há sempre uma derivada não nula de ordem  $i + 1$ . Com o argumento do Caso (B) reduz-se o problema a um mapa definido num domínio de dimensão menor.

Finalmente, mostra-se que  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula usando que numa vizinhança dum ponto  $p \in C \setminus C_1$  há sempre uma derivada de primeira ordem não nula. Com o argumento do Caso (C) reduz-se o problema a mapas entre variedades de dimensão menor.

## 5.2 Transversalidade

Sejam  $E$  e  $F$  subespaços lineares de  $\mathbb{R}^n$ .

Dizemos que  $E$  e  $F$  se *intersectam transversalmente* em  $\mathbb{R}^n$  se para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , os subespaços afins  $x + E$  e  $y + F$ , respectivamente paralelos a  $E$  e  $F$ , se intersectam, i.e.,  $(x + E) \cap (y + F) \neq \emptyset$ .

**Proposição 5.2.1.** Dois subespaços lineares  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  intersectam-se transversalmente em  $\mathbb{R}^n$  sse  $\mathbb{R}^n = E + F$ .

*Proof.* Seja  $p \in (x + E) \cap (y + F)$ . Então existem vectores  $e \in E$  e  $f \in F$  tais que  $p = x + e = y + f$ . Logo,  $x - y = (-e) + f \in E + F$ . Vemos assim que a intersecção entre  $x + E$  e  $y + F$  persiste para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sse  $\mathbb{R}^n = E + F$ .  $\square$

Por exemplo, em  $\mathbb{R}^3$ :

- (a) Duas rectas nunca são transversais.
- (b) Dois planos são transversais sse não são paralelos, nem coincidentes.
- (c) Uma recta e um plano são transversais sse a recta não é paralela ao plano, nem está nele contida.

Vamos agora estender o conceito de transversalidade a subvariedades. Como veremos, intersecções *transversais* são ‘robustas’, no sentido que persistem se deformarmos pouco cada uma das subvariedades concorrentes.

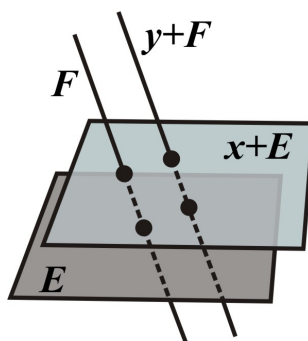


Figure 5.5: Transversal Subspaces

**Definição 5.2.1.** Duas subvariedades  $X, Y \subset Z$  dizem-se transversais em  $Z$ , e escrevemos  $X \pitchfork Y$ , se  $T_p X + T_p Y = T_p Z$  para todo o ponto  $p \in X \cap Y$ .

Mais geralmente, define-se a transversalidade entre um mapa  $f : X \rightarrow Z$  e uma subvariedade  $Y \subset Z$ , que deve ser interpretada como a transversalidade entre  $f(X)$  e  $Y$ .

**Definição 5.2.2.** Dadas variedades  $X$  e  $Y \subset Z$  e um mapa suave  $f : X \rightarrow Z$ , dizemos que  $f$  é transversal a  $Y$  em  $Z$ , e escrevemos  $f \pitchfork Y$ , se para cada  $x \in X$ ,  $Df_x(T_x X) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} Z$  sempre que  $f(x) \in Y$ .

Além disso, dado  $x \in X$ , escrevemos  $f \pitchfork_x Y$  para significar que  $f(x) \notin Y$  ou  $Df_x(T_x X) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} Z$ .

Chama-se *codimensão* duma subvariedade  $X \subset Y$  à diferença

$$\text{codim}(X, Y) := \dim(Y) - \dim(X).$$

Podemos agora generalizar o Teorema das pré-imagens.

**Teorema 5.2.1** (Teorema das pré-imagens). Sejam  $X, Y \subset Z$  variedades. Se um mapa suave  $f : X \rightarrow Z$  é transversal a  $Y$  em  $Z$  então  $f^{-1}(Y)$  é uma variedade tal que  $\text{codim}(f^{-1}(Y), X) = \text{codim}(Y, Z)$ .

**Lema 5.2.1.** Sejam  $X, Y \subset Z$  variedades e  $f : X \rightarrow Z$  um mapa suave. Para cada ponto  $p \in f^{-1}(Y)$  existem vizinhanças abertas  $U_p$  de  $p$  em  $X$  e  $V_q$  de  $q = f(p)$  em  $Z$ , e existe uma submersão  $g : V_q \rightarrow \mathbb{R}^l$ , com  $l = \text{codim}(Y, Z)$ , tais que  $f(U_p) \subseteq V_q$  e  $U_p \cap f^{-1}(Y) = (g \circ f|_{U_p})^{-1}(0)$ .

*Proof.* Aplicando o Teorema 2.1.1 ao mergulho inclusão  $j : Y \hookrightarrow Z$  vemos que existem cartas locais  $\phi : (Y, q) \simeq (\mathbb{R}^k, 0)$  e  $\psi : (Z, q) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que, sendo  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ , a inclusão linear definida por  $i(x) = (x, 0)$ , o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (Y, q) & \xrightarrow{j} & (Z, q) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^k, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

Esta comutatividade traduz-se na relação  $\psi(x) = (\phi(x), 0)$  para  $x \in Y$ . Consideremos a projecção  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\pi(x, y) = y$ , que satisfaz  $i(\mathbb{R}^k) = \pi^{-1}(0)$ . Seja  $V_q$  o domínio da carta  $\psi$ , e tomemos  $U_p$  vizinhança aberta de  $p$  tal que  $f(U_p) \subseteq V_q$ . Definimos  $g : V_q \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  por  $g = \pi \circ \psi$ . O mapa  $g$  é uma submersão, e  $g^{-1}(0) = V_q \cap Y$ , donde segue que

$$U_p \cap f^{-1}(Y) = U_p \cap f^{-1}(g^{-1}(0)) = (g \circ f|_{U_p})^{-1}(0). \quad \square$$

*Demonstração do Teorema 5.2.1.* Pelo lema anterior, dado  $p \in f^{-1}(Y)$  podemos tomar uma vizinhança aberta  $U_p \subset X$  do ponto  $p$ , outra vizinhança aberta  $V_q \subset Z$  do ponto  $q = f(p)$  e uma submersão  $g : V_q \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $l = \text{codim}(Y, Z)$ , tais que  $U_p \cap f^{-1}(Y) = (g \circ f|_{U_p})^{-1}(0)$ . Seja  $x \in U_p \cap f^{-1}(Y)$ . Porque  $g$  é uma submersão  $Dg_{f(x)}(T_{f(x)}Z) = \mathbb{R}^l$ . Pela hipótese de transversalidade  $f \pitchfork Y$ ,  $Df_x(T_xX) + T_{f(x)}Y = T_{f(x)}Z$ . Logo,

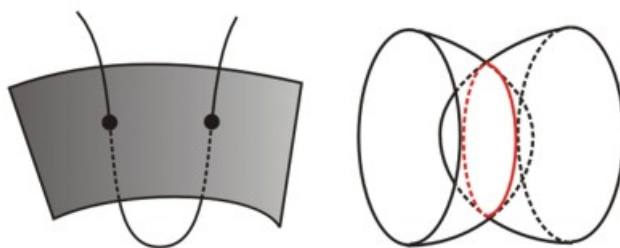
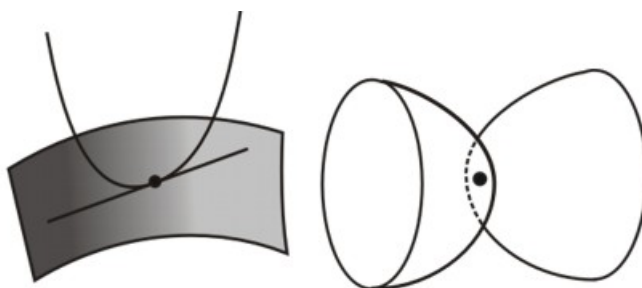
$$\begin{aligned} D(g \circ f|_{U_p})_x(T_xX) &= Dg_{f(x)}(Df_x(T_xX)) \\ &= Dg_{f(x)}(Df_x(T_xX) + \underbrace{T_{f(x)}Y}_{Dg_{f(x)}(\cdot)=0}) \\ &= Dg_{f(x)}(T_{f(x)}Z) = \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

o que mostra que 0 é um valor regular de  $g \circ f|_{U_p}$ . Pelo Teorema 1.2.3 segue que  $U_p \cap f^{-1}(Y) = (g \circ f|_{U_p})^{-1}(0)$  é uma variedade com dimensão  $\dim(X) - l$  e codimensão  $\text{codim}(f^{-1}(Y), X) = l = \text{codim}(Y, Z)$ .  $\square$

**Corolário 5.2.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  subvariedades de  $Z$ . Se  $X \pitchfork Y$  em  $Z$  então  $X \cap Y$  é uma variedade cuja dimensão, e codimensão, satisfazem as fórmulas

- (a)  $\dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(Z)$
- (b)  $\text{codim}(X \cap Y, Z) = \text{codim}(X, Z) + \text{codim}(Y, Z)$

*Proof.* Basta aplicar o teorema anterior ao mapa de inclusão  $i : X \rightarrow Z$ ,  $i(x) = x$ . Note que  $X \pitchfork Y$  sse  $i \pitchfork Y$ , e que  $i^{-1}(Y) = X \cap Y$ .  $\square$

Figure 5.6: Intersecções transversais em  $\mathbb{R}^3$ Figure 5.7: Intersecções não transversais em  $\mathbb{R}^3$ 

O lema seguinte dá-nos uma condição de transversalidade entre um subespaço linear  $F \subset \mathbb{R}^n$  e outro subespaço linear  $S = \text{Nuc}(\Phi)$  que seja o conjunto solução dum sistema linear homogéneo  $\Phi(x) = 0$  (figura 5.8).

**Lema 5.2.2** (Núcleo Transversal). Sejam  $F \subset E$  e  $G$  espaços lineares, e  $\Phi: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejectiva. Então

$$\text{Nuc}(\Phi) \pitchfork F \text{ em } E \quad \text{sse} \quad \Phi|_F: F \rightarrow G \text{ é sobrejectiva.}$$

*Proof.* Suponhamos que  $\text{Nuc}(\Phi) \pitchfork F$  em  $E$ . Então

$$\Phi(F) = \Phi\left(F + \underbrace{\text{Nuc}(\Phi)}_{\Phi(\cdot)=0}\right) = \Phi(E) = G,$$

o que mostra que  $\Phi|_F: F \rightarrow G$  é sobrejectiva.

Suponhamos agora que  $\Phi|_F: F \rightarrow G$  é sobrejectiva. Dado  $x \in E$ , como  $\Phi(x) \in G$ , existe  $f \in F$  tal que  $\Phi(f) = \Phi(x)$ . Então  $\Phi(x - f) = 0$ , ou seja  $x - f \in \text{Nuc}(\Phi)$ , o que implica  $x \in \text{Nuc}(\Phi) + F$ . Logo  $E = \text{Nuc}(\Phi) + F$ .  $\square$

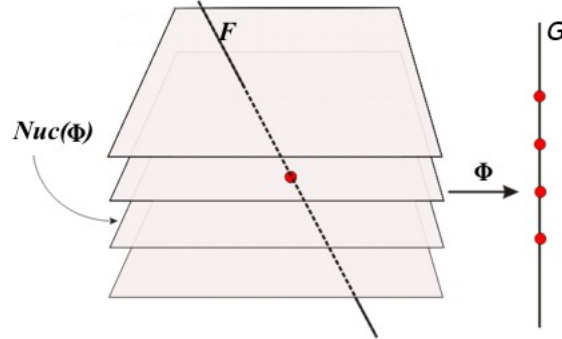


Figure 5.8: Transversalidade ao núcleo

**Lema 5.2.3.** Sejam  $E$ ,  $F$  e  $G$  espaços lineares, e  $\Phi: E \rightarrow F$ ,  $\Psi: E \rightarrow G$  aplicações lineares sobrejectivas. São equivalentes as afirmações:

- (1)  $\text{Nuc}(\Phi) \pitchfork \text{Nuc}(\Psi)$  em  $E$ ,
- (2)  $\Phi(\text{Nuc}(\Psi)) = F$ ,
- (3)  $\Psi(\text{Nuc}(\Phi)) = G$ ,
- (4)  $(\Phi, \Psi) : E \rightarrow F \times G$  é sobrejectiva.

*Proof.* Pelo Lema 5.2.2, (1)  $\Leftrightarrow$  (2), e (1)  $\Leftrightarrow$  (3). Logo (1), (2) e (3) são equivalentes entre si. Vejamos que (2) e (3) implicam (4). Dados  $f \in F$  e  $g \in G$ , por (2) existe  $x \in E$  tal que  $\Psi(x) = 0$  e  $\Phi(x) = f$ , enquanto por (3) existe  $y \in E$  tal que  $\Phi(y) = 0$  e  $\Psi(y) = g$ . Logo

$$(\Phi(x + y), \Psi(x + y)) = (\Phi(x), \Psi(y)) = (f, g)$$

o que prova (4). Reciprocamente, supondo (4), dado  $f \in F$  existe  $x \in E$  tal que  $(\Phi(x), \Psi(x)) = (f, 0)$ , o que implica (2).  $\square$

Deste lema concluímos que (2)  $\Leftrightarrow$  (3). A prova da proposição seguinte baseia-se nesta equivalência.

Vamos agora usar o Teorema de Sard para mostrar que a propriedade de transversalidade é *genérica* em famílias de mapas que verifiquem uma condição de transversalidade apropriada.

Toda a aplicação suave  $f: W \times X \rightarrow Z$  pode ser vista como uma família de aplicações suaves  $f_w: X \rightarrow Z$  indexada em  $W$ , onde para cada  $w \in W$ ,  $f_w(x) := f(w, x)$ .

Vamos designar por  $\pi: W \times X \rightarrow W$  a projecção canónica,  $\pi(w, x) := w$ .

**Teorema 5.2.2** (Transversalidade Genérica). Se  $f: W \times X \rightarrow Z$  é um mapa suave tal que  $f \pitchfork Y$  então para cada  $w \in W$ ,

- (a)  $(\pi|_{f^{-1}(Y)})^{-1}(w) = \{w\} \times (f_w)^{-1}(Y)$ ,
- (b)  $(w, x)$  é ponto regular de  $\pi|_{f^{-1}(Y)} \Leftrightarrow f_w \pitchfork_x Y$  em  $Z$ ,  $\forall (w, x) \in f^{-1}(Y)$ ,
- (c)  $w$  é valor regular de  $\pi|_{f^{-1}(Y)}: f^{-1}(Y) \rightarrow W \Leftrightarrow f_w \pitchfork Y$  em  $Z$ .

Em particular, para quase todo  $w \in W$ ,  $f_w \pitchfork Y$  em  $Z$ , i.e., o conjunto

$$\{w \in W: f_w \text{ não é transversal a } Y\}$$

tem medida nula.

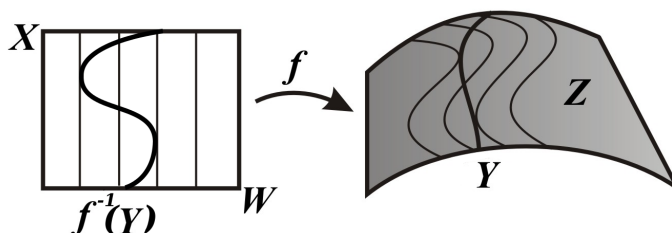


Figure 5.9: Transversalidade duma família de mapas

*Proof.* A primeira alínea resulta de se ter

$$(\pi|_{f^{-1}(Y)})^{-1}(w) = f^{-1}(Y) \cap (\{w\} \times X) = \{w\} \times (f_w)^{-1}(Y).$$

Para as alíneas (b) e (c) vamos supor que existe  $g: Z \rightarrow \mathbb{R}^l$  suave tal que  $0$  é um valor regular de  $g$  e  $Y = g^{-1}(0)$ . Seja  $h = g \circ f: W \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Então  $0$  é um valor regular de  $h$  porque  $f \pitchfork Y$ . Com efeito, se  $h(w, x) = 0$  então  $f(w, x) \in Y$  e

$$\begin{aligned} Dh_{(w,x)}(T_w W \times T_x X) &= Dg_{f(w,x)} Df_{(w,x)}(T_w W \times T_x X) \\ &= Dg_{f(w,x)}[Df_{(w,x)}(T_w W \times T_x X) + \text{Nuc}(Dg_{f(w,x)})] \\ &= Dg_{f(w,x)}[Df_{(w,x)}(T_w W \times T_x X) + T_{f(w,x)} Y] \\ &= Dg_{f(w,x)}[T_{f(w,x)} Z] = \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

Dado  $(w, x) \in h^{-1}(0) = f^{-1}(Y)$ , vamos aplicar o Lema 5.2.3 às duas aplicações lineares sobrejectivas:



- (a)  $Dh_{(w,x)} : T_w W \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}^l$ , e  
 (b)  $D\pi_{(w,x)} : T_w W \times T_x X \rightarrow T_w W$ .

São equivalentes as afirmações:

- (1)  $f_w \pitchfork_x Y$ ,  
 (2)  $D(g \circ f_w)_x : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^l$  é sobrejectiva,  
 (3)  $Dh_{(w,x)}(\{0\} \times T_x X) = Dh_{(w,x)}(\text{Nuc}(D\pi_{(w,x)})) = \mathbb{R}^l$ ,  
 (4)  $D\pi_{(w,x)}(T_{(w,x)}f^{-1}(Y)) = D\pi_{(w,x)}(\text{Nuc}(Dh_{(w,x)})) = T_w W$ ,  
 (5)  $(w, x)$  é um ponto regular de  $\pi|_{f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \rightarrow W$ .

A equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) resulta de aplicar o Lema 5.2.2 ao epimorfismo  $Dg_{f_w(x)} : T_{f_w(x)}Z \rightarrow \mathbb{R}^l$  que tem núcleo  $\text{Nuc}(Dg_{f_w(x)}) = T_{f_w(x)}Y$ . A equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (4) segue do Lema 5.2.3 aplicado aos epimorfismos  $Dh_{(w,x)}$  e  $D\pi_{(w,x)}$ . As restantes equivalências, (2) $\Leftrightarrow$ (3) e (4) $\Leftrightarrow$ (5), resultam das definições dos mapas em causa. A equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (5) prova a alínea (b). Logo,  $f_w \pitchfork Y$  em  $Z$  sse  $w$  for um valor regular de  $\pi|_{f^{-1}(Y)}$ , o que prova a alínea (c).

A afirmação final segue de aplicar o Teorema de Sard ao mapa  $\pi|_{f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \rightarrow W$ .  $\square$

**Corolário 5.2.2.** Nas condições do Teorema 5.2.2, se  $X$  e  $Y$  são variedades compactas, o conjunto

$$W_{\pitchfork} := \{w \in W : f_w \pitchfork Y \text{ em } Z\}$$

é aberto e denso em  $W$ . Além disso  $(f_w)^{-1}(Y) \simeq (f_{w_0})^{-1}(Y)$  sempre que  $w, w_0 \in W_{\pitchfork}$  estejam suficientemente próximos.

*Proof.* Seja  $C$  o conjunto dos pontos críticos da projecção

$$\pi|_{f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \rightarrow W, \quad \pi(w, x) = w.$$

Pelo Exercício 2.11 o conjunto  $C$  é fechado em  $f^{-1}(Y)$ . Por outro lado como  $Y$  é compacta, a pré-imagem  $f^{-1}(Y)$  é fechada em  $W \times X$ . Logo  $C$  é fechado em  $W \times X$ .

Vejamos que o conjunto  $\pi(C)$  dos valores críticos de  $\pi|_{f^{-1}(Y)}$  é fechado em  $W$ . Tomemos uma sucessão convergente  $w_n \in \pi(C)$ ,  $w_n \rightarrow w$ , e vejamos que  $w \in \pi(C)$ . Para cada  $n$  existe  $x_n \in X$  tal que  $(w_n, x_n) \in C$ . Como  $X$  é compacto,  $x_n$  admite uma subsucessão convergente  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Logo  $(w_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (w, x)$ , e como  $C$  é fechado segue que  $(w, x) \in C$ . Isto prova que  $w = \pi(w, x) \in \pi(C)$ .

Pelo Teorema 5.2.2 temos  $W_{\pitchfork} = W \setminus \pi(C)$ . Logo, como  $\pi(C)$  é fechado o conjunto  $W_{\pitchfork}$  é aberto em  $W$ . A densidade de  $W_{\pitchfork}$  em  $W$  resulta também do Teorema 5.2.2.

Finalmente, pelo Teorema 2.2.3, usando a alínea (a) do Teorema 5.2.2, temos

$$\begin{aligned} (f_w)^{-1}(Y) &\simeq \{w\} \times (f_w)^{-1}(Y) = (\pi|_{f^{-1}(Y)})^{-1}(w) \simeq (\pi|_{f^{-1}(Y)})^{-1}(w_0) \\ &= \{w_0\} \times (f_{w_0})^{-1}(Y) \simeq (f_{w_0})^{-1}(Y), \end{aligned}$$

sempre que  $w, w_0 \in W_{\pitchfork}$  sejam valores regulares de  $\pi|_{f^{-1}(Y)}$  suficientemente próximos um do outro.  $\square$

Designamos por  $C^\infty(X, Z)$  o conjunto dos mapas suaves  $f : X \rightarrow Z$ . Este conjunto pode ser munido da seguinte topologia, chamada a Topologia de Whitney. Como  $Z \subset \mathbb{R}^N$ ,  $C^\infty(X, Z)$  é um subconjunto do espaço linear  $C^\infty(X, \mathbb{R}^N)$ . A Topologia de Whitney é induzida pela topologia que passamos agora a definir em  $C^\infty(X, \mathbb{R}^N)$ .

Dados um inteiro  $k \geq 1$ , um conjunto compacto  $K \subset X$ , uma família finita  $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n : 1 \leq i \leq m\}$  de cartas de  $X$  cujos domínios  $U_i$  cobrem  $K$  e uma decomposição  $K = \cup_{i=1}^m K_i$  de  $K$  em conjuntos compactos  $K_i \subset U_i$ , definimos a seminorma

$$\|f\|_{k, K, \mathcal{A}} := \max_{0 \leq j \leq k} \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \phi_i(K_i)} \|D^j(f \circ \phi_i^{-1})(x)\|.$$

A colecção de todas estas seminormas determina uma topologia de espaço vectorial topológico em  $C^\infty(X, \mathbb{R}^N)$ , que por sua vez induz no subespaço  $C^\infty(X, Z)$  a topologia de Whitney.

**Teorema 5.2.3** (René Thom). Dadas variedades  $X$  e  $Y \subset Z$ , se  $X$  e  $Y$  são compactas então o conjunto  $\{f \in C^\infty(X, Z) : f \pitchfork Y\}$  é aberto e denso em  $C^\infty(X, Z)$ .

O Corolário 5.2.2 permite mostrar que qualquer mapa suave  $f : X \rightarrow Z$  pode ser aproximado por um mapa transversal a uma subvariedade  $Y \subset Z$  dada (Exercícios 5.14 e 5.15).

### 5.3 Campos vectoriais genéricos

Um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  diz-se *de Morse* se toda a singularidade  $\xi(p) = 0$ ,  $p \in X$ , for não degenerada, i.e., se  $D\xi_p : T_p X \rightarrow T_p X$  for um isomorfismo.

Define-se o *gráfico de  $\xi$*  como  $G_\xi := \{(x, \xi(x)) \in TX : x \in X\}$ .

**Proposição 5.3.1.** Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ ,  $\xi$  é um campo de Morse sse forem transversais em  $TX$  os gráficos  $G_\xi$  e  $G_0 = X \times \{0\}$ .

Vamos começar por uma versão linear desta proposição.

**Proposição 5.3.2.** Seja  $E$  um espaço linear de dimensão finita, e  $\Phi: E \rightarrow E$  um endomorfismo linear com gráfico  $G_\Phi = \{(u, \Phi(u)) \in E \times E : u \in E\}$ . Então  $G_\Phi \pitchfork G_0 = E \times \{0\}$  em  $E \times E$  sse  $\Phi: E \rightarrow E$  é um isomorfismo.

*Proof.* Suponhamos que  $G_\Phi + G_0 = E \times E$ . Dado  $v \in E$ , consideremos  $(0, v) \in E \times E$ . Este vector pode escrever-se como soma dum vector  $(u, \Phi(u)) \in G_\Phi$  com outro vector  $(z, 0) \in G_0$ . Assim  $(0, v) = (u, \Phi(u)) + (z, 0) = (u+z, \Phi(u))$ , o que implica  $\Phi(u) = v$ . Logo  $\Phi$  é sobrejectiva, e pelo Teorema do núcleo e da imagem em Álgebra Linear,  $\Phi$  é um isomorfismo.

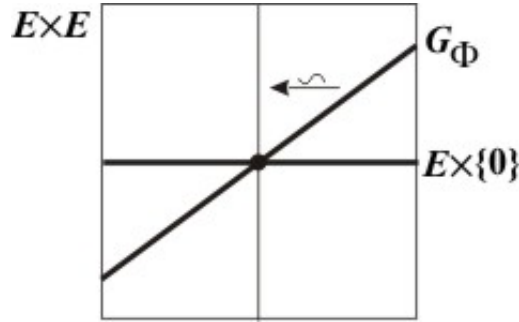


Figure 5.10: Transversalidade entre  $G_\Phi$  e  $G_0$ .

Suponhamos agora que  $\Phi: E \rightarrow E$  é um isomorfismo. Dado  $(v, w) \in E \times E$ , tomemos  $u \in E$  tal que  $\Phi(u) = w$ . Então  $(v, w) = (u, \Phi(u)) + (v - u, 0) \in G_\Phi + E \times \{0\}$ , o que mostra que  $G_\Phi \pitchfork G_0$ .  $\square$

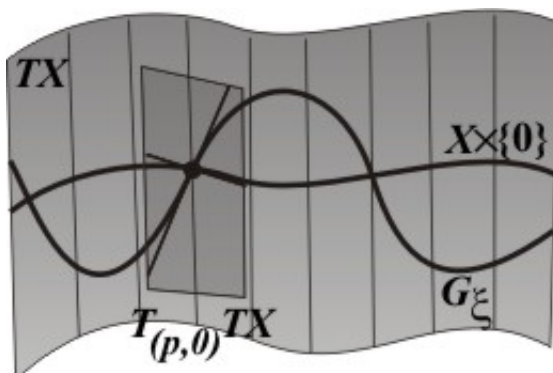
*Demonstração da Proposição 5.3.1.* Começemos por observar que  $G_\xi \cap G_0 = \{(p, 0) : \xi(p) = 0\}$  é o conjunto das singularidades de  $\xi$ . Pelo Exercício 1.13  $T_{(p,0)}TX = T_pX \times T_pX$ . Vejamos agora que se  $p \in X$  é uma singularidade de  $\xi$  então  $T_{(p,0)}G_\xi = G_{D\xi_p}$ . O mapa  $\widehat{\xi}: X \rightarrow G_\xi$ ,  $\widehat{\xi}(x) = (x, \xi(x))$  é um difeomorfismo, pelo que

$$T_{(p,0)}G_\xi = D\widehat{\xi}_p(T_pX) = \{(v, D\xi_p(v)) : v \in T_pX\} = G_{D\xi_p}.$$

Como  $T_{(p,0)}G_0 = T_pX \times \{0\}$ , aplicando a proposição anterior a cada um dos pontos  $(p, 0) \in G_\xi \cap G_0$  obtemos

$$\begin{aligned} G_\xi \pitchfork_{(p,0)} G_0 \text{ em } T_{(p,0)}TX &\Leftrightarrow T_{(p,0)}G_\xi \pitchfork T_{(p,0)}G_0 \text{ em } T_pX \times T_pX \\ &\Leftrightarrow G_{D\xi_p} \pitchfork G_0 \text{ em } T_pX \times T_pX \\ &\Leftrightarrow \det(D\xi_p: T_pX \rightarrow T_pX) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $G_\xi \pitchfork G_0$  em  $TX$  sse  $\xi$  é um campo de Morse.  $\square$

Figure 5.11: Transversalidade entre  $G_\xi$  e  $G_0$ .

Dado um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  numa variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$ , definimos para cada vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_v \in \mathcal{X}^\infty(X)$  como sendo o campo

$$\xi_v(x) = (\xi(x) + v)^T = P_{T_x X}(\xi(x) + v).$$

**Proposição 5.3.3.** Para quase todo o vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , o campo  $\xi_v$  é de Morse.

*Proof.* Consideremos a aplicação  $f: \mathbb{R}^n \times X \rightarrow TX$  definida por  $f(v, x) = (x, \xi_v(x))$ . Vejamos que  $f \pitchfork X \times \{0\}$ . Fixando  $x \in X$  tal que  $f(x, v) = (x, 0)$  temos  $f(v, x) = (0, P_{T_x X}(v)) + (x, P_{T_x X}(\xi(x)))$ . Derivando em  $v$ , como a segunda parcela não depende de  $v$ , obtemos  $Df_{(v,x)}(u, 0) = (0, P_{T_x X}(u))$ . Logo, como a projecção  $P_{T_x X}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$  é sobrejectiva,  $Df_{(v,x)}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{0\} \times T_x X$ . Isto mostra que

$$\begin{aligned} T_{(x,0)}TX &= T_x X \times T_x X = \{0\} \times T_x X + T_x X \times \{0\} \\ &= Df_{(v,x)}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) + T_x X \times \{0\} \\ &= Df_{(v,x)}(\mathbb{R}^n \times T_x X) + T_{(x,0)}X \times \{0\}, \end{aligned}$$

ou seja que  $f \pitchfork_{(v,x)} X \times \{0\}$ . Aplicando agora o Teorema 5.2.2, obtemos que para quase todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_v: X \rightarrow TX$ ,  $f_v(x) = (x, \xi_v(x))$  é transversal a  $X \times \{0\}$  em  $TX$ , o que equivale a  $G_{\xi_v} \pitchfork G_0$  em  $TX$ . Pela Proposição 5.3.1 isto significa que  $\xi_v$  é um campo de Morse.  $\square$

O conjunto dos vectores  $v \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\xi_v$  é um campo de Morse é sempre um conjunto denso. Quando a variedade  $X$  é compacta, este conjunto é aberto (Exercício 5.22). Considerando a topologia de Whitney no espaço  $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ , e a topologia por esta induzida no subespaço  $\mathcal{X}^\infty(X)$ , prova-se o seguinte.

**Proposição 5.3.4.** Numa variedade compacta  $X$  o conjunto dos campos de Morse é aberto e denso em  $\mathcal{X}^\infty(X)$ .

## 5.4 Funções de Morse

Os pontos críticos duma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  são as singularidades do campo gradiente  $\nabla f$ , porque  $Df_p = 0$  sse  $\nabla f(p) = 0$ .

Uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos forem não degenerados (ver Definição 3.7.2).

**Proposição 5.4.1.** Uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é função de Morse sse o campo gradiente  $\nabla f$  for um campo de Morse.

*Proof.* A equivalência segue da Proposição 3.7.2.  $\square$

Os pontos críticos duma função de Morse são todos isolados. Logo, numa variedade compacta são sempre em número finito (Exercício 5.23).

Dada uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  sobre uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^n$ , definimos para cada vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_v(x) = f(x) + v \cdot x$ .

**Proposição 5.4.2.** Para quase todo o vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_v$  é uma função de Morse.

*Proof.* Consideremos o campo  $\xi = \nabla f$ . Seja  $\tilde{f}$  uma extensão local de  $f$ , de modo que  $\xi(x) := P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x))$ . Observando que  $\tilde{f}_v(x) := \tilde{f}(x) + x \cdot v$  é uma extensão de  $f_v$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla(f_v)(x) &= P_{T_x X}(\nabla(\tilde{f}_v)(x)) = P_{T_x X}(\nabla \tilde{f}(x) + v) \\ &= P_{T_x X}(\nabla f(x) + v) = P_{T_x X}(\xi(x) + v) = \xi_v(x) \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 5.3.3, para quase todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_v = \nabla(f_v)$  é um campo de Morse, ou seja,  $f_v$  é uma função de Morse.  $\square$

O conjunto dos vectores  $v \in \mathbb{R}^n$  tais que  $f_v$  é uma função de Morse é sempre um conjunto denso. Quando a variedade  $X$  é compacta, este conjunto é aberto (Exercício 5.22). Considerando a topologia de Whitney no espaço  $C^\infty(X, \mathbb{R})$  prova-se o seguinte.

**Proposição 5.4.3.** Dada uma variedade compacta  $X$ , o conjunto das funções de Morse é aberto e denso em  $C^\infty(X, \mathbb{R})$ .

## 5.5 Exercícios

**Ex 5.1.** Dado um atlas  $\mathcal{A}$  numa variedade  $X$ , mostre que se  $A \subset X$  tiver medida nula em todas as cartas de  $\mathcal{A}$  então  $A$  tem medida nula em  $X$ .

**Ex 5.2.** Seja  $f : U \rightarrow f(U)$  um difeomorfismo entre abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que se  $A \subseteq U$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$  então  $f(A)$  também tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ . Generalize este facto a difeomorfismos  $f : X \rightarrow Y$ .

**Sugestão:** Use a fórmula de integração por mudança de variáveis para calcular o volume de  $f(A)$ .

**Ex 5.3.** Suponha que  $k < n$ . Mostre que se  $A$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{n-k}$  então  $A \times \mathbb{R}^k$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ .

**Ex 5.4.** Sejam  $X \subseteq Z$  variedades com  $\dim(X) < \dim(Z)$ . Sem usar o Teorema de Sard, mostre que  $X$  tem medida nula em  $Z$ .

**Ex 5.5.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo local entre variedades  $X$  e  $Y$  com a mesma dimensão. Mostre que se  $A$  tem medida nula em  $Y$  então  $f^{-1}(A)$  tem medida nula em  $X$ .

**Ex 5.6.** Dê um exemplo de uma aplicação suave  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cujos valores críticos sejam densos.

**Sugestão:** Faça com que os números racionais, conjunto que pode ser enumerado  $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ , seja o conjunto dos valores críticos de  $f$ .

**Ex 5.7.** Demonstre o Teorema de Sard para aplicações suaves  $f : X^k \rightarrow Y^n$  entre variedades com dimensões  $k < n$ . Por outras palavras, mostre que  $f(X^k)$  tem medida nula em  $Y^n$ .

**Sugestão:** Suponha que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função Lipschitz com constante de Lipschitz  $K$  num domínio aberto e limitado  $D \subset \mathbb{R}^k$ . Argumentando como no Lemma 5.1.1, mostre que  $\text{vol}_n(f(D)) = 0$ .

**Ex 5.8.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função suave entre variedades. Mostre que a condição de  $f$  ter um representante em coordenadas locais com todas as derivadas até à ordem  $r$  nulas é independente das coordenadas escolhidas.

**Sugestão:** Seja  $f : U \rightarrow V$  um difeomorfismo entre domínios abertos  $U$  e  $V$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação suave. Mostre que se  $D^k g_{f(x)} = 0, \forall 1 \leq k \leq r$  então  $D^k (g \circ f)_x = 0, \forall 1 \leq k \leq r$ .

**Ex 5.9.** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave,  $X$  e  $Y$  variedades. Mostre que

- Se  $X$  for compacta então o conjunto dos valores regulares de  $f$  é aberto e denso em  $Y$ .
- Em geral, o conjunto dos valores regulares de  $f$  é residual, i.e., é uma intersecção numerável de conjuntos abertos densos.

**Ex 5.10.** Sejam  $P$  a parábola de equação  $y = 1 - x^2$ , e  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função  $f_a(x) = (x, -a + (a + x)^2)$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ . Para que valores do parâmetro  $a$  se tem  $f_a \pitchfork P$ ?

**Ex 5.11.** Para que valores de  $a > 0$  o hiperbolóide definido por  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  intersecta a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  transversalmente? Qual é o aspecto da intersecção para diferentes valores de  $a$ ?

**Ex 5.12.** Quais dos seguintes espaços lineares se intersectam transversalmente?

- (a) O plano  $xy$  e o eixo dos  $zz$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) O plano  $xy$  e o plano gerado pelos vectores  $(3, 2, 0)$  e  $(0, 4, -1)$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) O plano gerado pelos vectores  $(1, 0, 0)$  e  $(2, 1, 0)$  e o eixo dos  $yy$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (d)  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  e  $\{0\} \times \mathbb{R}^p$  em  $\mathbb{R}^n$ . (A resposta depende de  $k, p$  e  $n$ ).
- (e)  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  e  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  em  $\mathbb{R}^n$ . (A resposta depende de  $k, p$  e  $n$ ).
- (f)  $E \times \{0\}$  e a diagonal de  $E \times E$ , onde  $E$  é um espaço linear.
- (g) Os subespaços das matrizes simétricas ( $A^T = A$ ), e das matrizes anti-simétricas ( $A^T = -A$ ), no espaço de todas as matrizes  $n \times n$ .

**Ex 5.13.** Sejam  $X$  e  $Y$  subvariedades *não* transversais de  $Z$ . A intersecção  $X \cap Y$  pode ser uma subvariedade? A fórmula  $\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim}(X) + \text{codim}(Y)$  pode ainda ser válida?

**Ex 5.14.** Sejam  $Y \subset \mathbb{R}^n$  uma subvariedade, e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma mapa suave. Prove que para quase todo o vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , o mapa  $f_v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_v(x) := f(x) + v$ , é transversal a  $Y$ .

**Ex 5.15.** Sejam  $X, Y \subset Z \subseteq \mathbb{R}^N$  variedades compactas. Mostre que para qualquer função  $f : X \rightarrow Z$ , existe uma submersão  $\tilde{f} : W \times X \rightarrow Z$  tal que  $f = \tilde{f}_0$ , onde  $W$  é um disco centrado na origem em  $\mathbb{R}^N$ , e o conjunto  $\{w \in W : \tilde{f}_w \pitchfork Y\}$  é aberto e denso em  $W$ .

**Sugestão:** Tome  $\varepsilon > 0$  tal que  $V_\varepsilon(Z)$  seja uma vizinhança tubular de  $Z$  em  $\mathbb{R}^N$ . Defina então  $W = \{w \in \mathbb{R}^N : \|w\| < \varepsilon\}$ , e  $\tilde{f} : W \times X \rightarrow Z$ ,  $\tilde{f}(w, x) := \pi(f(x) + w)$ , onde  $\pi : V_\varepsilon(Z) \rightarrow Z$  é a projecção associada a esta vizinhança tubular.

**Ex 5.16.** Sejam  $X$  e  $Y$  subvariedades transversais de  $Z$ . Prove que para todo  $p \in X \cap Y$ ,  $T_p X \cap Y = T_p X \cap T_p Y$ .

**Ex 5.17.** Seja  $f : X \rightarrow Z$  um mapa suave transversal à subvariedade  $Y \subset Z$ . Mostre que para cada  $p \in f^{-1}(Y)$ , o espaço tangente  $T_p f^{-1}(Y)$  é a pré-imagem pela derivada  $Df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Z$  do espaço tangente  $T_{f(p)} Y$ .

**Ex 5.18.** Sejam  $f : X \rightarrow Z$  um mapa suave definido sobre variedade compacta  $X$ , e  $Y \subset Z$  uma subvariedade compacta. Supondo que  $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(Z)$  e  $f \pitchfork Y$ , mostre que  $f^{-1}(Y)$  é um conjunto finito.

**Ex 5.19.** Seja  $E$  um espaço linear de dimensão finita, e  $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ . Considere o gráfico  $G_A = \{(x, A(x)) : x \in E\}$  dum aplicação linear  $A : E \rightarrow E$ . Mostre que  $G_A \pitchfork \Delta$  em  $E \times E$  sse  $1$  não é valor próprio de  $A$ .

**Ex 5.20.** Um ponto fixo  $f(x) = x$  dum mapa  $f : X \rightarrow X$  diz-se de *Lefschetz* se  $1$  não for valor próprio da derivada  $Df_x : T_x X \rightarrow T_x X$ . Mostre que o gráfico de  $f$ ,  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$  é transversal à diagonal  $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  sse todos os pontos fixos de  $f$  são de Lefschetz.

**Ex 5.21.** Mostre que um mapa suave  $f : X \rightarrow X$  numa variedade compacta  $X$  tal que todos os seus pontos fixos de  $f$  são de Lefschetz, tem apenas um número finito de pontos fixos.

**Ex 5.22.** Mostre que se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade compacta, dados  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ , então os conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_\xi &= \{v \in \mathbb{R}^n : \xi_v \text{ é um campo de Morse} \} \text{ e} \\ \Omega_f &= \{v \in \mathbb{R}^n : f_v \text{ é uma função de Morse} \}\end{aligned}$$

são abertos e densos em  $\mathbb{R}^n$ .

**Sugestão :** Use o Corolário 5.2.2.

**Ex 5.23.** Mostre que um campo de Morse  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , e uma função de Morse  $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ , numa variedade compacta  $X$ , têm apenas um número finito de singularidades, respectivamente de pontos críticos.

**Ex 5.24.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade. Mostre que para quase toda a forma linear  $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ , a restrição  $\alpha|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse.

**Ex 5.25.** Sejam  $X$  e  $Y \subset Z$  variedades,  $X$  com bordo,  $Y$  e  $Z$  sem bordo. Mostre que se  $f \pitchfork Y$  em  $Z$  e  $f|_{\partial X} \pitchfork Y$  em  $Z$  então  $f^{-1}(Y)$  é uma variedade com bordo tal que  $\partial f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) \cap \partial X = (f|_{\partial X})^{-1}(Y)$ .

O objectivo da sequência de problemas seguinte é mostrar que as funções de Morse com os valores críticos todos distintos são *genéricas*. Iremos usar a notação introduzida nos Exercícios 4.7, 4.8 e 4.9. Seja  $W$  o espaço das funções polinomiais  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com grau menor ou igual a 2,

$$Q(x) = c + v^T x + x^T B x ,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  e  $B \in \text{Mat}_n^S$ . O espaço  $W$  tem dimensão finita  $N = n + 1 + n(n + 1)/2$ , e admite uma base canónica formada pelos monómios homogêneos  $1, x_i, x_i x_j$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ .

Dada uma função suave  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a família de perturbações  $f_Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_Q(x) := f(x) + Q(x)$ , para cada  $Q \in W$ . Como antes  $W_\varepsilon$  denota a bola aberta de raio  $\varepsilon$ , centrada na origem, no espaço  $W$ .



**Ex 5.26.** Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos críticos não degenerados, distintos, de  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , e designemos por  $\tilde{p}(Q)$  e  $\tilde{q}(Q)$  as continuações analíticas dos pontos críticos  $p$  e  $q$ ,  $\tilde{p}, \tilde{q} : W_\varepsilon \rightarrow X$ . Definindo as funções  $A_p, A_q : W_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_p(Q) := f_Q(\tilde{p}(Q))$  e  $A_q(Q) := f_Q(\tilde{q}(Q))$ , mostre que

$$\Sigma(f, p, q) = \{Q \in W_\varepsilon : A_p(Q) = A_q(Q)\}$$

é uma variedade de codimensão 1 em  $W$ .

**Sugestão:** Fixado  $Q \in W_\varepsilon$ , suponha que  $\tilde{p}(Q) = p$  e  $\tilde{q}(Q) = q$ . Use o Exercício 4.8 para mostrar que a função  $G : W_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $G(Q) := A_p(Q) - A_q(Q)$  tem derivada  $DG_Q : W \rightarrow \mathbb{R}$  sobrejetiva.

**Ex 5.27.** Supondo que  $X$  é compacta, seja  $\Gamma$  o conjunto dos polinómios  $Q \in W$  tais que  $f_Q = f + Q$  é uma função de Morse com os valores críticos todos distintos. Mostre que  $\Gamma$  é um conjunto aberto denso com medida total.

**Sugestão:** Seja  $\Omega$  o conjunto dos polinómios  $Q \in W$  tais que  $f_Q = f + Q$  é uma função de Morse. Comece por ver que  $\Omega$  é um conjunto aberto denso com medida total. Depois, para cada  $Q \in \Omega$ , defina  $B_\varepsilon(Q) \subset \Omega$  como uma bola centrada em  $Q$  em  $W$  sobre a qual estão definidas as continuações analíticas dos pontos críticos de  $f_Q = f + Q$  (Exercício 4.6). Usando o Exercício 5.26, mostre que  $\Gamma \cap B_\varepsilon(Q)$  é o complementar em  $B_\varepsilon(Q)$  duma união finita de variedades de codimensão um. Deduza que  $\Gamma \cap B_\varepsilon(Q)$  é aberto e denso com medida total em  $B_\varepsilon(Q)$ .



## Chapter 6

# Orientações

Orientar uma curva é definir um sentido de a percorrer. Numa superfície, uma orientação corresponde a definir um sentido de circulação, por exemplo o sentido dos ponteiros do relógio ou o sentido inverso, dito anti-horário. Já no espaço tridimensional uma orientação pode ser definida pela especificação dum sentido de rotação em torno dum eixo orientado. Vamos tornar precisos estes conceitos, primeiro em espaços lineares de dimensão finita e depois em variedades.

### 6.1 Orientações em espaços lineares

Seja  $E$  um espaço Euclideano de dimensão finita  $n$  e designemos por  $O(E)$  o grupo das isometrias (automorfismos isométricos)  $\Phi: E \rightarrow E$ . Este grupo é uma variedade de dimensão  $n(n-1)/2$  (Exercício 6.1).

Uma isometria  $\Phi \in O(E)$  diz-se um *movimento rígido* se existir uma aplicação contínua  $\Psi: [0, 1] \rightarrow O(E)$  tal que  $\Psi(0) = \text{id}_E$  e  $\Psi(1) = \Phi$ . O conjunto  $O^+(E)$  dos movimentos rígidos em  $E$  é um subgrupo de  $O(E)$ . Dado um vector unitário  $v \in E$  a reflexão  $\Phi_v: E \rightarrow E$  em torno do hiperplano  $v^\perp$ ,  $\Phi_v(x) := x - 2(x \cdot v)v$ , é um exemplo duma isometria  $\Phi_v \in O(E)$  que não é um movimento rígido (Exercício 6.9).

Definimos

$$\mathcal{B}_{\text{on}}(E) := \{(v_1, \dots, v_n) \in E^n : (v_1, \dots, v_n) \text{ é base ortonormada de } E\}.$$

Dizemos que duas bases  $(u_1, \dots, u_n)$  e  $(v_1, \dots, v_n)$  em  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$  são equivalentes, e escrevemos  $(u_1, \dots, u_n) \sim (v_1, \dots, v_n)$ , se existir um movimento rígido  $\Phi \in O^+(E)$  tal que  $(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n)) = (v_1, \dots, v_n)$ . Bases ortonormadas equivalentes irão determinar a mesma orientação do espaço  $E$ .

**Proposição 6.1.1.** O espaço  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$  tem exactamente duas componentes conexas que correspondem às classes de equivalência da relação  $\sim$  acima definida. Além disso, o grupo  $O(E)$  é difeomorfo a  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$  sendo  $O^+(E)$  a componente conexa de  $O(E)$  que contem a matriz identidade.

*Proof.* Para todo o espaço Euclidiano  $E$  de dimensão  $n$  existe uma isometria  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ , que induz um difeomorfismo  $\tilde{\Psi} : \mathcal{B}_{\text{on}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ . Logo, podemos sem perda de generalidade supor que  $E = \mathbb{R}^n$ .

Fixada uma base  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{B}_{\text{on}}(\mathbb{R}^n)$ , qualquer outra base pode ser ligada por um caminho em  $\mathcal{B}_{\text{on}}(\mathbb{R}^n)$  a uma das duas bases  $(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$ , ou  $(w_1, \dots, w_{n-1}, -w_n)$  (Exercício 6.6). Como estas duas bases têm determinantes simétricos, não existe nenhum caminho contínuo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{on}}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\gamma(0) = (w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$  e  $\gamma(1) = (w_1, \dots, w_{n-1}, -w_n)$ . Isto porque  $\det(\gamma(t)) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$ . Este argumento mostra que  $\mathcal{B}_{\text{on}}(\mathbb{R}^n)$  tem exactamente duas componentes conexas.

Fixando uma base  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ , definimos  $\Psi : O(E) \rightarrow \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ ,  $\Psi(\phi) := (\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ . Este mapa é um difeomorfismo porque é a restrição dum isomorfismo linear (Exercício 6.2). Além disso  $\Psi$  transforma  $O^+(E)$  na componente conexa de  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$  que contem a base  $(w_1, \dots, w_n)$ .  $\square$

A proposição anterior estende-se a bases não (necessariamente) ortonormadas, o que permite tornar a noção de orientação independente da estrutura Euclidiana. Definimos

$$\mathcal{B}(E) := \{(v_1, \dots, v_n) \in E^n : (v_1, \dots, v_n) \text{ é base de } E\}.$$

**Proposição 6.1.2.** O espaço  $\mathcal{B}(E)$  tem exactamente duas componentes conexas, que são conexas por caminhos. O mesmo acontece com o grupo  $\text{GL}(E)$  dos automorfismos lineares  $\phi : E \rightarrow E$ .

*Proof.* Fixada uma estrutura Euclidiana em  $E$ , toda a base de  $E$  pode ser continuamente deformada, dentro de  $\mathcal{B}(E)$ , até ficar ortonormada (Exercício 6.7). Pela Proposição 6.1.1,  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$  tem exactamente duas componentes conexas. Logo  $\mathcal{B}(E)$  tem exactamente duas componentes conexas, cada uma contendo uma componente de  $\mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ . Como  $\text{GL}(E) \simeq \mathcal{B}(E)$  também o grupo  $\text{GL}(E)$  tem exactamente duas componentes conexas (Exercício 6.3).  $\square$

Seja  $E$  um espaço linear real de dimensão finita  $n$ .

**Definição 6.1.1.** Uma orientação de  $E$  é uma aplicação  $\sigma : \mathcal{B}(E) \rightarrow \{-1, 1\}$  contínua e tal que  $\sigma(\underline{u}) \neq \sigma(\underline{v})$  sempre que  $\underline{u} \not\sim \underline{v}$ . O par  $(E, \sigma)$  diz-se um espaço linear orientado.

A continuidade de  $\sigma$  equivale a dizer que a aplicação  $\sigma$  é localmente constante. A segunda condição permite decompor o conjunto  $\mathcal{B}(E)$  em bases positivas e negativas, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+(E, \sigma) &:= \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E) : \sigma(v_1, \dots, v_n) = +1\}, \\ \mathcal{B}_-(E, \sigma) &:= \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E) : \sigma(v_1, \dots, v_n) = -1\}. \end{aligned}$$

Em qualquer espaço linear  $E$  de dimensão finita existem exactamente duas orientações. Quando  $\dim E > 0$ , uma orientação fica determinada pela escolha da componente conexa de  $\mathcal{B}(E)$  formada pelas bases positivas nessa orientação. Por outras palavras, qualquer base  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E)$  determina a única orientação  $\sigma$  que satisfaz  $\sigma(v_1, \dots, v_n) = +1$ , e duas bases determinam a mesma orientação sse pertencerem à mesma componente conexa de  $\mathcal{B}(E)$ .

No espaço  $E = \{0\}$ , de dimensão 0, o conjunto  $\mathcal{B}(E) = \{\emptyset\}$  é singular e tem apenas uma componente conexa. Existem no entanto duas funções (constantes)  $\sigma: \{\emptyset\} \rightarrow \{-1, +1\}$ , pelo que podemos identificar os sinais  $-1$  e  $+1$  como sendo as orientações do espaço nulo.

Se  $\dim E = 1$ ,  $E$  é uma recta e  $\mathcal{B}(E) = E \setminus \{0\}$ . Neste caso uma orientação de  $E$  corresponde à escolha de um ‘sentido’ no eixo  $E$ , determinado por um qualquer vector não nulo  $v \in E \setminus \{0\}$ .

Se  $\dim E = 2$ ,  $E$  é um plano, e as bases de  $E$  são formadas por pares de vectores não colineares  $(v_1, v_2)$ . Estes vectores determinam um ângulo orientado, de  $v_1$  para  $v_2$ , que por sua vez identifica um sentido de circulação no plano. Os ângulos orientados associados a duas bases têm o mesmo sinal, i.e., definem o mesmo sentido de circulação no plano, se somente se as duas bases estiverem na mesma componente conexa de  $\mathcal{B}(E)$ .

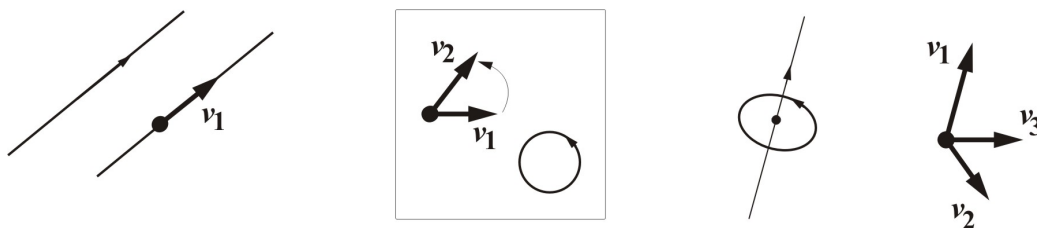


Figure 6.1: Orientações definidas por uma base nas dimensões 1, 2 e 3

Se  $\dim E = 3$  uma base  $(v_1, v_2, v_3)$  determina o eixo orientado definido pelo primeiro vector  $v_1$ , e o sentido de circulação, transversal a este eixo, definido pelos outros dois vectores  $(v_2, v_3)$ . Duas bases estão na mesma componente conexa de  $\mathcal{B}(E)$  se rodando uma delas de forma a fazer coincidir os eixos orientados determinados pelos primeiros vectores das duas bases, coincidirem também os sentidos de circulação em torno do eixo comum, determinados pelos outros dois vectores de cada uma das bases.

Sejam  $(E_1, \sigma_1)$  e  $(E_2, \sigma_2)$  dois espaços lineares orientados com a mesma dimensão. Todo o isomorfismo  $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$  induz o difeomorfismo  $\Phi_*: \mathcal{B}(E_1) \rightarrow \mathcal{B}(E_2)$ ,  $\Phi_*(v_1, \dots, v_n) := (\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n))$ , que transforma componentes conexas de  $\mathcal{B}(E_1)$  em componentes conexas de  $\mathcal{B}(E_2)$ . Dado uma aplicação linear  $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$  definimos o seu *signal* (relativo às orientações fixadas  $\sigma_1$

e  $\sigma_2$ )

$$\operatorname{sgn}(\Phi) := \begin{cases} 0 & \text{se } \Phi \text{ não é um isomorfismo} \\ -1 & \text{se } \Phi_*(\mathcal{B}_+(E_1, \sigma_1)) = \mathcal{B}_-(E_2, \sigma_2) \\ +1 & \text{se } \Phi_*(\mathcal{B}_+(E_1, \sigma_1)) = \mathcal{B}_+(E_2, \sigma_2) \end{cases}$$

**Definição 6.1.2.** Dizemos que um isomorfismo  $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$  preserva a orientação se  $\operatorname{sgn}(\Phi) = +1$ , i.e.,

$$\sigma_2(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) = \sigma_1(v_1, \dots, v_n) \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E_1).$$

Analogamente, dizemos que  $\Phi$  inverte a orientação, se  $\operatorname{sgn}(\Phi) = -1$ , i.e.,

$$\sigma_2(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) = -\sigma_1(v_1, \dots, v_n) \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E_1).$$

*Proof.* Segue das definições. □

Dado um endomorfismo  $\Phi: E \rightarrow E$ , fixemos uma base  $(w_1, \dots, w_n)$  de  $E$ . Dizemos que  $\Phi$  é representado nesta base pela matriz  $A = [a_{ij}] \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$  se  $\Phi(w_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . As matrizes que representam  $\Phi$  relativamente a diferentes bases têm todas o mesmo determinante por serem conjugadas entre si. Define-se  $\det(\Phi)$  como o determinante comum a estas matrizes.

O sinal  $\operatorname{sgn}(\Phi)$  dum endomorfismo  $\Phi: (E, \sigma) \rightarrow (E, \sigma)$  não depende da orientação  $\sigma$ , coincidindo com o sinal do determinante de  $\Phi$ .

Seja  $\mathcal{L}(E, E)$  a álgebra dos endomorfismos lineares  $\Phi: E \rightarrow E$  e  $\operatorname{GL}(E)$  o subgrupo dos automorfismos em  $\mathcal{L}(E, E)$ .

**Proposição 6.1.3.** O conjunto  $\operatorname{GL}(E)$  é um aberto de  $\mathcal{L}(E)$  com exactamente duas componentes conexas:

$$\begin{aligned} \operatorname{GL}^+(E) &:= \{\Phi \in \operatorname{GL}(E) : \det(\Phi) > 0\}, \\ \operatorname{GL}^-(E) &:= \{\Phi \in \operatorname{GL}(E) : \det(\Phi) < 0\}. \end{aligned}$$

*Proof.* Exercício 6.4 □

**Definição 6.1.3.** Sejam  $(E, \sigma)$ ,  $(E_1, \sigma_1)$  e  $(E_2, \sigma_2)$  espaços lineares orientados tais que  $E = E_1 \oplus E_2$ . Dizemos que as orientações  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são compatíveis se

$$\sigma(\underline{u}, \underline{v}) = \sigma_1(\underline{u}) \sigma_2(\underline{v}), \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{B}(E_1), \forall \underline{v} \in \mathcal{B}(E_2).$$

**Proposição 6.1.4.** Dada uma decomposição em soma directa  $E = E_1 \oplus E_2$  de espaços lineares de dimensão finita, fixadas orientações em dois destes três espaços, existe uma única orientação no terceiro que torna as três orientações compatíveis.

*Proof.* Exercício 6.8. □

Se  $E = E_1 \oplus E_2$ , sendo  $(E, \sigma)$  e  $(E_1, \sigma_1)$  espaços orientados, dizemos que a única orientação  $\sigma_2$  em  $E_2$  cuja existência e unicidade é afirmada na proposição anterior é *induzida* por  $\sigma$  e  $\sigma_1$ . Analogamente nos outros casos.

## 6.2 Orientações em variedades

Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade de dimensão  $n$  e definamos

$$\mathcal{B}(TX) := \{(x, v_1, \dots, v_n) : x \in X, (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(T_x X)\}.$$

Este conjunto é uma variedade de dimensão  $n + n^2$  (Exercício 6.10).

**Definição 6.2.1.** *Chama-se orientação de  $X$  a uma aplicação  $\sigma : \mathcal{B}(TX) \rightarrow \{-1, 1\}$  que seja contínua e tal que  $\sigma_x : \mathcal{B}(T_x X) \rightarrow \{-1, 1\}$  definida por  $\sigma_x(v_1, \dots, v_n) := \sigma(x, v_1, \dots, v_n)$  seja uma orientação de  $T_x X$  para cada  $x \in X$ .*

**Definição 6.2.2.** *Uma variedade orientada é um par  $(X, \sigma)$ , onde  $X$  é uma variedade e  $\sigma$  uma orientação de  $X$ . Para aliviar a notação diremos que  $X$  é uma variedade orientada, deixando subentendida a sua orientação  $\sigma = \sigma^X$ .*

**Exemplo 6.2.1.** *Chama-se orientação canônica em  $\mathbb{R}^n$  à orientação que em todos os espaços tangentes  $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  coincide com  $\sigma_{\text{can}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \{-1, 1\}$*

$$\sigma_{\text{can}}(v_1, \dots, v_n) := \text{sgn}(\det(v_1, \dots, v_n)).$$

*A base canônica de  $\mathbb{R}^n$  é uma base positiva para orientação canônica.*

**Definição 6.2.3.** *Uma variedade  $X$  diz-se orientável se existir uma orientação em  $X$ .*

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades orientadas da mesma dimensão e  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo local.

**Definição 6.2.4.** *Dizemos que  $f$  preserva a orientação se o isomorfismo  $Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  preserva a orientação, para todo  $x \in X$ . Analogamente, dizemos que  $f$  inverte a orientação quando  $Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  inverte a orientação, para todo  $x \in X$ .*

**Proposição 6.2.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo local entre variedades orientadas. Se  $X$  for conexa então  $f$  preserva a orientação ou  $f$  inverte a orientação.*

*Proof.* Os conjuntos  $A_{\pm}$  definidos por

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x \in X : \operatorname{sgn}(Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y) = +1\}, \\ A_- &:= \{x \in X : \operatorname{sgn}(Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y) = -1\} \end{aligned}$$

são abertos (Exercício 6.12). Como em cada ponto  $x \in X$  o isomorfismo  $Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  preserva ou inverte a orientação, os conjuntos  $A_+$  e  $A_-$  são disjuntos e a sua união é igual a  $X$ . Como  $X$  é conexa, temos  $X = A_+$  e  $f$  preserva a orientação, ou então  $X = A_-$  e  $f$  inverte a orientação.  $\square$

**Corolário 6.2.1.** Toda a variedade conexa e orientável admite exactamente duas orientações.

*Proof.* Dadas duas orientações  $\sigma$  e  $\sigma'$  em  $X$ , aplicadando a Proposição 6.2.1 à aplicação identidade  $\operatorname{id}_X : (X, \sigma) \rightarrow (X, \sigma')$ , vemos que  $\sigma = \sigma'$  ou então  $\sigma = -\sigma'$ . Logo  $\sigma$  e  $-\sigma$  são as únicas orientações em  $X$ .  $\square$

**Proposição 6.2.2.** Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $n - 1$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $X$  é orientável sse existe um campo normal  $\xi \in \mathcal{X}_{\perp}^{\infty}(X)$  tal que  $\xi(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ .

*Proof.* O espaço normal  $(T_x X)^{\perp}$  tem dimensão 1. Como qualquer que seja  $x \in X$ ,  $\mathbb{R}^n = (T_x X)^{\perp} \oplus T_x X$ , e  $\mathbb{R}^n$  tem uma orientação canónica, pela Proposição 6.1.4 uma orientação num dos espaços  $T_x X$ , ou  $(T_x X)^{\perp}$ , permite induzir uma orientação no outro.

Supondo que  $X$  é orientável, e fixando uma orientação  $\sigma$  em  $X$ , a orientação  $\sigma_x$  de  $T_x X$  juntamente com a orientação canónica de  $\mathbb{R}^n$  induzem uma orientação em  $(T_x X)^{\perp}$ . Definindo  $\xi(x)$  como o único vector positivo em  $(T_x X)^{\perp}$  (para esta orientação) com  $\|\xi(x)\| = 1$ , obtemos um campo normal  $\xi \in \mathcal{X}_{\perp}^{\infty}(X)$  tal que  $\|\xi(x)\| = 1$  para todo  $x \in X$ .

Reciprocamente, supondo que existe  $\xi \in \mathcal{X}_{\perp}^{\infty}(X)$  tal que  $\xi(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ , este campo induz uma orientação em cada recta  $(T_x X)^{\perp}$  que por sua vez permite definir a seguinte orientação em  $X$ ,  $\sigma(x, v_1, \dots, v_{n-1}) := \sigma_n(\xi(x), v_1, \dots, v_{n-1})$ , onde  $\sigma_n$  representa a orientação canónica de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

A banda de Möbius não é orientável porque não admite nenhum campo normal unitário (Exercício 6.27).

### 6.3 Orientação induzida no bordo

Sejam  $X$  uma variedade orientada com bordo, e  $\xi$  o campo normal exterior ao bordo de  $X$ . Para cada ponto  $x \in \partial X$ , temos uma decomposição em soma directa  $T_x X = \mathbb{R} \xi(x) \oplus T_x \partial X$ , em que o espaço tangente tem a orientação de  $X$ , e a recta normal  $\mathbb{R} \xi(x)$  tem a orientação definida pelo vector  $\xi(x)$ .



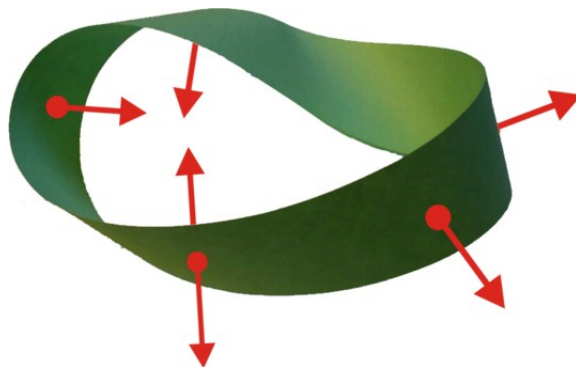


Figure 6.2: A banda de Möbius

Consideremos no espaço tangente  $T_x \partial X$  a orientação induzida pelas outras duas, que é definida por

$$\sigma_x^{\partial X}(v_1, \dots, v_{n-1}) := \sigma_x^X(\xi(x), v_1, \dots, v_{n-1}).$$

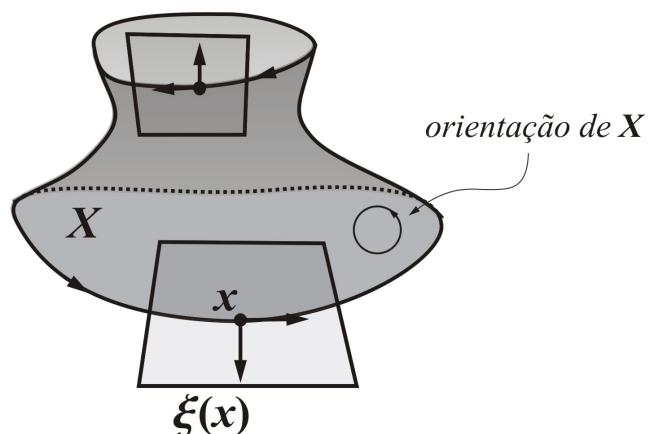
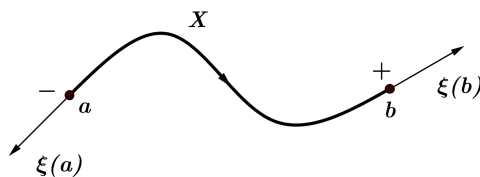


Figure 6.3: Orientação induzida no bordo

**Proposição 6.3.1.** Seja  $X$  uma variedade orientável com bordo. A função  $\sigma^{\partial X}: \mathcal{B}(T\partial X) \rightarrow \{-1, 1\}$  definida acima é uma orientação em  $\partial X$ .

*Proof.* A continuidade de  $\sigma^{\partial X}$  segue das continuidades da orientação  $\sigma^X$  em  $X$  e do campo normal exterior  $\xi$ . Supondo que  $\partial X$  tem dimensão positiva então  $\dim(T_x X) > 1$  pelo que  $\sigma_x^{\partial X}(\cdot) := \sigma_x^X(\xi(x), \cdot)$  não é constante. Isto mostra que  $\sigma^{\partial X}$  é uma orientação em  $\partial X$ .  $\square$

A orientação  $\sigma^{\partial X}$  diz-se *induzida por  $X$*  no bordo  $\partial X$ .

Figure 6.4: Orientação induzida no bordo de uma curva  $X$ 

**Exemplo 6.3.1.** Se  $X$  for uma variedade de dimensão 1, orientada, conexa, compacta e com bordo, então  $\partial X = \{a, b\}$  é formado por 2 pontos (Exercício 7.8). A orientação de  $X$  determina um sentido na curva  $X$ , que nos permite falar nas extremidades inicial e final de  $X$ . Na extremidade inicial  $X$  induz a orientação ‘-’ enquanto na extremidade final  $X$  induz a orientação ‘+’ (Figura 6.4).

**Exemplo 6.3.2.** A esfera  $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$  é o bordo do disco  $\mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$  com a orientação canônica de  $\mathbb{R}^d$ . A orientação induzida na esfera é dada por

$$\sigma_x^{\mathbb{S}}(v_1, \dots, v_{d-1}) := \sigma_{\text{can}}(x, v_1, \dots, v_{d-1})$$

onde  $\xi(x) := x$  é o campo normal exterior ao longo de  $\mathbb{S}$ .

## 6.4 Orientação induzida numa pré-imagem

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades orientadas com  $\dim(X) = n \geq k = \dim(Y)$ , e  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave. Dado um valor regular  $y \in Y$  de  $f$ , para cada  $x \in f^{-1}(y)$ , seja  $E_x$  um subespaço complementar de  $T_x f^{-1}(y)$  em  $T_x X$ , i.e., tal que  $T_x X = T_x f^{-1}(y) \oplus E_x$ . Consideremos em  $E_x$  uma orientação tal que o isomorfismo  $Df_x|_{E_x} : E_x \simeq T_y Y$  preserve a orientação, e em  $T_x f^{-1}(y)$  a orientação  $\sigma_x^{f^{-1}(y)}$  induzida pelas orientações de  $T_x X$  e  $E_x$  (no sentido da Proposição 6.1.4), que deve satisfazer

$$\sigma_x^{f^{-1}(y)}(v_1, \dots, v_{n-k}) := \frac{\sigma_x^X(v_1, \dots, v_{n-k}, w_1, \dots, w_k)}{\sigma_y^Y(Df_x w_1, \dots, Df_x w_k)} \quad (6.1)$$

quaisquer que sejam  $(v_1, \dots, v_{n-k}) \in \mathcal{B}(T_x f^{-1}(y))$  e  $(w_1, \dots, w_k) \in \mathcal{B}(E_x)$ .

**Proposição 6.4.1.** Existe uma única orientação  $\sigma^{f^{-1}(y)}$  em  $f^{-1}(y)$  que satisfaz a relação (6.1).

*Proof.* Pela Proposição 6.1.4, para cada  $x \in f^{-1}(y)$  existe uma orientação  $\sigma_x^{f^{-1}(y)}$  em  $T_x f^{-1}(y)$  satisfazendo a relação (6.1). Precisamos apenas mostrar

que estas orientações nos espaços tangentes determinam uma função contínua  $\sigma^{f^{-1}(y)}: \mathcal{B}(Tf^{-1}(y)) \rightarrow \{-1, 1\}$ .

Suponhamos que  $Y = \mathbb{R}^k$  e que a aplicação  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$  tem componentes  $f = (f_1, \dots, f_k)$ . Tendo em conta que

$$T_x f^{-1}(y) = \text{Nuc}(Df_x) = \{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)\}^\perp$$

segue que o espaço  $E_x := (T_x f^{-1}(y))^\perp$  admite a base

$$\underline{w}(x) := (\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)).$$

Sendo  $y$  um valor regular de  $f$ , a derivada  $Df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$  é sobrejectiva o que implica os gradientes  $\nabla f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , sejam linearmente independentes.

Logo  $Df_x(\underline{w}(x))$  é uma base de  $T_y Y$  e a função  $\beta: X \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $\beta(x) := \sigma^Y(y, Df_x(\underline{w}(x)))$ , é contínua. Como  $\sigma^X: \mathcal{B}(TX) \rightarrow \{-1, 1\}$  é contínua segue que a função  $\sigma^{f^{-1}(y)}: \mathcal{B}(Tf^{-1}(y)) \rightarrow \{-1, 1\}$ , que por (6.1) se escreve como

$$\sigma^{f^{-1}(y)}(x, \underline{v}) := \frac{\sigma^X(x, \underline{v}, \underline{w}(x))}{\beta(x)},$$

é também contínua. □

Dizemos que a orientação de  $f^{-1}(y)$  é induzida pelas de  $X$  e  $Y$ .

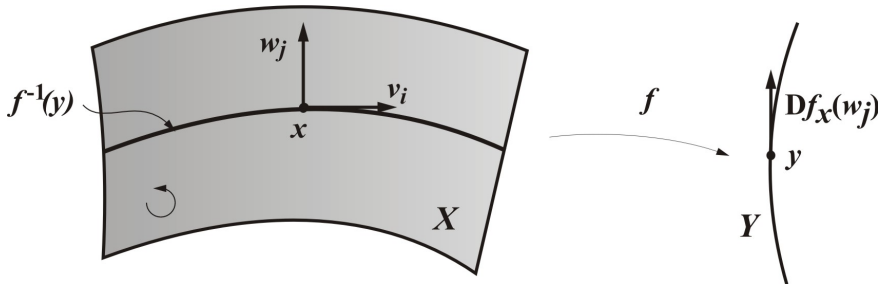


Figure 6.5: Orientação induzida na pré-imagem

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades orientadas,  $X$  com bordo,  $Y$  sem bordo, tais que  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ . Dado um mapa suave  $f: X \rightarrow Y$  e um valor regular  $y \in Y$  de  $f$ , pelo Teorema 4.2.1, a pré-imagem  $f^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo. Pelas proposições 6.4.1 e 6.3.1 podemos orientar esta pré-imagem e com essa orientação orientar também o bordo  $\partial f^{-1}(y)$ .

Por outro lado, se  $y \in Y$  for um valor regular de  $f|_{\partial X}: \partial X \rightarrow Y$ , como  $\partial X$  é uma variedade orientada, o bordo  $\partial f^{-1}(y) = (f|_{\partial X})^{-1}(y)$  pode também ser orientado como uma pré-imagem do mapa restrição  $f|_{\partial X}$ . Temos assim dois modos distintos para orientar  $\partial f^{-1}(y)$ . A proposição seguinte garante que estes dois processos dão o mesmo resultado.

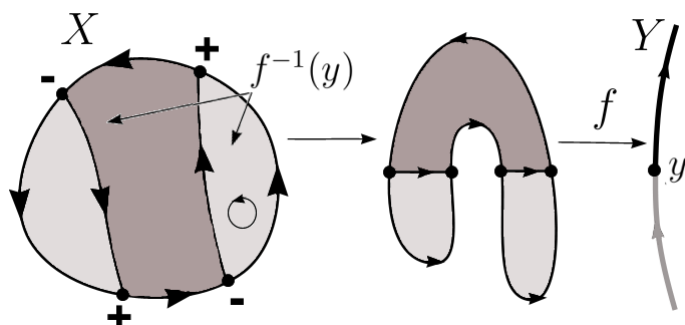


Figure 6.6: Orientações em  $\partial f^{-1}(y) = (f|_{\partial X})^{-1}(y)$

**Proposição 6.4.2.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave entre variedades orientadas  $X$  e  $Y$  tais que  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ ,  $X$  com bordo,  $Y$  sem bordo. Dado um valor regular  $y \in Y$  de  $f : X \rightarrow Y$  e de  $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ , são iguais:

- (1) a orientação induzida em  $\partial f^{-1}(y)$  como bordo da pré-imagem  $f^{-1}(y)$ ,
- (2) a orientação induzida em  $\partial f^{-1}(y) = (f|_{\partial X})^{-1}(y)$  como pré-imagem do valor regular  $y$  pela restrição  $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ .

*Proof.* Seja  $\xi$  o campo normal exterior a  $X$  ao longo de  $\partial X$ . Dado  $x \in \partial f^{-1}(y)$ , seja  $E_x$  um subespaço complementar de  $T_x \partial f^{-1}(y)$  em  $T_x \partial X$ ,  $T_x \partial X = T_x \partial f^{-1}(y) \oplus E_x$ . É claro que  $E_x$  também é um complementar de  $T_x f^{-1}(y)$  em  $T_x X$ ,  $T_x X = T_x f^{-1}(y) \oplus E_x$ . Consideremos em  $E_x$  a orientação que faz o isomorfismo  $Df_x|_{E_x} : E_x \simeq T_y Y$  preservar a orientação. Na decomposição em soma directa

$$T_x X = \mathbb{R} \xi(x) \oplus T_x \partial f^{-1}(y) \oplus E_x$$

estão orientados os espaços  $T_x X$ ,  $\mathbb{R} \xi(x)$  e  $E_x \simeq T_y Y$ . Pelo exercício 6.8 estas orientações induzem uma orientação  $\hat{\sigma}_x$  em  $T_x \partial f^{-1}(y) = T_x (f|_{\partial X})^{-1}(y)$  que se caracteriza por

$$\sigma_x^X(\xi(x), \underline{v}, Df_x \underline{w}) = \hat{\sigma}_x(\underline{v}) \sigma_y^Y(Df_x(\underline{w})),$$

quaisquer que sejam as bases  $\underline{v} \in \mathcal{B}(T_x \partial f^{-1}(y))$  and  $\underline{w} \in \mathcal{B}(E_x)$ . Das definições resulta que ambas as orientações (1) e (2) coincidem com  $\hat{\sigma}_x$ .  $\square$

## 6.5 Exercícios

Nos exercícios que seguem  $E$  representa um espaço Euclidiano de dimensão finita  $n$ .

**Ex 6.1.** Mostre que o grupo  $O(E)$  dos automorfismos isométricos  $\Phi : E \rightarrow E$  é uma variedade (grupo de Lie).

**Sugestão:** Use o Exercício 3.21. Observe que  $O(E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ , onde  $\mathcal{L}(E, E)$  designa o espaço vectorial de todos os endomorfismos lineares  $\phi : E \rightarrow E$ . Qualquer isomorfismo  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  induz um isomorfismo  $\tilde{\Psi} : \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  tal que  $\tilde{\Psi}(O_n) = O(E)$ .

**Ex 6.2.** Fixada uma base ortonormada  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ , mostre que  $\Psi : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow E^n$ , definida por  $\Psi(\phi) := (\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ , é um isomorfismo linear tal que  $\Psi(O(E)) = \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ .

**Ex 6.3.** Fixada uma base  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{B}(E)$ , mostre que  $\Psi : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow E^n$ , definida por  $\Psi(\phi) := (\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ , é um isomorfismo linear tal que  $\Psi(\text{GL}(E)) = \mathcal{B}(E)$ .

**Ex 6.4.** Supondo  $n \geq 1$ , mostre que as componentes conexas de  $\text{GL}(E)$  são:

$$\text{GL}^+(E) := \{\Phi \in \text{GL}(E) : \det(\Phi) > 0\},$$

$$\text{GL}^-(E) := \{\Phi \in \text{GL}(E) : \det(\Phi) < 0\}.$$

**Ex 6.5.** Sejam  $P \subset E$  um subespaço linear de dimensão 2,  $v_1, v_2 \in P$  vectores unitários. Mostre que existe  $\Phi : [0, 1] \rightarrow O(E)$  contínua tal que

- (a)  $\Phi(0) = \text{id}_E$ ,
- (b)  $\Phi(t)(P) = P, \quad \forall t \in [0, 1]$ ,
- (c)  $\Phi(t)(w) = w, \quad \forall w \in P^\perp, \quad \forall t \in [0, 1]$ ,
- (d)  $\Phi(1)(v_1) = v_2$ .

**Ex 6.6.** Supondo  $n \geq 1$ , mostre que dadas  $(u_1, \dots, u_n), (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ , existe  $\Phi : [0, 1] \rightarrow O(E)$  contínua tal que

- (a)  $\Phi(0) = \text{id}_E$ ,
- (b)  $\Phi(1) v_i = w_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ ,
- (c)  $\Phi(1) v_n = \pm w_n$ .

**Sugestão:** Argumente por indução que para cada  $k \leq n-1$  existe uma aplicação contínua  $\Phi_k : [0, 1] \rightarrow O(E)$  tal que  $\Phi_k(0) = \text{id}_E$  e  $\Phi_k(1) v_i = w_i$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ , usando o exercício anterior no passo de indução.

**Ex 6.7.** Supondo  $n \geq 1$ , mostre que existe  $H : [0, 1] \times \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(E)$  contínua tal que para cada  $\underline{v} \in \mathcal{B}(E)$ ,

- (a)  $H(0, \underline{v}) = \underline{v}$ ,
- (b)  $H(1, \underline{v}) \in \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$ .

**Sugestão** Use o método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

**Ex 6.8.** Sejam  $E = E_1 \oplus E_2$  espaços lineares. Mostre que fixadas orientações em dois destes três espaços existe uma única orientação no terceiro tal que as três orientações sejam compatíveis. Generalize este resultado a uma soma directa  $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$  com um número finito de parcelas.

**Ex 6.9.** Seja  $E$  um espaço Euclideano de dimensão finita  $n$ . Mostre que dado um vector unitário  $v \in E$ , a reflexão  $\Phi_v : E \rightarrow E$  em torno do hiperplano  $v^\perp$ ,  $\Phi_v(x) := x - 2(x \cdot v)v$ , não é um movimento rígido.

**Ex 6.10.** Seja  $X$  uma variedade de dimensão  $n$ . Mostre que  $\mathcal{B}(TX)$  é uma variedade de dimensão  $n + n^2$ .

**Sugestão:** Mostre que  $\mathcal{B}(TX)$  é aberto em

$$TX^n := \{(x, v_1, \dots, v_n) : x \in X, (v_1, \dots, v_n) \in (T_x X)^n\}$$

sendo este conjunto uma variedade com a dimensão referida.

**Ex 6.11.** Seja  $X$  uma variedade orientável com  $k$  componentes conexas. Quantas orientações admite  $X$ ?

**Ex 6.12.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo local entre variedades orientadas. Mostre que a função  $s_f : X \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $s_f(x) := \text{sgn}(Df_x)$  é localmente constante.

**Ex 6.13.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa suave entre variedades  $X$  e  $Y$  com a mesma dimensão. Mostre que dado um valor regular  $y \in Y$  da função  $f$ , a orientação induzida na pré-imagem  $f^{-1}(y)$  associa a cada ponto  $x \in f^{-1}(y)$  o sinal  $\sigma^{f^{-1}(y)}(x) = \text{sgn}(Df_x)$ .

**Ex 6.14.** Suponha que  $E$  é soma directa de dois espaços lineares orientados  $E_1$  e  $E_2$ . Prove que a orientação soma directa de  $E_1 \oplus E_2$  é igual a  $(-1)^{(\dim E_1)(\dim E_2)}$  vezes a orientação de  $E_2 \oplus E_1$ .

**Ex 6.15.** Considere em  $H^n$  e  $\mathbb{R}^n$  as orientações induzidas pela base canónica. Identificando  $\partial H^n$  com  $\mathbb{R}^{n-1}$ , mostre que a orientação induzida no bordo por  $H^n$  é oposta à orientação canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Ex 6.16.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo entre variedades com bordo conexas e orientadas. Mostre que  $f(\partial X) = \partial Y$ , que a restrição  $f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow \partial Y$  é um difeomorfismo e que em todas as componentes do bordo  $\text{sgn}(f) = \text{sgn}(f|_{\partial X})$ .

**Ex 6.17.** Sejam  $X^n$  e  $Y^m$  variedades orientadas com bordo. Mostre que  $X \times Y$  admite uma *orientação produto* tal que

$$\begin{aligned} \sigma_{(x,y)}^{X \times Y} ((u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_m)) \\ = \sigma_x^X(u_1, \dots, u_n) \sigma_y^Y(v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{B}(T_x X^n)$  e  $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{B}(T_y Y^m)$ . Mostre também que  $\partial(X \times Y)$  com a orientação induzida enquanto bordo é a união disjunta das variedades orientadas produto  $(\partial X) \times Y$  e  $X \times (-1)^n(\partial Y)$ .

**Ex 6.18.** Considere o cilindro orientado  $Z = [0, 1] \times X$ , onde  $X$  é uma variedade orientada sem bordo. Mostre que com a orientação induzida o bordo  $\partial Z$  é a união disjunta de duas cópias de  $X$  com orientações opostas,  $\{0\} \times X \equiv -X$  com  $\{1\} \times X \equiv X$ .

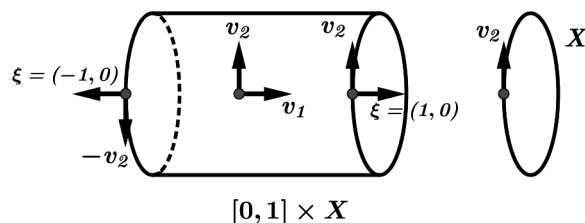


Figure 6.7: Orientações opostas no bordo do cilindro  $Z = [0, 1] \times X$

**Ex 6.19.** Considere os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{n-k}$  munidos das orientações canônicas. Seja  $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\pi(x, y) = y$ . Identificando  $\pi^{-1}(0) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$  com  $\mathbb{R}^k$ , mostre que a orientação induzida na pré-imagem  $\pi^{-1}(0)$  é precisamente a orientação canônica.

**Ex 6.20.** Dada  $A \in GL_{n+1}$ , considere o mapa  $F_A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $F_A(v) := \frac{Av}{\|Av\|}$ . Mostre que  $F_A$  é um difeomorfismo tal que  $\text{sgn}(F_A) = \text{sgn}(\det A)$ .

**Ex 6.21.** Sejam  $E$  um espaço vectorial e  $X$  uma variedade orientável. Mostre que:

- Ambas as orientações de  $E$  induzem a mesma orientação em  $E \times E$ .
- A orientação produto em  $X \times X$  é a mesma para as duas escolhas de orientações de  $X$ .

**Ex 6.22.** Mostre que existe uma orientação natural numa vizinhança da diagonal  $\Delta$  em  $X \times X$ , quer  $X$  seja, ou não, orientável.

**Sugestão:** A vizinhança da diagonal  $\Delta$  pode ser coberta por parametrizações  $\phi \times \phi : U \times U \rightarrow X \times X$ , onde  $\phi : U \rightarrow X$  é uma parametrização local de  $X$ .

Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  uma variedade de dimensão  $n$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  um caminho contínuo e  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(T_{\gamma(0)}X)$  uma base. Chama-se *transporte* desta base ao longo de  $\gamma$  a qualquer curva contínua  $\xi : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^N)^n$  tal que  $\xi(0) = (v_1, \dots, v_n)$ , e  $\xi(t) \in \mathcal{B}(T_{\gamma(t)}X)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Ex 6.23.** Mostre que existe sempre um modo de transportar uma base de  $T_{\gamma(0)}X$  ao longo de qualquer caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .

**Ex 6.24.** Mostre que uma variedade  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  é orientável sse dado um transporte  $\xi : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^N)^n$  duma base de  $T_{\gamma(0)}X$  ao longo dum caminho fechado  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ( $\gamma(0) = \gamma(1)$ ), as bases  $\xi(0)$  e  $\xi(1)$  definem a mesma orientação em  $T_{\gamma(0)}X$ .

**Sugestão:** Esta propriedade implica que podemos transportar orientações ao longo de caminhos conectando dois pontos  $p$  e  $q$ , de modo que a orientação transportada de  $p$  para  $q$  seja independente do caminho escolhido.

**Ex 6.25.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície. Mostre que dado um caminho contínuo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  e um vector  $v \in T_{\gamma(0)}X^\perp$  existe uma única função contínua  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\eta(0) = v$ ,  $\eta(t) \in T_{\gamma(t)}X^\perp$  e  $\|\eta(t)\| = \|v\|$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Ex 6.26.** Nas hipóteses da exercício anterior, supondo  $X$  orientável e o caminho  $\gamma$  fechado, i.e.,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , mostre que  $\eta(0) = \eta(1)$ .

**Ex 6.27.** Mostre que a banda de Möbius  $M \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície não orientável.

**Sugestão:** O cálculo a seguir indicado mostra que a banda de Möbius (figura 6.2) tem apenas um lado e como tal não suporta nenhum campo normal a  $M$  que não se anule. A banda de Möbius admite a parametrização

$$\phi(x, y) := \left(1 + y \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) (\cos x, \sin x, 0) + y \sin\left(\frac{x}{2}\right) (0, 0, 1)$$

$2\pi$ -periódica em  $x$ , com  $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ . Considere a curva fechada  $\gamma(t) = \phi(2\pi t, 0)$  e o vector  $(0, 0, -1) \in T_{\gamma(0)}M^\perp$ . Calcule o transporte  $\eta(t)$  do vector  $\eta(0) = (0, 0, -1)$  ao longo de  $\gamma$ , como definido no exercício 6.25, e verifique que  $\eta(1) = (0, 0, 1)$ .



# Chapter 7

## Homotopia

Dadas variedades  $X$  e  $Y$ , chama-se homotopia entre dois mapas  $f, g : X \rightarrow Y$  a uma deformação contínua de  $f$  em  $g$ . A Teoria de Homotopia, baseada no conceito de homotopia entre mapas, permite introduzir vários invariantes topológicos no estudo das variedades.

### 7.1 Aproximação por mapas suaves

Dadas variedades  $X$  e  $Y$  designamos por  $\mathcal{C}(X, Y)$ , resp.  $C^\infty(X, Y)$ , o conjunto dos mapas  $f : X \rightarrow Y$  contínuos, resp. suaves.

Quando  $X$  é compacta e  $Y = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$  é um espaço de Banach com a norma do máximo, associada à convergência uniforme,

$$\|f\|_\infty = \max_{X \in X} \|f(x)\|.$$

Ainda no caso em que  $X$  é compacta, mas sendo  $Y \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade arbitrária, consideremos em  $\mathcal{C}(X, Y)$  a métrica  $d(f, g) := \|f - g\|_\infty$ .

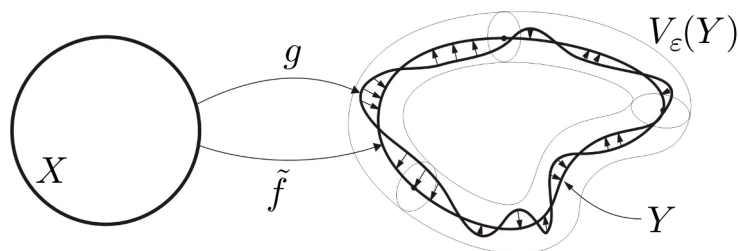
**Proposição 7.1.1.** Dada uma variedade compacta  $X$ , o espaço das funções suaves  $C^\infty(X, \mathbb{R}^N)$  é denso em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ .

*Proof.* Ver Corolário 14.3.1 do Teorema de Stone-Weierstrass. □

**Proposição 7.1.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas, a variedade  $Y$  sem bordo. Então o conjunto  $C^\infty(X, Y)$  é denso em  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

*Proof.* Dados  $\varepsilon > 0$  e  $f : X \rightarrow Y$  contínua, pela Proposição 7.1.1, existe  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  suave tal que  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon/2$ ,  $\forall x \in X$ . Podemos supor que  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno de modo que  $V_{\varepsilon/2}(Y)$  seja uma vizinhança tubular de  $Y$ . Seja  $\pi : V_{\varepsilon/2}(Y) \rightarrow Y$  a correspondente submersão. Definindo  $\tilde{f} = \pi \circ g : X \rightarrow Y$ ,  $\tilde{f}$  é uma função suave tal que

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - \tilde{f}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Figure 7.1: Perturbação suave de um mapa com valores em  $Y$ 

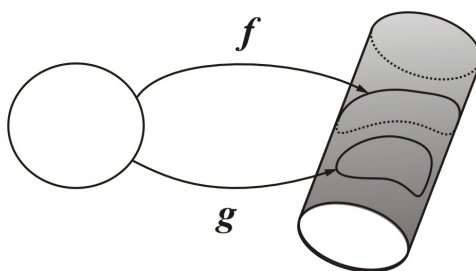
□

## 7.2 Homotopia entre mapas

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, e  $f, g : X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas.

Dizemos que  $f$  e  $g$  são *homotópicas*, e escrevemos  $f \overset{\circ}{\sim} g$ , se existe um mapa contínuo  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $h(0, x) = f(x)$ , e  $h(1, x) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . O mapa  $h$  diz-se uma *homotopia* entre  $f$  e  $g$ .

Seja  $\mathcal{C}(X, Y)$  o espaço dos mapas contínuos  $f : X \rightarrow Y$ . Uma homotopia deve ser vista como um caminho  $t \mapsto h_t$ , parametrizado no intervalo  $[0, 1]$ , que liga os mapas  $f$  e  $g$  no espaço  $\mathcal{C}(X, Y)$ , i.e.,  $h_0 = f$ ,  $h_1 = g$  e  $h_t \in \mathcal{C}(X, Y)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . A continuidade conjunta de  $h_t(x) = h(t, x)$  nos dois argumentos  $(t, x)$  traduz a ideia de continuidade do caminho  $t \mapsto h_t$  sem necessidade de referência à topologia do espaço de funções  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

Figure 7.2: Duas aplicações  $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  não homotópicas entre si

**Proposição 7.2.1.** A relação de homotopia entre mapas,  $\overset{\circ}{\sim}$ , é uma relação de equivalência no espaço  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

*Proof.* Ver Exercício 7.10.

□

Se  $Y$  é um espaço linear, então  $\mathcal{C}(X, Y)$  é também um espaço linear. Neste caso, quaisquer mapas  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  são homotópicos entre si, através da homotopia  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  definida por

$$h(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x) \quad x \in X, t \in [0, 1].$$

Se  $Y \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto convexo então a mesma homotopia mostra que quaisquer mapas  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  são homotópicos entre si.

A proposição seguinte implica que relação de homotopia entre variedades compactas é uma relação aberta (Exercício 7.13). Se  $f \overset{\circ}{\sim} g$  então os mapas próximos de  $f$  são homotópicos a mapas próximos de  $g$ .

**Proposição 7.2.2.** Dadas variedades compactas  $X$  e  $Y$ , a variedade  $Y$  sem bordo, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  satisfizerem  $d(f, g) < \varepsilon$  então  $f$  é homotópica a  $g$ .

*Proof.* Sejam  $\varepsilon > 0$  tal que  $V_\varepsilon(Y)$  é uma vizinhança tubular de  $Y$  e  $\pi : V_\varepsilon(Y) \rightarrow Y$  a projecção associada. Dados  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  tais que  $d(f, g) < \varepsilon$  podemos definir a homotopia  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ ,  $h(t, x) := \pi((1-t)f(x) + tg(x))$  entre  $f$  e  $g$ . Esta aplicação  $h$  está bem definida porque da hipótese resulta que  $(1-t)f(x) + tg(x) \in V_\varepsilon(Y)$  para todo  $t \in [0, 1]$  e  $x \in X$ .  $\square$

Um espaço topológico  $X$  diz-se *contráctil* se a identidade  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  for homotópica a uma aplicação constante  $c : X \rightarrow X$ . Qualquer disco em  $\mathbb{R}^n$ , ou mais geralmente, qualquer espaço homeomorfo a um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ , é contráctil, porque, sendo  $X$  convexo, todos os mapas de  $\mathcal{C}(X, X)$  são homotópicos entre si. As esferas  $\mathbb{S}^n$  ( $n \geq 0$ ) são exemplos de espaços não contrácteis.

Um espaço  $X$  diz-se *simplesmente conexo* se toda a aplicação  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  for homotópica a uma aplicação constante  $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ . É habitual traduzir esta propriedade dizendo que toda a curva fechada é homotópica a um ponto.

A circunferência  $\mathbb{S}^1$  e o toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  são exemplos de espaços não simplesmente conexos. A esfera  $\mathbb{S}^2$  é simplesmente conexa.

Dados espaços topológicos  $X \subseteq Y$  dizemos que  $X$  é um *retracto* de  $Y$  se existir uma aplicação contínua  $r : Y \rightarrow X$  tal que  $r|_X = \text{id}_X$ . A aplicação  $r : Y \rightarrow X$  diz-se uma *retracção* de  $Y$  em  $X$ .

**Teorema 7.2.1.** Seja  $X$  uma variedade compacta com bordo. Então  $\partial X$  não é um retracto de  $X$ .

*Proof.* Suponhamos que existe um retracto contínuo  $r : X \rightarrow \partial X$ . Vejamos que então também existe um retracto suave. Fixemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $V_\varepsilon(\partial X)$  seja uma vizinhança tubular de  $\partial X$ . Sejam  $g : X \rightarrow \partial X$  uma função suave

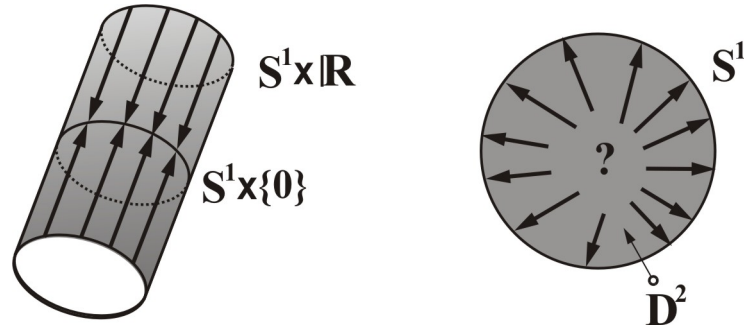


Figure 7.3: A circunferência  $S^1 \times \{0\}$  é um retracto do cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ , mas  $S^1 = \partial\mathbb{D}^2$  não é um retracto do disco  $\mathbb{D}^2$ .

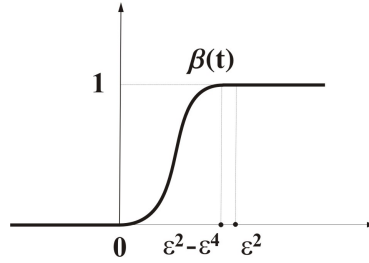


Figure 7.4: Gráfico de  $\beta(t)$

tal que  $\|r(x) - g(x)\| < \varepsilon$  para todo o  $x \in X$ , e  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente suave tal que  $\beta(t) = 0$  para  $t \leq 0$ , e  $\beta(t) = 1$  para  $t \geq \varepsilon^2 - \varepsilon^4$  (Exercício 7.1). Definimos  $\tilde{\beta}: V_\varepsilon(\partial X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\beta}(x) := \beta(\text{dist}_{\partial X}(x)^2)$  e  $\tilde{r}: X \rightarrow \partial X$  pondo

$$\tilde{r}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } \text{dist}_{\partial X}(x) > \varepsilon \\ \pi \left( (1 - \tilde{\beta}(x)) \pi(x) + \tilde{\beta}(x) g(x) \right) & \text{se } \text{dist}_{\partial X}(x) \leq \varepsilon \end{cases}.$$

Observemos que  $\pi$  é um retracto suave que apenas está definido sobre a vizinhança tubular  $V_\varepsilon(\partial X)$ . Fora de  $V_{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}(\partial X)$  temos  $\tilde{\beta}(x) = 1$  o que implica que  $\tilde{r}(x) = \pi(g(x)) = g(x)$ . Logo o mapa  $\tilde{r}: X \rightarrow \partial X$  é suave.

Finalmente,  $\tilde{r}: X \rightarrow \partial X$  é um retracto porque se  $x \in \partial X$ , então  $\tilde{\beta}(x) = 0$  e  $\tilde{r}(x) = \pi(\pi(x)) = x$ .

Seja agora  $y \in \partial X$  um valor regular de  $\tilde{r}: X \rightarrow \partial X$ . Observemos que  $y$  é também um valor regular da aplicação identidade  $\tilde{r}|_{\partial X}: \partial X \rightarrow \partial X$ . Logo, pelo Teorema 4.2.1,  $\tilde{r}^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n - (n - 1) = 1$ , onde  $n = \dim(X)$ , tal que  $\partial\tilde{r}^{-1}(y) = (\tilde{r}|_{\partial X})^{-1}(y) = \{y\}$ . Isto é absurdo porque toda a variedade com bordo de dimensão 1 tem um número par de pontos no bordo (Exercício 7.9).  $\square$

### 7.3 Equivalências de homotopia

Dados espaços topológicos  $X \subseteq Y$ , dizemos que  $X$  é um *retracto por deformação* de  $Y$  se existirem um retracto  $r: Y \rightarrow X$ , e uma aplicação contínua  $h: [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ , tais que:

- (a) para todo  $x \in Y$ ,  $h(0, x) = x$  e  $h(1, x) = r(x)$
- (b) para todo  $x \in X$  e  $t \in [0, 1]$ ,  $h(t, x) = x$ .

Por outras palavras, existe uma homotopia  $h_t$  entre  $\text{id}_Y$  e  $r$  formada por mapas que fixam os pontos de  $X$ .

**Proposição 7.3.1.** A relação ‘*ser um retracto por deformação de*’ é transitiva.

*Proof.* Ver Exercício 7.12. □

A circunferência  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$  é um retracto por deformação do cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Removendo um disco  $\mathbb{D}$  ao cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , a circunferência  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$  continua a ser um retracto de  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \mathbb{D}$ , mas não é um retracto por deformação de  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \mathbb{D}$  (Figura 7.5).

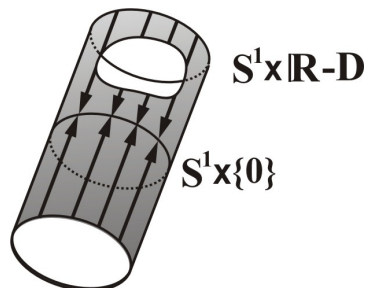


Figure 7.5: Um retracto que não é um retracto por deformação

A composição de aplicações contínuas é compatível com a relação de homotopia.

**Proposição 7.3.2.** Dadas  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$  e  $g_0, g_1 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ , se  $f_0$  é homotópica a  $f_1$  e  $g_0$  é homotópica a  $g_1$  então  $g_0 \circ f_0$  é homotópica a  $g_1 \circ f_1$ .

*Proof.* Ver Exercício 7.11. □

Esta proposição permite definir a *categoria homotópica* (ver definição de categoria no Apêndice 14.4) cujos objectos são os espaços topológicos e cujos

morfismos são as classes de homotopia: Dado  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , a sua *classe de homotopia* é o conjunto

$$[f]_{\simeq} := \{g \in \mathcal{C}(X, Y) : g \simeq f\}.$$

Pela Proposição 7.3.2 fica bem definida a operação de composição ao nível das classes de homotopia.

$$\circ : \frac{\mathcal{C}(X, Y)}{\simeq} \times \frac{\mathcal{C}(X, Y)}{\simeq} \rightarrow \frac{\mathcal{C}(X, Y)}{\simeq}, \quad [g]_{\simeq} \circ [f]_{\simeq} := [g \circ f]_{\simeq}.$$

Os isomorfismos da categoria homotópica correspondem à seguinte noção de equivalência de homotopia. Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  diz-se uma *equivalência de homotopia* se existir  $g : Y \rightarrow X$  contínua tal que

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

A aplicação  $g : Y \rightarrow X$  diz-se uma *inversa homotópica* de  $f : X \rightarrow Y$ . Quando existe uma equivalência de homotopia  $f : X \rightarrow Y$  dizemos que  $X$  e  $Y$  são *homotopicamente equivalentes*, ou que têm o mesmo tipo de homotopia.

**Proposição 7.3.3.** Se  $X$  é um retracto por deformação de  $Y$  então  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes.

*Proof.* Seja  $r : Y \rightarrow X$  um retracto homotópico a  $\text{id}_Y$ , e designemos por  $i : X \rightarrow Y$  a aplicação inclusão de  $X$  em  $Y$ . Então  $r \circ i = \text{id}_X$  e  $i \circ r \simeq \text{id}_Y$ .  $\square$

## 7.4 Grupo Fundamental

Seja  $X$  um espaço topológico. Chama-se *caminho* em  $X$  qualquer aplicação contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Os pontos  $x = \gamma(0)$  e  $y = \gamma(1)$  dizem-se as *extremidades inicial e final* de  $\gamma$ . Nesta secção vamos supor que  $X$  é *conexo por caminhos*, i.e., quaisquer que sejam  $x, y \in X$  existe pelo menos um caminho  $\gamma$  em  $X$  com extremidades  $x$  e  $y$ .

Dados pontos  $x, y \in X$ , definimos

$$\Omega(X, x, y) := \{\gamma \text{ caminho em } X : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Algebrizamos agora os espaços de caminhos  $\Omega(X, x, y)$ .

Dados  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$  e  $\gamma' \in \Omega(X, y, z)$ , definimos a *concatenação*  $\gamma * \gamma' \in \Omega(X, x, z)$  destes dois caminhos por

$$(\gamma * \gamma')(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

Dado  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ , definimos o *caminho inverso*  $\gamma^{-1} \in \Omega(X, y, x)$  por  $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$ . Por fim, designamos por  $\delta_x \in \Omega(X, x, x)$  o caminho constante,  $\delta_x(t) := x$ .

Dois caminhos  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X, x, y)$  dizem-se *homotópicos* neste espaço se existir uma aplicação contínua (homotopia)  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que

- (a)  $h(t, 0) = x$ , para todo  $t \in [0, 1]$ ,
- (b)  $h(t, 1) = y$ , para todo  $t \in [0, 1]$ ,
- (c)  $h(0, s) = \gamma_0(s)$ , para todo  $s \in [0, 1]$ ,
- (d)  $h(1, s) = \gamma_1(s)$ , para todo  $s \in [0, 1]$ .

A relação de homotopia entre caminhos é uma relação de equivalência (Exercício 7.19). Designamos por  $\pi(X, x, y)$  o conjunto das classes de homotopia de caminhos em  $\Omega(X, x, y)$ .

**Proposição 7.4.1.** As operações de concatenação e de inversão de caminhos são compatíveis com a relação de homotopia entre caminhos: Se  $\gamma_0$  é homotópico a  $\gamma_1$  em  $\Omega(X, x, y)$  e  $\gamma'_0$  é homotópico a  $\gamma'_1$  em  $\Omega(X, y, z)$  então

- (a)  $\gamma_0 * \gamma'_0$  é homotópico a  $\gamma_1 * \gamma'_1$  em  $\Omega(X, x, z)$ .
- (b)  $\gamma_0^{-1}$  é homotópico a  $\gamma_1^{-1}$  em  $\Omega(X, y, x)$ .

*Proof.* Descrevemos as homotopias, deixando ao cuidado do leitor a verificação de que estas são aplicações contínuas nas condições pretendidas.

Seja  $h_0: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  uma homotopia entre os caminhos  $\gamma_0$  e  $\gamma'_0$  com as extremidades (inicial  $x$  e final  $y$ ) fixas. Analogamente, seja  $h_1: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  uma homotopia entre os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma'_1$  com as extremidades (inicial  $y$  e final  $z$ ) fixas.

A homotopia  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  entre os caminhos  $\gamma_0 * \gamma'_0$  e  $\gamma_1 * \gamma'_1$  é

$$h(t, s) := \begin{cases} h_0(t, 2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h_1(t, 2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases} .$$

A homotopia  $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  entre os caminhos inversos  $\gamma_0^{-1}$  e  $\gamma_1^{-1}$  é dada por  $k(t, s) := h_0(t, 1 - s)$ .  $\square$

Esta proposição permite associar uma categoria  $\mathcal{C}_X$  (ver definição de categoria no Apêndice 14.4) a um espaço topológico  $X$  do seguinte modo: Os objectos de  $\mathcal{C}_X$  são os pontos de  $X$ , i.e.,  $\text{Obj}(\mathcal{C}_X) := X$ . Os morfismos de  $\mathcal{C}_X$  são as classes de homotopia de caminhos com extremidades fixas,  $\text{Mor}(x, y) := \pi(X, x, y)$ . Pela Proposição 7.4.1 ficam bem definidas as

operações de composição e inversão ao nível das classes de homotopia de caminhos.

$$*: \pi(X, x, y) \times \pi(X, y, z) \rightarrow \pi(X, x, z), \quad [\gamma] * [\gamma'] := [\gamma * \gamma'].$$

$$i: \pi(X, x, y) \rightarrow \pi(X, y, x), \quad i([\gamma]) = [\gamma]^{-1} := [\gamma^{-1}].$$

A proposição seguinte garante que  $\mathcal{C}_X$  é uma categoria, e mais do que isso é um grupóide (ver definição no Apêndice 14.4). Dados números reais  $a < b$ , vamos designar por  $\sigma_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação afim  $\sigma_{a,b}(t) := \frac{t-a}{b-a}$  que satisfaz  $\sigma_{a,b}(a) = 0$  e  $\sigma_{a,b}(b) = 1$ .

**Proposição 7.4.2.** Dado um espaço topológico  $X$ ,

- (a) É associativa a operação de concatenação ao nível das classes de homotopia de caminhos: Se  $\gamma \in \pi(X, x, y)$ ,  $\gamma' \in \pi(X, y, z)$  e  $\gamma'' \in \pi(X, z, w)$ 

$$([\gamma] * [\gamma']) * [\gamma''] = [\gamma] * ([\gamma'] * [\gamma'']).$$
- (b) A classe de homotopia dum caminho constante é elemento neutro para a operação de concatenação  $*$ : Se  $[\gamma] \in \pi(X, x, y)$ ,
$$[\gamma] * [\delta_y] = [\gamma] \quad \text{e} \quad [\delta_x] * [\gamma] = [\gamma].$$
- (c) Todo o elemento de  $\pi(X, x, y)$  é invertível: Se  $[\gamma] \in \pi(X, x, y)$ ,
$$[\gamma]^{-1} * [\gamma] = [\delta_y] \quad \text{e} \quad [\gamma] * [\gamma]^{-1} = [\delta_x].$$

*Proof.* A concatenação de caminhos já é associativa como operação nos espaços de caminhos  $\Omega(X, x, y)$ , pelo que continua associativa ao nível das classes de homotopia.

Seja  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ . Para (b) temos que mostrar que os caminhos  $\delta_x * \gamma$  e  $\gamma * \delta_y$  são homotópicos a  $\gamma$ . As correspondentes homotopias são respectivamente

$$h_1(t, s) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \gamma(\sigma_{\frac{1-t}{2}, 1}(s)) & \text{se } \frac{1-t}{2} < s \leq 1 \end{cases},$$

$$h_2(t, s) := \begin{cases} \gamma(\sigma_{0, \frac{1+t}{2}}(s)) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ y & \text{se } \frac{1+t}{2} < s \leq 1 \end{cases}.$$

Finalmente, para (c) basta notar que o caminho  $\gamma * \gamma^{-1}$  é homotópico a  $\delta_x$  através da homotopia seguinte

$$h(t, s) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \gamma(\sigma_{\frac{t}{2}, \frac{1}{2}}(s)) & \text{se } \frac{t}{2} < s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma^{-1}(\sigma_{\frac{1}{2}, 1-\frac{t}{2}}(s)) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ x & \text{se } 1 - \frac{t}{2} < s \leq 1 \end{cases}.$$

Analogamente se vê que o caminho  $\gamma^{-1} * \gamma$  é homotópico a  $\delta_y$ . □



**Corolário 7.4.1.** Seja  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos. Então  $(\pi(X, x, x), *)$  é um grupo, para todo  $x \in X$ , e todos estes grupos são isomorfos entre si.

*Proof.* Segue da categoria  $\mathcal{C}_X$  ser um grupóide (ver definição de grupóide no Apêndice 14.4).  $\square$

**Definição 7.4.1.** Chama-se *fundamental do espaço topológico  $X$*  a qualquer grupo isomorfo a  $\pi(X, x) := \pi(X, x, x)$ , com  $x \in X$ .

**Proposição 7.4.3.** Dado um mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$ , se dois caminhos  $\gamma_0, \gamma_1$  são homotópicos em  $\Omega(X, x, y)$  então os caminhos  $f \circ \gamma_0$  e  $f \circ \gamma_1$  são homotópicos em  $\Omega(Y, f(x), f(y))$ .

*Proof.* Se  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  for uma homotopia entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  então  $f \circ h$  é uma homotopia entre os caminhos  $f \circ \gamma_0$  e  $f \circ \gamma_1$ .  $\square$

A proposição anterior mostra que todo o mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  induz uma família de aplicações  $f_*: \pi(X, x, y) \rightarrow \pi(Y, f(x), f(y))$ , definida por  $f_*[\gamma] := [f \circ \gamma]$ .

**Proposição 7.4.4.** Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa contínuo. A família de aplicações  $f_*: \pi(X, x, y) \rightarrow \pi(Y, f(x), f(y))$  determina um functor entre os grupóides  $\mathcal{C}_X$  e  $\mathcal{C}_Y$ . Em particular,  $f_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, f(x))$  é um morfismo de grupos, para todo  $x \in X$ .

*Proof.* A functorialidade de  $f_*: \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$  é consequência das seguintes propriedades

- (1)  $f \circ \delta_x = \delta_{f(x)}$ , qualquer que seja  $x \in X$ ,
- (2)  $(f \circ \gamma)^{-1} = f \circ \gamma^{-1}$ , qualquer que seja  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ ,
- (3)  $f \circ (\gamma * \gamma') = (f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')$ , quaisquer que sejam  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$  e  $\gamma' \in \Omega(X, y, z)$ .  $\square$

**Proposição 7.4.5.** A correspondência que a cada espaço topológico  $X$  associa o grupóide  $\mathcal{C}_X$ , e que a cada mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  associa o morfismo de grupóides  $f_*: \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$  é um functor da categoria dos espaços topológicos na categoria dos grupóides.

*Proof.* Exercício 7.20.  $\square$

**Proposição 7.4.6.** O grupo fundamental é um invariante topológico e homotópico. Espaços topológicos homotopicamente equivalentes têm o mesmo grupo fundamental.

*Proof.* Exercício 7.22.  $\square$

Na secção seguinte apresentamos vários exemplos de cálculo do grupo fundamental.

## 7.5 Espaços de Recobrimento

Sejam  $\tilde{X}$  e  $X$  variedades conexas de dimensão  $n$ .

**Definição 7.5.1.** *Um mapa suave  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  diz-se uma aplicação de recobrimento se para cada  $y \in X$  existir um aberto  $V \subset X$  com  $y \in V$  tal que  $p^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 \cup \dots$  é a união disjunta de uma família finita ou numerável de abertos  $U_1, U_2, \dots \subset \tilde{X}$  tais que  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow V$  é um difeomorfismo para todo  $i = 1, 2, \dots$ .*

*A variedade  $\tilde{X}$  diz-se um espaço de recobrimento de  $X$ . Para cada  $x \in X$ , o conjunto  $p^{-1}(x)$  diz-se uma fibra do recobrimento.*

Da definição segue que toda a aplicação de recobrimento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  é um difeomorfismo local. A recíproca desta afirmação também é válida desde que a variedade  $\tilde{X}$  seja compacta.

**Proposição 7.5.1.** *Sejam  $\tilde{X}$  e  $X$  variedades compactas e conexas. Todo o difeomorfismo local  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  é uma aplicação de recobrimento.*

*Proof.* Exercício 2.9. □

Todas as fibras de uma aplicação de recobrimento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  têm o mesmo cardinal (Exercício 7.23).

Vejamos alguns exemplos de aplicações de recobrimento.

- O grupo quociente  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  é habitualmente conhecido como o  $n$ -toro. Trata-se dum grupo topológico compacto quando munido da topologia quociente. A projecção natural  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ,  $p(x) = \bar{x} := x + \mathbb{Z}^n$ , é um morfismo de grupos e um homeomorfismo local. Através de  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  podemos introduzir em  $\mathbb{T}^n$  uma estrutura de variedade diferenciável abstracta (Proposição 14.5.1) que faz da projecção  $p$  uma aplicação de recobrimento (Exercício 7.24).

- Através das identificações naturais  $\mathbb{T}^n \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \cong (\mathbb{S}^1)^n$  a aplicação de recobrimento do exemplo anterior é dada pelo mapa  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{S}^1)^n$

$$p(x_1, \dots, x_n) := (\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1), \dots, \cos(2\pi x_n), \sin(2\pi x_n)).$$

- Seja  $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  o espaço projectivo (Apêndice 14.6) de dimensão  $n$ . Sendo um difeomorfismo local entre variedades compactas, a projecção natural  $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é uma aplicação de recobrimento duplo (todas as fibras têm todas dois elementos) (Exercício 7.25).

- Seja  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos propriamente descontínuo numa variedade  $X$ . Então a projecção  $p: X \rightarrow X/G$  é uma aplicação de recobrimento da variedade (abstracta) quociente  $X/G$  (Proposição 14.5.2, Exercício 7.26).

**Definição 7.5.2.** *Sejam  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento e  $f: Y \rightarrow X$  um mapa suave. Chama-se levantamento de  $f$  relativo a  $p$  a um mapa suave  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $f = p \circ \tilde{f}$ .*

A proposição seguinte garante a unicidade do levantamento dum mapa fixado um valor inicial.

**Proposição 7.5.2.** . *Sejam  $Y$  uma variedade conexa,  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento,  $f: Y \rightarrow X$  um mapa suave,  $\tilde{f}$  e  $\hat{f}$  dois levantamentos de  $f$  relativos a  $p$ . Se  $\tilde{f}(x_0) = \hat{f}(x_0)$  para algum  $x_0 \in Y$  então  $\tilde{f} = \hat{f}$ .*

*Proof.* Exercício 7.28. □

A proposição seguinte assegura a existência e unicidade (fixado um valor inicial) do levantamento de um mapa  $f: Y \rightarrow X$  quando a variedade  $Y$  é conexa e simplesmente conexa.

**Proposição 7.5.3.** *Sejam  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento e  $Y$  uma variedade conexa e simplesmente conexa. Dado um mapa suave  $f: Y \rightarrow X$  e pontos  $y_0 \in Y$ ,  $x_0 \in p^{-1}(f(y_0))$  existe um único levantamento suave  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  de  $f$  relativo a  $p$  tal que  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ .*

*Proof.* Exercício 7.31 □

Dadas duas aplicações de recobrimento  $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  chama-se *morfismo de recobrimento* entre os espaços de recobrimento  $\tilde{X}_1$  e  $\tilde{X}_2$  a um mapa suave  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tal que  $p_2 \circ f = p_1$ .

Fixada uma variedade  $X$ , os espaços de recobrimento de  $X$  e os morfismos de recobrimento formam uma categoria (Exercício 7.32). Em particular, a composição de morfismos de recobrimento é um morfismo de recobrimento.

**Proposição 7.5.4.** *Sejam  $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  aplicações de recobrimento. Todo o morfismo de recobrimento  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é uma aplicação de recobrimento.*

*Proof.* Exercício 7.33. □

Sempre que um espaço de recobrimento  $\tilde{X}$  é conexo e simplesmente conexo ele goza da seguinte propriedade universal.

**Proposição 7.5.5.** *Seja  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento onde  $\tilde{X}$  é uma variedade conexa e simplesmente conexa.*

*Para toda a aplicação de recobrimento  $\hat{p}: \hat{X} \rightarrow X$  existe um morfismo de recobrimento  $p: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  tal que  $\hat{p} \circ p = \tilde{p}$ .*

*Proof.* Como  $\tilde{X}$  é conexa e simplesmente conexa, pela Proposição 7.5.3 a aplicação  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X$  admite um levantamento  $p: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  relativo a  $\hat{p}$ . Por definição de levantamento temos  $\hat{p} \circ p = \tilde{p}$ . □

A proposição anterior motiva a definição seguinte.

**Definição 7.5.3.** *Chama-se recobrimento universal duma variedade conexa  $X$  a uma aplicação de recobrimento  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X$  onde  $\tilde{X}$  seja uma variedade conexa e simplesmente conexa.*

Toda a variedade conexa admite um recobrimento universal (pode ver em [11, Cap. 5, Sec. 6] a construção dum espaço de recobrimento universal topológico  $\tilde{X}$ , que pela Proposição 14.5.1 herda de  $X$  uma estrutura de variedade abstracta).

**Proposição 7.5.6.** *Seja  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento. Se  $\tilde{X}$  for conexa e simplesmente conexa, todo o endomorfismo de recobrimento  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  é um automorfismo, i.e., é invertível como morfismo de recobrimento.*

*Proof.* Seja  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  um endomorfismo de recobrimento. Fixado  $x_0 \in X$  temos  $f(p^{-1}(x_0)) = p^{-1}(x_0)$ . Sejam  $\bar{x}_0, \bar{y}_0 \in p^{-1}(x_0)$  tais que  $f(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ . Pela Proposição 7.5.3 existe um (único) levantamento  $g: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  do mapa  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  (relativo a  $p$ ) tal que  $g(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$ . Segue que  $g$  é um morfismo de recobrimento.

Vamos mostrar que  $g = f^{-1}$ . A composição  $h = g \circ f$  é um morfismo de recobrimento tal que  $h(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$ , e em particular  $h$  é um levantamento de  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  (relativo a  $p$ ) com o valor inicial  $h(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$ . Como a identidade é outro levantamento nas mesmas condições, pela unicidade do levantamento (Proposição 7.5.2),  $g \circ f = h = \text{id}_{\tilde{X}}$ . Analogamente se vê que  $f \circ g = \text{id}_{\tilde{X}}$ .  $\square$

Qualquer automorfismo de recobrimento será chamado uma *transformação de recobrimento*. Vamos designar por  $\mathcal{G}(\tilde{X}|X) \subset \text{Dif}^\infty(\tilde{X})$  o grupo das transformações de recobrimento de  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Teorema 7.5.1.** *Seja  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento universal de  $X$ . Então  $\mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  é isomorfo  $\pi(X, x)$ .*

*Proof.* Vamos dividir a prova em vários passos.

Fixemos  $x_0 \in X$  e seja  $F(x_0) := p^{-1}(x_0)$  a fibra da aplicação de recobrimento no ponto  $x_0$ . Seja  $\mathcal{S}(x_0)$  o grupo das permutações (aplicações bijectivas) de  $F(x_0)$ .

Fixada a classe de homotopia  $[\gamma] \in \pi(X, x_0)$  de um caminho fechado  $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ , e um ponto na fibra  $x \in F(x_0) = p^{-1}(x_0)$ , designemos por  $\tilde{\gamma}_x: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  o único levantamento de  $\gamma$  relativo a  $p$  tal que  $\tilde{\gamma}_x(1) = x$ . Definimos a aplicação  $\Phi: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{S}(x_0)$  pondo  $\Phi([\gamma])(x) := \tilde{\gamma}_x(0)$ .

■  $\Phi: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{S}(x_0)$  é um homomorfismo de grupos. Por outras palavras,  $\Phi$  determina uma acção do grupo  $\pi(X, x_0)$  na fibra  $F(x_0)$ .

Pelo Exercício 7.30, se  $\gamma'$  for um caminho homotópico a  $\gamma$  em  $\Omega(X, x_0)$  então  $\tilde{\gamma}_x(0) = \tilde{\gamma}'_x(0)$ . Logo  $\Phi([\gamma])(x) = \tilde{\gamma}_x(0)$  não depende da escolha do representante da classe de homotopia  $[\gamma]$ . Como  $\gamma$  é um caminho fechado

$$p(\tilde{\gamma}_x(0)) = (p \circ \tilde{\gamma}_x)(0) = \gamma(0) = x_0$$

pelo que  $\Phi([\gamma])(x) \in F(x_0)$ .

Vejam agora que  $\Phi$  é um homomorfismo do semigrupo  $(\pi(X, x_0), *)$  no semigrupo das aplicações  $\varphi: F(x_0) \rightarrow F(x_0)$  munido da operação de composição, i.e., quaisquer que sejam  $\gamma, \gamma' \in \Omega(X, x_0)$  e  $x \in F(x_0)$ ,

$$\Phi([\gamma] * [\gamma'])(x) = \Phi([\gamma])(\Phi([\gamma'])(x)).$$

Consideremos  $y := \tilde{\gamma}'_x(0)$  e  $z := \tilde{\gamma}_y(0)$ , de modo que  $\tilde{\gamma}_y \in \Omega(\tilde{X}, z, y)$ ,  $\tilde{\gamma}'_x \in \Omega(\tilde{X}, y, x)$  e  $\tilde{\gamma}_y * \tilde{\gamma}'_x \in \Omega(\tilde{X}, z, x)$ . O caminho  $\tilde{\gamma}_y * \tilde{\gamma}'_x$  é o levantamento de  $\gamma * \gamma'$  que satisfaz  $(\tilde{\gamma}_y * \tilde{\gamma}'_x)(1) = \tilde{\gamma}'_x(1) = x$ . Logo

$$\begin{aligned} \Phi([\gamma] * [\gamma'])(x) &= \Phi([\gamma * \gamma'])(x) = (\tilde{\gamma}_y * \tilde{\gamma}'_x)(0) = \tilde{\gamma}_y(0) \\ &= \Phi([\gamma])(y) = \Phi([\gamma])(\Phi([\gamma'])(x)). \end{aligned}$$

Por outro lado todo o levantamento do caminho constante  $\delta_{x_0}$  é um caminho constante, pelo que  $\Phi([\delta_{x_0}]) = \text{id}_{F(x_0)}$ . Pela propriedade de semigrupo

$$\Phi([\gamma]) \circ \Phi([\gamma^{-1}]) = \Phi([\gamma * \gamma^{-1}]) = \Phi([\delta_{x_0}]) = \text{id}_{F(x_0)}$$

o que implica que cada  $\Phi([\gamma])$  seja uma aplicação bijectiva, i.e.,  $\Phi([\gamma]) \in \mathcal{S}(x_0)$ . Fica assim provado que  $\Phi: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{S}(x_0)$  é um homomorfismo de grupos.

Dada uma transformação de recobrimento  $f \in \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$ , como  $p \circ f = p$  temos  $f(F(x_0)) = F(x_0)$ . Por outras palavras o grupo  $\mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  actua na fibra  $F(x_0)$ . Mostramos em seguida que esta acção comuta com a acção do grupo fundamental  $\pi(X, x_0)$ .

■  $f(\Phi([\gamma])(x)) = \Phi([\gamma])(f(x))$ , sempre que  $f \in \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  e  $[\gamma] \in \pi(X, x_0)$  e  $x \in F(x_0)$ .

Seja  $y = \Phi([\gamma])(x)$ . O caminho  $\tilde{\gamma}_x$  é o único levantamento de  $\gamma$  que liga  $y$  a  $x$ . Logo, como  $p \circ f = p$ ,  $f \circ \tilde{\gamma}_x$  é o levantamento de  $\gamma$  que liga  $f(y)$  a  $f(x)$ . Segue que  $f \circ \tilde{\gamma}_x = \tilde{\gamma}_{f(x)}$  e portanto

$$f(\Phi([\gamma])(x)) = f(\tilde{\gamma}_x(0)) = \tilde{\gamma}_{f(x)}(0) = \Phi([\gamma])(f(x)).$$

Observemos que dados  $x, y \in F(x_0)$  existe uma única transformação de recobrimento  $f \in \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  tal que  $f(x) = y$ . Este facto segue da Proposição 7.5.3, sendo  $f$  o único levantamento de  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  relativo a  $p$  que satisfaz  $f(x) = y$ .

Fixemos  $z_0 \in F(x_0)$ . Definimos  $F: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$ ,  $[\gamma] \mapsto F_{[\gamma]}$ , como a aplicação que a cada classe de homotopia  $[\gamma] \in \pi(X, x_0)$  associa a única transformação  $F_{[\gamma]} \in \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  que satisfaz  $F_{[\gamma]}(\Phi([\gamma])(z_0)) = z_0$ .

■  $F: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  é um homomorfismo de grupos.

Dadas classes de homotopia  $[\gamma], [\gamma'] \in \pi(X, x_0)$ , usando a relação de comutatividade expressa no passo anterior,

$$\begin{aligned} (F_{[\gamma]} \circ F_{[\gamma']})(\Phi([\gamma] * [\gamma'])(z_0)) &= F_{[\gamma]}(F_{[\gamma']}(\Phi([\gamma])(\Phi([\gamma'])(z_0)))) \\ &= F_{[\gamma]}(\Phi([\gamma])(F_{[\gamma']}(\Phi([\gamma'])(z_0)))) \\ &= F_{[\gamma]}(\Phi([\gamma])(z_0)) = z_0 \end{aligned}$$

o que implica que  $F_{[\gamma]*[\gamma']} = F_{[\gamma]} \circ F_{[\gamma']}$ .

■  $F: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  é injectiva.

Basta ver que  $F$  é um monomorfismo. Seja  $[\gamma] \in \pi(X, x_0)$  tal que  $F_{[\gamma]} = \text{id}_{\tilde{X}}$ . Então  $\Phi([\gamma])(z_0) = z_0$ . Por outras palavras,  $\tilde{\gamma}_{z_0} \in \Omega(\tilde{X}, z_0)$  é um caminho fechado. Como  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo, o caminho  $\tilde{\gamma}_{z_0}$  é homotópico a um caminho constante, o que implica que  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}_{z_0}$  também seja homotópico a  $\delta_{x_0}$ , i.e.,  $[\gamma] = [\delta_{x_0}]$ .

■  $F: \pi(X, x_0) \rightarrow \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$  é sobrejectiva.

Dada  $f \in \mathcal{G}(\tilde{X}|X)$ , como  $\tilde{X}$  é conexo, existe um caminho  $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  que liga  $f^{-1}(z_0)$  a  $z_0$ . Definindo  $\gamma = p \circ \hat{\gamma}$ , como  $\hat{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$  que termina em  $z_0$ , temos  $\tilde{\gamma}_{z_0} = \hat{\gamma}$ . Logo

$$f(\Phi([\gamma])(z_0)) = f(\tilde{\gamma}_{z_0}(0)) = f(\hat{\gamma}(0)) = f(f^{-1}(z_0)) = z_0$$

o que implica que  $f = F_{[\gamma]}$ , e estabelece a sobrejectividade de  $F$ .  $\square$

Terminamos esta secção com a lista dos grupos fundamentais dos exemplos introduzidos no início da secção.

■ Sejam  $X$  uma variedade conexa e simplesmente conexa e  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos propriamente descontínuo em  $X$ . Sob estas hipóteses  $\pi(X/G, \bar{x}) \simeq \mathcal{G}(X|X/G) = G$  (Exercício 7.34).

■ O grupo das transformações de recobrimento  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n|\mathbb{T}^n)$  é o grupo das translações  $\tau_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_k(x) := x + k$ , segundo vectores  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Em particular  $\pi(\mathbb{T}^n, \bar{x}) \simeq \mathbb{Z}^n$  (Exercício 7.35).

■ O grupo das transformações de recobrimento  $\mathcal{G}(\mathbb{S}^n|\mathbb{P}^n)$  tem dois elementos, a identidade e o mapa antípoda  $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $A(x) := -x$ . Em particular  $\pi(\mathbb{P}^n, \bar{x}) \simeq \mathbb{Z}_2$  (Exercício 7.36).

## 7.6 Exercícios

**Ex 7.1.** Mostre que dados  $a < b$  existe uma função suave  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\beta(x) = 0$  para  $x \leq a$ ,  $\beta(x) = 1$  para  $x \geq b$  e  $\beta'(x) > 0$  para  $a < x < b$ .

**Sugestão:** Mostre que a função  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é de classe  $C^\infty$  e defina

$$\beta(x) := \frac{\int_a^x \psi(t-a) \psi(b-t) dt}{\int_a^b \psi(t-a) \psi(b-t) dt}.$$

**Ex 7.2.** Toda a variedade conexa e simplesmente conexa é orientável.

**Sugestão:** Fixe um ponto  $p \in X$  e uma orientação em  $T_p X$ . Qualquer outro ponto  $q \in X$  pode ser ligado a  $p$  por um caminho. Mostre, usando que  $X$  é simplesmente conexo, que a orientação transportada de  $p$  para  $q$  é independente do caminho escolhido. Aplique então o Exercício 6.24 para concluir que  $X$  é orientável.

Nos seis exercícios seguintes  $X$  é uma variedade com bordo (possivelmente vazio) de dimensão 1, compacta e conexa. Neles fazemos a classificação completa desta classe de variedades uni-dimensionais.

Vamos dizer que um conjunto  $A \subset X$  é um *arco* se for difeomorfo a um intervalo fechado e limitado.

**Ex 7.3.** Mostre que dado um arco  $A \subset X$  existem exactamente dois campos unitários  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(A)$ , i.e., tais que  $\|\xi(x)\| = 1$  para todo  $x \in A$ .

A cada campo unitário  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(A)$  vamos chamar um *sentido* no arco  $A$ .

**Ex 7.4.** Mostre que dado um sentido  $\xi$  num arco  $A$  e um ponto  $x \in A$  existe um único difeomorfismo  $f: [a, b] \rightarrow A$  tal que:

- (a)  $f(0) = x$ ,
- (b)  $f'(t) = \xi(f(t))$  para todo  $t \in [a, b]$ ,
- (c)  $\|f'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ ,
- (d)  $\partial A = \{f(a), f(b)\}$ .

**Ex 7.5.** Mostre que dados dois arcos  $A_1$  e  $A_2$  se  $A_1 \cap A_2$  for conexo então  $A_1 \cup A_2$  é um arco.

**Sugestão:** Escolha sentidos compatíveis nos dois arcos e use o Exercício 7.4.

**Ex 7.6.** Mostre que dados dois arcos  $A_1, A_2 \subset X$  e um ponto  $x \in A_1 \cap A_2$  existe  $f: [a, b] \rightarrow X$  suave (possivelmente não injectiva) tal que

- (a)  $f(0) = x$ ,

(b)  $\|f'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ ,

(c)  $f([a, b]) = A_1 \cup A_2$ .

**Sugestão:** Escolha sentidos em  $A_1$  e  $A_2$  que sejam compatíveis na componente conexa que contem o ponto  $x$ , e considere os difeomorfismos  $f_i: [a_i, b_i] \rightarrow A_i$  que pelo Exercício 7.4 estão associados a estas escolhas. Veja que  $f_1 = f_2$  em  $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ .

**Ex 7.7.** Seja  $f: [a, b] \rightarrow X$  um difeomorfismo local tal que  $\|f'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ . Mostre que se  $f$  não é injectiva então  $f([a, b])$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Conclua que  $f([a, b]) = X$ .

**Sugestão:** Veja que podemos reduzir o problema ao caso em que  $f(b) = f(a)$  sendo  $f|_{[a, b[}: [a, b[ \rightarrow X$  injectiva. Neste caso tome um arco  $A \subset X$  que seja uma vizinhança do ponto  $f(a) = f(b)$  e que não contenha toda a imagem  $f([a, b])$ . Tome  $\delta > 0$  tal que  $f(t) \in A$  para todo  $t \in [a, a + \delta] \cup [b - \delta, b]$ . Mostre que existe um único sentido no arco  $A$  que é compatível com as orientações induzidas pelas restrições  $f: [a, a + \delta] \rightarrow A$  e  $f: [b - \delta, b] \rightarrow A$ . Conclua que podemos estender  $f$  como aplicação suave e periódica de período  $b - a$ .

**Ex 7.8.** Mostre que  $X$  é difeomorfa a um dos modelos  $[0, 1]$  ou  $\mathbb{S}^1$ .

**Sugestão:** Considere uma cobertura finita de  $X$  por abertos cujos fechos topológicos sejam arcos e jogue com os exercícios 7.5, 7.6 e 7.7.

**Ex 7.9.** Mostre que a fronteira duma variedade compacta com bordo de dimensão 1 consiste sempre de um número par de pontos.

**Ex 7.10.** Mostre que a relação de homotopia é uma relação de equivalência em  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**Sugestão:** Para a transitividade, considere homotopias  $h_1$  de  $f_1$  em  $f_2$ , e  $h_2$  de  $f_2$  em  $f_3$ , e defina  $h: [0, 1] \times X \rightarrow Y$  por

$$h(t, x) = \begin{cases} h_1(2t, x) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(2t - 1, x) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} .$$

**Ex 7.11.** Sejam  $f_i \in \mathcal{C}(X, Y)$  e  $g_i \in \mathcal{C}(Y, Z)$ ,  $i = 0, 1$ . Mostre que se  $f_0 \overset{\circ}{\sim} f_1$  e  $g_0 \overset{\circ}{\sim} g_1$  então  $g_0 \circ f_0 \overset{\circ}{\sim} g_1 \circ f_1$ .

**Sugestão:** Considere homotopias  $h_1$  de  $f_0$  em  $f_1$ , e  $h_2$  de  $g_0$  em  $g_1$ , e defina  $h: [0, 1] \times X \rightarrow Z$  por  $h(t, x) := h_2(t, h_1(t, x))$ .

**Ex 7.12.** Seja  $Z$  um espaço topológico. Dados subespaços  $X \subseteq Y \subseteq Z$ , mostre que se  $Y$  é um retracto por deformação de  $Z$ , e  $X$  é um retracto por deformação de  $Y$  então  $X$  é um retracto por deformação de  $Z$ .

**Sugestão:** Sejam  $r_1: Y \rightarrow X$  e  $r_2: Z \rightarrow Y$  os retractos assumidos e



considere as homotopias  $h_1$  de  $\text{id}_Y$  em  $r_1$ , e  $h_2$  de  $\text{id}_Z$  em  $r_2$ , Defina então  $h : [0, 1] \times Z \rightarrow Z$  por

$$h(t, z) = \begin{cases} h_2(2t, z) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_1(2t - 1, r_2(z)) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} .$$

Deve mostrar que  $h$  é uma homotopia contínua entre  $\text{id}_Z$  e  $r_1 \circ r_2$ , que fixa todos os pontos de  $X$ .

Nos quatro exercícios seguintes  $X$  e  $Y$  são variedades compactas,  $Y$  variedade sem bordo.

**Ex 7.13.** Mostre que a relação de homotopia em  $\mathcal{C}(X, Y)$  é aberta.

**Ex 7.14.** Mostre que existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $f, g \in C^\infty(X, Y)$  satisfazem  $d(f, g) < \varepsilon$  então  $f$  e  $g$  são suavemente homotópicas.

**Ex 7.15.** Mostre que relação ‘ser suavemente homotópica a’ é uma relação de equivalência em  $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ .

**Sugestão:** Para a transitividade considere homotopias suaves  $h_1$  de  $f_1$  em  $f_2$ , e  $h_2$  de  $f_2$  em  $f_3$ , e defina  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  por

$$h(t, x) = \begin{cases} h_1(\beta(2t), x) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(\beta(2t - 1), x) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} ,$$

escolhendo  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como uma função suave tal que

- $0 \leq \beta(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ ,
- $\beta(x) = 0, \forall x \in [0, 1/4]$ ,
- $\beta(x) = 1, \forall x \in [3/4, 1]$ .

Mostre que a aplicação  $h$  é suave.

**Ex 7.16.** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  duas funções suaves. Mostre que  $f$  e  $g$  são homotópicas sse são suavemente homotópicas.

**Ex 7.17.** Prove o teorema do ponto fixo de Brouwer. Todo o mapa contínuo  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tem pelo menos um ponto fixo.

**Sugestão:** Supondo que  $f$  não tem pontos fixos em  $\mathbb{D}^n$  use a Figura 7.6 para definir uma retracção  $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \partial\mathbb{D}^n$ .

**Ex 7.18.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos homotopicamente equivalentes. Mostre que  $X$  é contráctil, resp. simplesmente conexo, se e somente se  $Y$  é contráctil, resp. simplesmente conexo.

**Ex 7.19.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x, y \in X$ . Mostre que relação de homotopia entre caminhos é uma relação de equivalência em  $\Omega(X, x, y)$ .

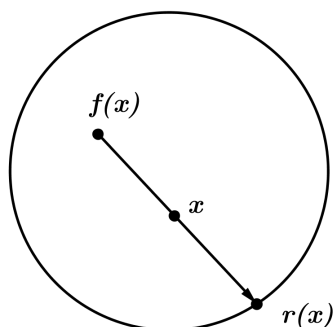


Figure 7.6: Definição geométrica duma retracção  $r: \mathbb{D}^n \rightarrow \partial\mathbb{D}^n$ .

**Ex 7.20.** Mostre que a correspondência que a cada espaço topológico  $X$  associa o grupóide  $\mathcal{C}_X$ , e a cada mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  associa o morfismo de grupóides  $f_*: \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$  é um functor da categoria dos espaços topológicos na categoria dos grupóides.

**Ex 7.21.** Sejam  $f, g: X \rightarrow Y$  mapas contínuos. Mostre que se  $f$  e  $g$  são homotópicos então determinam o mesmo morfismo entre os grupóides  $\mathcal{C}_X$  e  $\mathcal{C}_Y$ , i.e.,  $f_* = g_*: \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$ .

**Ex 7.22.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos. Mostre que se  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes então  $\pi(X, x) \simeq \pi(Y, y)$ , quaisquer que sejam  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

**Sugestão:** Use os exercícios 7.20 e 7.21.

**Ex 7.23.** Seja  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento. Mostre que todas as fibras  $p^{-1}(x)$ , com  $x \in X$ , têm o mesmo número de elementos.

**Ex 7.24.** Seja  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  o  $n$ -toro. Mostre que o mapa quociente  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  é uma aplicação de recobrimento.

**Ex 7.25.** Mostre que a esfera  $\mathbb{S}^n$  é um recobrimento duplo do espaço projectivo  $\mathbb{P}^n$ , i.e., que a projecção canónica  $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é uma aplicação de recobrimento cujas fibras têm dois elementos.

**Ex 7.26.** Seja  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos propriamente descontínuo numa variedade  $X$ . Mostre que a projecção canónica  $p: X \rightarrow X/G$  é uma aplicação de recobrimento.

**Ex 7.27.** Mostre que as aplicações de recobrimento dos exercícios 7.24 e 7.25 são casos particulares da aplicação de recobrimento do Exercício 7.26.

**Ex 7.28.** Sejam  $\tilde{f}$  e  $\hat{f}$  dois levantamentos dum mapa  $f: Y \rightarrow X$  relativos a uma aplicação de recobrimento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ . Mostre que se  $Y$  é conexa e  $\tilde{f}(x_0) = \hat{f}(x_0)$  para algum  $x_0 \in Y$  então  $\tilde{f} = \hat{f}$ .

**Sugestão:** Veja que o conjunto  $A := \{x \in Y: \tilde{f}(x) = \hat{f}(x)\}$  é aberto e fechado em  $Y$ .

**Ex 7.29.** Sejam  $f: Y \rightarrow X$  um mapa suave e  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento. Mostre que se  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  é uma aplicação contínua tal que  $f = p \circ \tilde{f}$  (levantamento contínuo de  $f$ ) então  $\tilde{f}$  é suave.

**Ex 7.30.** Sejam  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento e  $f: Y \rightarrow X$  um mapa suave. Supondo primeiro que (a)  $Y = [0, 1]$  e  $y_0 = 0$ , e depois que (b)  $Y$  convexo e  $y_0 \in Y$ , mostre que dado  $x_0 \in p^{-1}(f(y_0))$  existe um único levantamento suave  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  de  $f$  relativo a  $p$  tal que  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ .

**Sugestão:** Pelo Exercício 7.28 basta provar a existência do levantamento.

Para (a) considere o conjunto  $A \subset [0, 1]$  de todos os  $t \in [0, 1]$  tais que  $f|_{[0,t]}: [0, t] \rightarrow X$  admite um levantamento  $\tilde{f}: [0, t] \rightarrow \tilde{X}$  satisfazendo o valor inicial  $\tilde{f}(0) = x_0$ . Veja que  $A$  é um conjunto aberto e fechado em  $[0, 1]$ .

Para (b) aplique o caso (a) à família de curvas  $g_y: [0, 1] \rightarrow X$ , indexada em  $y \in Y$  e definida por  $g_y(t) := f((1-t)y_0 + ty)$ . Sendo  $\tilde{g}_y: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  o levantamento de  $g_y$  que satisfaz  $\tilde{g}_y(0) = x_0$ , veja que é contínuo o mapa  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ ,  $\tilde{f}(y) := \tilde{g}_y(1)$ .

**Ex 7.31.** Sejam  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento e  $f: Y \rightarrow X$  um mapa suave numa variedade  $Y$  conexa. Mostre que dados pontos  $y_0 \in Y$ ,  $x_0 \in p^{-1}(f(y_0))$  existe um único levantamento suave  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  de  $f$  relativo a  $p$  tal que  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ .

**Sugestão:** Tal como no exercício anterior basta provar a existência do levantamento. Dado um caminho  $\gamma$  ligando  $y_0$  a  $y$  em  $Y$ , seja  $g_\gamma := f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , e  $\tilde{g}_\gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  o levantamento de  $g_\gamma$  determinado pelo valor inicial  $\tilde{g}_\gamma(0) = x_0$ . Dado outro caminho  $\gamma'$  ligando  $y_0$  a  $y \in Y$ , como  $Y$  é simplesmente conexa,  $\gamma'$  é homotópico a  $\gamma$  em  $\Omega(Y, y_0, y)$ . Pelo Exercício 7.30 (b) conclua que  $\tilde{g}_\gamma(1) = \tilde{g}_{\gamma'}(1)$ . Use esta independência do caminho para definir um levantamento contínuo  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  satisfazendo  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ .

**Ex 7.32.** Seja  $X$  uma variedade conexa. Mostre que existe uma categoria cujos objectos são as aplicações de recobrimento de  $X$  e cujos morfismos são os morfismos de recobrimento.

**Ex 7.33.** Sejam  $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  aplicações de recobrimento. Mostre que todo o morfismo de recobrimento  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é uma aplicação de recobrimento.

**Ex 7.34.** Sejam  $X$  uma variedade conexa e simplesmente conexa e  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos propriamente descontínuo em  $X$ .

Mostre que  $G$  é o grupo das transformações de recobrimento de  $p: X \rightarrow X/G$ . Conclua que  $\pi(X/G, \bar{x}) \simeq G$ , para cada  $\bar{x} \in X/G$ .

**Ex 7.35.** Mostre que  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n | \mathbb{T}^n)$  é o grupo das translações  $\tau_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_k(x) := x + k$ , segundo vectores  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Conclua que  $\pi(\mathbb{T}^n, \bar{x}) \simeq \mathbb{Z}^n$ . Para cada vector  $k \in \mathbb{Z}^n$  identifique um representante da correspondente classe de homotopia  $[\gamma_k] \in \pi(\mathbb{T}^n, \bar{x})$ .

**Ex 7.36.** Mostre que  $\mathcal{G}(\mathbb{S}^n | \mathbb{P}^n) = \{\text{id}_{\mathbb{S}^n}, A\}$ , onde  $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  designa o mapa antípoda  $A(x) := -x$ . Conclua que  $\pi(\mathbb{P}^n, \bar{x}) \simeq \mathbb{Z}_2$ .

## Chapter 8

# Homologia

Neste capítulo descrevemos sucintamente uma família de invariantes topológicos conhecida como *homologia singular*.

### 8.1 Homologia Singular

O conceito de homologia, e os invariantes topológicos numéricos que lhes estão associados remontam aos trabalhos de Riemann, Betti e Poincaré [23]. A homologia singular de S. Eilenberg e N. Steenrod é talvez a mais popular das muitas teorias de homologia que surgiram nas efervescentes décadas de 30 e 40 do século XX, com o aparecimento da nova disciplina de Topologia Algébrica, onde o enfoque é desviado dos invariantes numéricos para o estudo de estruturas algébricas que são simultaneamente invariantes topológicos e invariantes homotópicos.

Grosso modo, fixado um inteiro  $n \geq 0$ , a homologia de dimensão  $n$  é um functor da categoria dos espaços topológicos para uma categoria algébrica de grupos abelianos, de módulos sobre um anel, ou de espaços vectoriais sobre um corpo fixado. As definições de categoria e functor são apresentadas no Apêndice 14.4. Por uma questão de simplicidade vamos restringir-nos à homologia singular como functor com valores na categoria dos espaços vectoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  arbitrário, referido como o corpo dos coeficientes.

Sejam  $\mathfrak{Top}$  a categoria dos espaços topológicos cujos objectos são os espaços topológicos e cujos morfismos são as aplicações contínuas, e seja  $\mathfrak{Top}_2$  a categoria cujos objectos são pares de espaços topológicos. Um morfismo  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  nesta categoria é uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset B$ .

Através da identificação  $X = (X, \emptyset)$ , podemos encarar  $\mathfrak{Top}$  como uma subcategoria de  $\mathfrak{Top}_2$ .

Fixado um corpo  $\mathbb{K}$  e um inteiro não negativo  $n \geq 0$ , a *homologia singular* de dimensão  $n$  e coeficientes em  $\mathbb{K}$  é um functor  $H_n: \mathfrak{Top}_2 \rightarrow \mathfrak{Lin}(\mathbb{K})$  com

valores na categoria  $\mathfrak{Lin}(\mathbb{K})$  dos espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Assim, para cada par  $(X, A)$  de espaços topológicos, a homologia

$$H_n(X, A) = H_n(X, A, \mathbb{K})$$

é um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , e se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um mapa contínuo,

$$H_n(f): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

é uma aplicação linear. A functorialidade da homologia corresponde a dizer que dados pares de espaços topológicos  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$ ,  $(Z, C)$  e dados mapas contínuos  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  se tem

- (1)  $H_n(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{H_n(X,A)}$ ,
- (2)  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ .

Dizemos que  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo entre pares de espaços topológicos se  $f: X \rightarrow Y$  for um homeomorfismo tal que  $f(A) = B$ . Estes mapas (homeomorfismos) são os isomorfismos da categoria  $\mathfrak{Top}_2$ .

**Corolário 8.1.1.** Se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo então a aplicação linear  $H_n(f): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  é um isomorfismo.

*Proof.* Se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo e  $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$  é o seu mapa inverso então  $H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = H_n(\text{id}_{(Y,B)}) = \text{id}_{H_n(Y,B)}$ . Analogamente,  $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = H_n(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{H_n(X,A)}$ . Estas duas relações mostram que  $H_n(f)$  é um isomorfismo cujo inverso é a aplicação linear  $H_n(g)$ .  $\square$

## 8.2 Invariantes Topológicos

O Corolário 8.1.1 mostra que os espaços de homologia  $H_n(X, \mathbb{K})$  são invariantes topológicos. Vamos agora introduzir alguns invariantes numéricos de um espaço topológico  $X$  derivados da homologia de  $X$ .

Chama-se *n-ésimo número de Betti* com coeficientes em  $\mathbb{K}$  à dimensão

$$\beta_n(X, \mathbb{K}) := \dim H_n(X, \mathbb{K}), \quad n \geq 0.$$

O *polinómio* (ou série formal) *de Poincaré*, com coeficientes em  $\mathbb{K}$ , é definido por

$$\mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(X, \mathbb{K}) t^n.$$

Chama-se *característica de Euler* ao número

$$\chi(X) := \mathcal{P}_{-1}(X, \mathbb{K}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(X, \mathbb{K}).$$

A característica de Euler não depende do corpo  $\mathbb{K}$  (ver Corolário 8.10.1).

### 8.3 Simplexos e cadeias singulares

Chama-se  $k$ -simplexo canónico ao poliedro convexo de dimensão  $k$

$$\Delta^k = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^k x_i = 1 \right\}$$

determinado pelos  $k + 1$  vértices

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_k = (0, 0, \dots, 1).$$

Considerando o  $(k + 1)$ -simplexo  $\Gamma^{k+1}$  definido pelas inequações  $x_i \geq 0$  e  $\sum_{i=0}^k x_i \leq 1$ , o  $k$ -simplexo  $\Delta^k$  é uma face no bordo de  $\Gamma^{k+1}$ . Cada permutação dos vértices  $e_0, e_1, \dots, e_k$  determina uma orientação em  $\mathbb{R}^{k+1} = T_x \Gamma^{k+1}$ , que por sua vez induz uma orientação em  $\Delta^k \subset \partial \Gamma^{k+1}$  como parte do bordo de  $\Gamma^{k+1}$ . Chama-se *orientação canónica* de  $\Delta^k$  à orientação definida pela permutação ordenada dos vértices  $(e_0, e_1, \dots, e_k)$ .

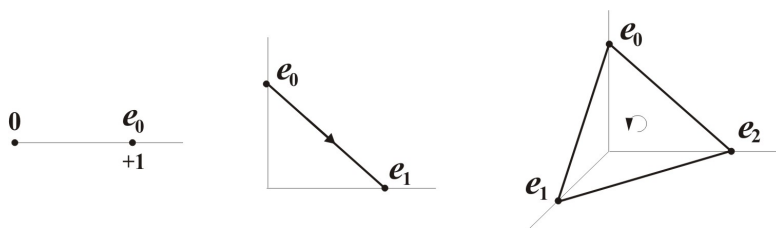


Figure 8.1: Orientações nos simplexos  $\Delta^0$ ,  $\Delta^1$  e  $\Delta^2$

Seja  $X$  um espaço topológico.

Chama-se  $k$ -simplexo singular de  $X$  a qualquer aplicação  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  que seja contínua. Os simplexos singulares podem ser pensados como parametrizações (singulares) de subvariedades topológicas de dimensão  $k$  em  $X$ . Via parametrização eles recebem a orientação canónica de  $\Delta^k$ . Denota-se por  $S_k(X)$  o conjunto de todos os  $k$ -simplexos singulares de  $X$ .

Fixado um corpo  $\mathbb{K}$ , chama-se  $k$ -cadeia singular com coeficientes em  $\mathbb{K}$  a qualquer combinação linear formal com coeficientes em  $\mathbb{K}$  de  $k$ -simplexos singulares. O conjunto de todas as  $k$ -cadeias singulares de  $X$  é um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$  (em geral com dimensão infinita) que se designa por

$$C_k(X, \mathbb{K}) = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ e } \sigma_i \in S_k(X) \right\}.$$

A construção formal deste espaço vectorial  $C_k(X, \mathbb{K}) := \mathbb{K}^{(S_k(X))}$ , vem descrita no Apêndice 14.8.

Uma  $k$ -cadeia singular com coeficientes inteiros pode ser pensada como uma configuração dum número finito de  $k$ -simplexos singulares, eventualmente repetidos, em  $X$ . O facto de se usarem coeficientes num corpo  $\mathbb{K}$  em vez inteiros simplifica o tratamento algébrico da teoria, nomeadamente porque o conceito de dimensão dum espaço vectorial sobre um corpo é mais simples do que o conceito de dimensão de um  $\mathbb{Z}$ -módulo ou grupo abeliano. Podemos pensar nos  $k$ -simplexos singulares como peças de um *Lego*  $k$ -dimensional, cujos ‘encaixes’, efectuados através dos bordos, iremos em seguida definir. Nesta perspectiva uma  $k$ -cadeia é simplesmente uma configuração finita de peças deste *Lego*. As configurações importantes em Homologia são os chamados *ciclos*, onde todas as peças estão encaixadas entre si não havendo nenhum pedaço do bordo livre para encaixar uma nova peça.

## 8.4 O operador de bordo

O bordo do  $k$ -simplexo canónico  $\Delta^k$  é a união de  $k+1$  simplexos de dimensão  $k-1$ ,

$$\partial\Delta^k = \Delta_0^k \cup \Delta_1^k \cup \dots \cup \Delta_k^k,$$

onde  $\Delta_i^k$  representa a face oposta ao vértice  $e_i$ , munida da orientação induzida como parte do bordo de  $\Delta^k$ . Seria natural definir o *bordo* dum  $k$ -simplexo singular  $\sigma \in S_k(X)$  como sendo a sua restrição ao bordo do  $k$ -simplexo canónico, i.e.,  $\partial\sigma = \sigma|_{\partial\Delta^k}$ , identificada com a  $k$ -cadeia singular

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k \sigma|_{\Delta_i^k}.$$

O problema com esta definição é que nenhuma das faces  $\Delta_i^k$ , de dimensão  $k-1$ , coincide com o simplexo canónico  $\Delta^{k-1}$ , pelo que as restrições  $\sigma|_{\Delta_i^k}$  não são (estritamente falando)  $(k-1)$ -simplexos singulares. É claro que podemos identificar canonicamente  $\Delta^{k-1}$  com  $\Delta_i^k$  através duma isometria  $\lambda_i^k : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta_i^k$  que preserve a ordem canónica dos vértices destes poliedros. Facilmente se verifica que a isometria  $\lambda_i^k$  preserva a orientação quando  $i$  é par, e inverte a orientação quando  $i$  é ímpar. Isto justifica que se identifique  $\sigma|_{\Delta_i^k}$  com  $(-1)^i \sigma \circ \lambda_i^k$ , e se defina o *bordo* dum  $k$ -simplexo singular  $\sigma \in S_k(X)$  como sendo a  $(k-1)$ -cadeia

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \circ \lambda_i^k).$$

Referimos-nos às cadeias  $(-1)^i (\sigma \circ \lambda_i^k)$  como as *faces* de  $\sigma$ .

Uma propriedade fundamental que justifica a subtilidade da definição anterior é a seguinte.



**Proposição 8.4.1.** Para qualquer  $k$ -simplexo singular  $\sigma \in S_k(X)$ ,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \partial(\sigma \circ \lambda_i^k) = 0.$$

*Proof.* Vamos dizer que dois  $k$ -simplexos  $\sigma, \sigma' \in S_k(X)$  estão encaixados pelas faces  $(i, j)$  sse  $(-1)^i \sigma \circ \lambda_i^k + (-1)^j \sigma' \circ \lambda_j^k = 0$ . Esta proposição diz-nos que as faces de  $\sigma$  encaixam-se mutuamente duas a duas.

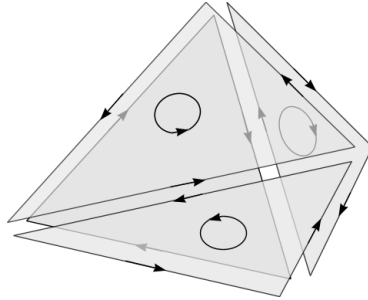


Figure 8.2: Encaixes no bordo dum simplexo singular

A explicação para este facto é a seguinte: Dados  $i \neq j$  entre 0 e  $k$ , a intersecção  $\Delta_i^k \cap \Delta_j^k$  é o  $(k-2)$ -simplexo gerado pelos vértices opostos ao segmento  $[e_i, e_j]$ , que denotaremos por  $\Delta_{i,j}^k$ . Como tanto  $\Delta_i^k$  como  $\Delta_j^k$  têm orientações induzidas como parte do bordo de  $\Delta^k$ , estes dois poliedros induzem por sua vez orientações opostas na face comum  $\Delta_{i,j}^k$ . As faces de  $\sigma_i = (-1)^i \sigma \circ \lambda_i^k$  e de  $\sigma_j = (-1)^j \sigma \circ \lambda_j^k$  que correspondem a  $\Delta_{i,j}^k$  estão encaixadas no sentido anterior. Agrupando os termos encaixados dois a dois vemos que  $\sum_{i=0}^k (-1)^i \partial(\sigma \circ \lambda_i^k) = 0$ .  $\square$

Dada uma  $k$ -cadeia singular  $\tau = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i$ , define-se o seu bordo como sendo  $\partial_k \tau = \sum_{i=1}^N \alpha_i \partial \sigma_i$ . A extensão linear assim obtida

$$\partial_k : C_k(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_{k-1}(X, \mathbb{K})$$

diz-se o  $k$ -homomorfismo de bordo. Da Proposição 8.4.1 infere-se que

**Proposição 8.4.2.** Os homomorfismos de bordo  $\partial_k : C_k(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_{k-1}(X, \mathbb{K})$  e  $\partial_{k+1} : C_{k+1}(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_k(X, \mathbb{K})$  satisfazem  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ .

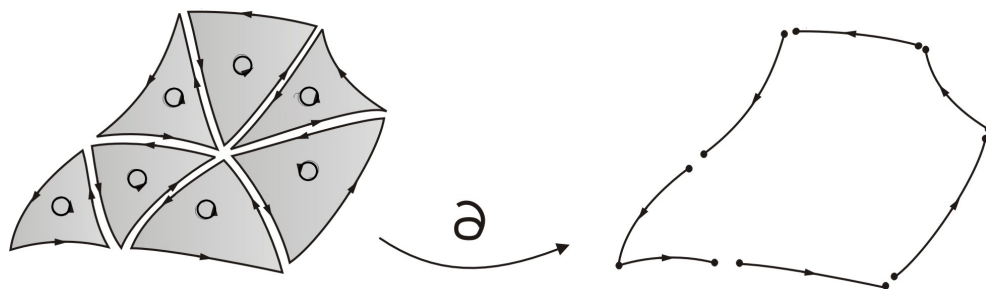


Figure 8.3: O bordo de uma cadeia singular é um ciclo

## 8.5 Homologia dum espaço topológico

Chama-se  $k$ -ciclo de  $X$  a qualquer cadeia  $\tau \in C_k(X, \mathbb{K})$  tal que  $\partial\tau = 0$ . Um exemplo de um  $k$ -ciclo é o bordo  $\partial\sigma$  de um  $(k+1)$ -simplexo singular. Na imagem do Lego anterior, a condição  $\partial\tau = 0$  traduz analiticamente que  $\tau$  é uma configuração cujas peças têm todas as suas faces encaixadas duas duas.

O subespaço de todos os  $k$ -ciclos em  $X$  é denotado por

$$Z_k(X, \mathbb{K}) := \{ \tau \in C_k(X, \mathbb{K}) : \partial\tau = 0 \}.$$

Chama-se  $k$ -bordo de  $X$  a qualquer cadeia  $\tau \in C_k(X, \mathbb{K})$  para a qual existe uma  $(k+1)$ -cadeia  $\beta \in C_{k+1}(X, \mathbb{K})$  tal que  $\tau = \partial\beta$ . O subespaço de todos os  $k$ -bordos em  $X$  é denotado por

$$B_k(X, \mathbb{K}) = \{ \partial\beta : \beta \in C_{k+1}(X, \mathbb{K}) \}.$$

Pela Proposição 8.4.2, todo o  $k$ -bordo é um  $k$ -ciclo. Logo  $B_k(X, \mathbb{K}) \subseteq Z_k(X, \mathbb{K})$ . Define-se o espaço de  $k$ -homologia de  $X$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$  como o quociente

$$H_k(X, \mathbb{K}) := \frac{Z_k(X, \mathbb{K})}{B_k(X, \mathbb{K})}.$$

Dois  $k$ -ciclos  $\tau, \tau' \in Z_k(X, \mathbb{K})$  dizem-se *homólogos*, e escrevemos  $\tau \sim \tau'$ , se  $\tau - \tau' \in B_k(X, \mathbb{K})$ . As classes de equivalência desta relação, elementos do espaço quociente  $H_k(X, \mathbb{K})$ , dizem-se classes de  $k$ -homologia de  $X$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$ .

## 8.6 Acção dum mapa contínuo na homologia

Dado um mapa contínuo  $f : X \rightarrow Y$  definimos

$$f_* : S_k(X) \rightarrow S_k(Y) \quad f_*(\sigma) := f \circ \sigma.$$

A aplicação  $f_*$  admite a extensão linear  $C_k(f): C_k(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_k(Y, \mathbb{K})$

$$C_k(f) \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i \right) := \sum_{i=1}^N \alpha_i f_*(\sigma_i).$$

**Proposição 8.6.1.** Para todo o mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$ ,

$$C_{k-1}(f) \circ \partial_k = \partial_k \circ C_k(f).$$

*Proof.* Da definição resulta claro que o bordo da imagem de um  $k$ -simplexo singular é a imagem do bordo desse  $k$ -simplexo. De facto, dado um  $k$ -simplexo singular  $\sigma \in S_k(X)$ , encarando  $\sigma$  como uma  $k$ -cadeia singular

$$\begin{aligned} \partial_k C_k(f)(\sigma) &= \partial(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \lambda_i^k \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i f \circ (\sigma \circ \lambda_i^k) \\ &= C_{k-1}(f) \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \circ \lambda_i^k) \right) \\ &= C_{k-1}(f) (\partial_k \sigma). \end{aligned}$$

A associatividade da composição  $(f \circ \sigma) \circ \lambda_i^k = f \circ (\sigma \circ \lambda_i^k)$  é o passo crucial deste cálculo. Por linearidade esta comutatividade estende-se a  $k$ -cadeias singulares  $\tau \in C_k(X, \mathbb{K})$ .  $\square$

Desta proposição resulta que a aplicação linear  $C_k(f)$  transforma  $k$ -ciclos de  $X$  em  $k$ -ciclos de  $Y$ , e  $k$ -bordos de  $X$  em  $k$ -bordos de  $Y$ , ou seja

$$C_k(f)(Z_k(X, \mathbb{K})) \subseteq Z_k(Y, \mathbb{K}) \quad \text{e} \quad C_k(f)(B_k(X, \mathbb{K})) \subseteq B_k(Y, \mathbb{K}).$$

Logo,  $C_k(f)$  induz uma transformação linear ao nível das classes de homologia, denotada por

$$H_k(f): H_k(X, \mathbb{K}) \rightarrow H_k(Y, \mathbb{K}).$$

A proposição seguinte traduz a functorialidade da Homologia singular.

**Proposição 8.6.2.** Sejam  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  mapas contínuos entre espaços topológicos. Então

- (a)  $H_k(\text{id}_X) = \text{id}_{H_k(X)}$ ,
- (b)  $H_k(g \circ f) = H_k(g) \circ H_k(f)$ .

*Proof.* A homologia é a composição do functor que a cada espaço topológico associa o respectivo complexo de cadeias singulares (Proposição 14.10.1) com o functor homologia que a cada complexo de cadeias abstracto associa um espaço de homologia em cada dimensão (Proposição 14.10.2). Obviamente, a composição de funtores é um functor.  $\square$

## 8.7 Homologia singular relativa

Dado um par  $(X, A)$  de espaços topológicos e um corpo de coeficientes  $\mathbb{K}$ ,  $C_n(A, \mathbb{K})$  é um subespaço vectorial de  $C_n(X, \mathbb{K})$  que fica invariante pelo operador de bordo,

$$\partial_n C_n(A, \mathbb{K}) \subset C_{n-1}(A, \mathbb{K}), \quad \forall n \geq 1.$$

Define-se o espaço das *k-cadeias singulares relativas* do par  $(X, A)$  como sendo o espaço quociente

$$C_n(X, A, \mathbb{K}) := \frac{C_n(X, \mathbb{K})}{C_n(A, \mathbb{K})}.$$

Da invariância acima resulta que os operadores de bordo induzem aplicações lineares

$$\bar{\partial}_n: C_n(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow C_{n-1}(X, A, \mathbb{K})$$

tais que  $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . A sequência de espaços de cadeias singulares do par  $(X, A)$  constitui um complexo de cadeias abstracto, no sentido definido no Apêndice 14.10.

Por definição um mapa contínuo entre os pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  de espaços topológicos, denotado por  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , é uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset B$ . Dado um tal mapa, a aplicação linear  $C_n(f): C_n(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_n(Y, \mathbb{K})$  transforma  $C_n(A, \mathbb{K})$  em  $C_n(B, \mathbb{K})$ , induzindo por isso uma aplicação linear quociente  $\bar{C}_n(f): C_n(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow C_n(Y, B, \mathbb{K})$ . Da comutatividade na Proposição 8.6.1 resulta claro que

**Proposição 8.7.1.** Para todo o mapa contínuo  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,

$$\bar{C}_{n-1}(f) \circ \bar{\partial}_n = \bar{\partial}_n \circ \bar{C}_n(f).$$

Isto mostra que a família de aplicações lineares  $\{\bar{C}_n(f)\}_{n \geq 0}$  é um morfismo entre os complexos de cadeias associados aos pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ , no sentido definido no Apêndice 14.10.

Os espaços de  $n$ -ciclos e  $n$ -bordos de cadeias singulares relativas definem-se respectivamente por  $Z_n(X, A, \mathbb{K}) = \text{Nuc}(\bar{\partial}_n)$  e  $B_n(X, A, \mathbb{K}) = \text{Im}(\bar{\partial}_{n+1})$ . O espaço de *n-homologia singular relativa* do par  $(X, A)$  define-se por

$$H_n(X, A, \mathbb{K}) := \frac{Z_n(X, A, \mathbb{K})}{B_n(X, A, \mathbb{K})}.$$

Segue da Proposição 8.7.1 que a aplicação linear  $\bar{C}_n(f): C_n(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow C_n(Y, B, \mathbb{K})$  passa ao quociente induzindo uma aplicação linear

$$H_n(f): H_n(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow H_n(Y, B, \mathbb{K})$$

que descreve a acção de  $f$  nos  $n$ -ésimos espaços de homologia.

Finalmente, a homologia singular relativa é uma sequência de funtores  $H_n(\cdot, \mathbb{K}): \mathfrak{Top}_2 \rightarrow \mathfrak{Lin}(\mathbb{K})$  da categoria dos pares de espaço topológicos na categoria dos espaços vectoriais sobre  $\mathbb{K}$ .

**Proposição 8.7.2.** Sejam  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  mapas contínuos entre espaços topológicos. Então

- (a)  $H_k(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{H_k(X,A)}$ ,
- (b)  $H_k(g \circ f) = H_k(g) \circ H_k(f)$ .

*Proof.* Segue das proposições 14.10.1 e 14.10.2. □

## 8.8 Axiomática de Eilenberg-Steenrod

Existem muitas teorias homológicas alternativas à *Homologia Singular*. Em [4], S. Eilenberg e N. Steenrod, os autores da Homologia Singular, propuseram uma axiomática com cinco axiomas para estas várias teorias. Numa ampla classe de espaços topológicos, que inclui os CW-complexos, os complexos simpliciais e todos os espaços que lhes sejam homeomorfos ou topologicamente equivalentes, e em particular para variedades, todas as teorias homológicas satisfazendo a axiomática de Eilenberg-Steenrod são equivalentes, podendo o cálculo dos invariantes ser efectuado com base nos axiomas.

Os teoremas desta secção correspondem à afirmação de que a Homologia Singular satisfaz a axiomática de Eilenberg-Steenrod.

**Teorema 8.8.1** (Aditividade). Se  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  é uma soma directa de espaços topológicos então

$$H_n(X) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i), \quad \forall n \neq 0.$$

*Proof.* Ver Proposição 14.9.1 no Apêndice. □

Dois mapas contínuos  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  dizem-se *homotópicos* se existir um mapa contínuo  $h: [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $h([0, 1] \times A) \subseteq B$ ,  $h(0, x) = f(x)$  e  $h(1, x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 8.8.2** (Invariância por homotopia). Se  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são mapas contínuos homotópicos então as aplicações lineares

$$H_n(f), H_n(g): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

coincidem.

*Proof.* Ver Proposição 14.9.2 no Apêndice. □

Para cada par  $(X, A)$  de espaços topológicos, e cada inteiro  $n \geq 1$ , existe um *morfismo de bordo*

$$\delta_n = \delta_n^{(X,A)}: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

tal que se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é contínua então

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, B) \\ \delta_n \downarrow & & \downarrow \delta_n \\ H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

é um diagrama comutativo.

Seja  $(X, A)$  um par de espaços topológicos.

Sejam  $i: A \rightarrow X$  e  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  as aplicações de inclusão.

**Teorema 8.8.3** (Exactidão). A sequência de espaços de homologia associada ao par  $(X, A)$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X) & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\delta_n} \\ & & & & & & & \\ & & & & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(A) & \rightarrow & H_{n-1}(X) & \rightarrow & H_{n-1}(X, A) & \rightarrow \\ & & & & & & & & & \cdots & \rightarrow & H_0(X, A) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

é exacta.

*Proof.* Ver Proposição 14.9.3 no Apêndice. □

**Teorema 8.8.4** (Excisão). Seja  $U \subset X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ . Então a aplicação de inclusão  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo

$$H_n(i): H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$$

*Proof.* Ver Proposição 14.9.4 no Apêndice. □

**Teorema 8.8.5** (Dimensão). Se  $X = \{p\}$  é um espaço singular,

$$H_0(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} \quad \text{e} \quad H_n(X, \mathbb{K}) = 0, \quad \forall n \neq 0.$$

*Proof.* Ver Proposição 14.9.5 no Apêndice. □

## 8.9 Junção de Células

Sejam  $\mathbb{D}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$  o disco unitário de dimensão  $k$ ,  $\partial\mathbb{D}^k$  o seu bordo,  $\partial\mathbb{D}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}$ , e  $\text{int}(\mathbb{D}^k)$  o seu interior em  $\mathbb{R}^k$ .

Seja  $Y$  um espaço topológico. Chama-se *k-célula* de  $Y$  a um mapa contínuo  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow Y$  tal que a restrição  $\phi|_{\text{int}(\mathbb{D}^k)}: \text{int}(\mathbb{D}^k) \rightarrow \phi(\text{int}(\mathbb{D}^k))$  seja um homeomorfismo.

Dados espaços topológicos  $X \subset Y$ , dizemos que  $Y$  se obtém de  $X$  por junção duma  $k$ -célula  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow Y$  se

- (a)  $X$  é fechado em  $Y$ ,
- (b)  $\phi(\partial\mathbb{D}^k) \subseteq X$ ,
- (c)  $Y \setminus X = \phi(\text{int}(\mathbb{D}^k))$ .

A dimensão  $k$  da célula  $\phi$  será denotada por  $\dim(Y, X)$ .

Seja  $Y$  um espaço obtido de  $X$  por junção da  $k$ -célula  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow Y$ . Dizemos que o par  $(Y, X)$ , ou a célula  $\phi$ , são do *tipo ligação* para  $\mathbb{K}$  se o morfismo de bordo  $\delta_k: H_k(Y, X, \mathbb{K}) \rightarrow H_{k-1}(X, \mathbb{K})$  for zero.

Considerando a orientação canónica em  $\mathbb{D}^k$ , podemos identificar a restrição do mapa  $\phi$  ao bordo,  $\partial\phi = \phi|_{\partial\mathbb{D}^k}: \partial\mathbb{D}^k \rightarrow X$ , com um  $(k-1)$ -ciclo  $\partial\phi \in Z_{k-1}(X, \mathbb{K})$ .

**Proposição 8.9.1.** Se  $(Y, X)$  é um par de espaços topológicos tal que  $Y$  se obtém de  $Y$  por junção de uma  $k$ -célula  $\phi$ , são equivalentes:

- (a) A célula  $\phi$  é do tipo ligação relativamente a  $\mathbb{K}$ ,
- (b) O ciclo  $\partial\phi$  é homólogo a 0 em  $H_{k-1}(X, \mathbb{K})$ .

*Proof.* Por exactidão e excisão (Exercício 8.1) o par  $(Y, X)$  tem a mesma sequência de homologias que o par  $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ . Em particular para qualquer corpo de coeficientes  $\dim H_k(Y, X) = 1$ . A  $k$ -célula  $\phi$  determina uma classe de homologia  $[\phi]$  que gera o espaço  $H_k(Y, X)$ . Logo o morfismo de bordo  $\delta_k: H_k(Y, X, \mathbb{K}) \rightarrow H_{k-1}(X, \mathbb{K})$  anula-se sse  $\delta_k[\phi] = [\partial\phi] = 0$  em  $H_{k-1}(X, \mathbb{K})$ .  $\square$

**Proposição 8.9.2.** Se  $X \subset Y$  são espaços topológicos tais que  $Y$  se obtém de  $X$  por junção duma  $k$ -célula  $\phi$  então

- (a)  $\mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_t(Y, \mathbb{K}) + t^k$  se  $\phi$  é de tipo ligação,
- (b)  $\mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_t(Y, \mathbb{K}) - t^{k-1}$  se  $\phi$  não é de tipo ligação.

*Proof.* Como  $H_n(Y, X) = 0$  para  $n \neq k$ , por exactidão temos uma sequência exacta curta  $0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow 0$  qualquer que seja  $n \notin \{k-1, k\}$ . Pela Proposição 14.10.3 isto implica que  $\beta_n(X, \mathbb{K}) = \beta_n(Y, \mathbb{K})$  em todas estas dimensões.

Como  $H_{k-1}(Y, X) = 0$  e  $H_{k+1}(Y, X) = 0$ , por exactidão temos também a seguinte sequência exacta finita de espaços lineares

$$0 \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, X) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(X) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow 0. \quad (8.1)$$

Se  $\phi$  é do tipo ligação, i.e.,  $\delta_k = 0$ , então por (8.1),  $0 \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow 0$  é exacta e pela Proposição 14.10.3,  $\beta_{k-1}(X, \mathbb{K}) = \beta_{k-1}(Y, \mathbb{K})$ . Por outro lado como  $0 \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$  é também exacta, da Proposição 14.10.4 segue que  $\beta_k(Y, \mathbb{K}) = \beta_k(X, \mathbb{K}) + 1$ . Logo  $\mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_t(Y, \mathbb{K}) + t^k$ .

Se  $\phi$  não é do tipo ligação, como  $\dim H_k(Y, X) = 1$  o morfismo de bordo  $\delta_k: H_k(Y, X) \rightarrow H_{k-1}(X)$  é injectivo. Logo, por (8.1)  $0 \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow 0$  é exacta e pela Proposição 14.10.3,  $\beta_k(X, \mathbb{K}) = \beta_k(Y, \mathbb{K})$ . Por outro lado como  $0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow 0$  é também exacta, da Proposição 14.10.4 segue que  $\beta_{k-1}(Y, \mathbb{K}) = \beta_{k-1}(X, \mathbb{K}) - 1$ . Logo  $\mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_t(Y, \mathbb{K}) - t^{k-1}$ .  $\square$

Se  $X = \{A\}$  e  $Y$  resulta de  $X$  por junção de uma 1-célula  $\phi$  então  $\partial\phi = A - A = 0$ , pelo que  $\phi$  é sempre do tipo ligação.

Se  $X = \{A, B\}$  ( $A \neq B$ ) e  $Y$  resulta de  $X$  por junção de uma 1-célula  $\phi$ , ligando o ponto  $A$  ao ponto  $B$ , então  $\partial\phi = B - A$ , pelo que  $\phi$  nunca é do tipo ligação. De facto as classes de homologia em  $H_0(X)$  correspondem às componentes conexas de  $X$  (demonstração da Proposição 14.9.5).

Se  $X$  é um disco e  $Y$  resulta de  $X$  por junção de uma 2-célula  $\phi$  colada ao longo do bordo  $\partial X$  então podemos identificar  $\partial\phi$  com  $\partial X$ , pelo que  $\phi$  é sempre do tipo ligação.

Se  $X$  é um cilindro com dois bordos,  $C_1$  e  $C_2$ , e  $Y$  resulta de  $X$  por junção de uma 2-célula  $\phi$  colada ao longo do bordo  $C_1 \subset \partial X$  então  $\phi$  nunca é do tipo ligação, já que  $C_1 = \partial\phi$  determina uma classe de homologia não trivial no cilindro  $X$ .

No último exemplo da Tabela 8.1, o espaço  $Y$  representa a *garrafa de Klein* que será revisitada na subsecção 8.10.2. A garrafa de Klein é um exemplo de uma superfície não orientável. Apesar de não poder ser mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ , a garrafa de Klein pode ser construída identificando



$\dim(Y, X)$	$X$	$Y$	$\partial\phi$	tipo de ligação
1			$A - A = 0$	Sim
1			$A - B$	Não
2			$\partial X$	Sim
2			$C_1$	Não
2			$2b$	Não $\Leftarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ Sim $\Leftarrow \mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$

Table 8.1: Exemplos de tipos de ligação de células com dimensões 1 e 2.

adequadamente os dois bordos dum cilindro. Na última figura da Tabela 8.1, colando os dois lados do quadrado assinalados com a letra ‘a’ obtemos um cilindro. Colando em seguida os dois bordos que restam (assinalados com a letra ‘b’) ao longo das orientações induzidas pelo cilindro obtemos a garrafa de Klein. Os quatro vértices do quadrado são assim identificados com o ponto  $A$ . Sendo  $X = \{A\} \cup a \cup b$  o lacete formado pelas curvas fechadas  $a$  e  $b$ , a garrafa de Klein é obtida de  $X$  por junção do quadrado visto como uma 2-célula. O bordo do quadrado identifica-se com  $\partial\phi = a + b - a + b = 2b$ .

## 8.10 Decomposições Celulares

Seja  $X$  um espaço topológico. Chama-se *decomposição celular* de  $X$  a uma sequência (possivelmente infinita)  $\mathcal{D} = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$  de subespaços de  $X$  tal que

- (1)  $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$  e  $X = \cup_{n \geq 0} X_n$ .
- (2) Cada  $X_i$  é obtido de  $X_{i-1}$  por junção de uma  $k_i$ -célula  $\phi_i: \mathbb{D}^{k_i} \rightarrow X_i$ ,  $k_i \geq 0$ , para cada  $i \geq 1$ .

(3)  $F \subseteq X$  é fechado sse  $F \cap X_i$  é fechado em  $X_i$ , para cada  $i \geq 1$ .

Vamos chamar *espaço celular* a um par  $(X, \mathcal{D})$  formado por um espaço topológico  $X$  munido de uma decomposição celular  $\mathcal{D}$ .

Esta noção desempenha um papel fulcral na Teoria de Morse. Em vez de espaços celulares, em [16] é usado o conceito mais forte de CW-complexo, devido J. H. C. Whitehead. Um CW-complexo é espaço topológico  $X$  munido duma decomposição em conjuntos fechados

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n ,$$

onde cada  $X_n$  é obtido de  $X_{n-1}$  por junção dum número arbitrário de células de dimensão  $n$ , sendo o bordo de cada uma destas célula coberto por um número finito de células com dimensão  $< n$ , e onde  $X$  tem a topologia final, a mais fina que torna contínuas as inclusões  $X_n \hookrightarrow X$ .

**Proposição 8.10.1.** Todo o espaço topológico com uma decomposição celular finita é compacto.

*Proof.* Segue por indução, porque se  $X$  é compacto e  $Y$  se obtém de  $X$  por junção duma  $k$ -célula  $\phi$  então  $Y = X \cup \phi(\mathbb{D}^k)$  é compacto.  $\square$

Dado um espaço topológico  $X$  com uma decomposição celular  $\mathcal{D} = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$  definimos  $c_n(\mathcal{D})$  como sendo o número de células de dimensão  $n$  na decomposição  $\mathcal{D}$ ,

$$c_n(\mathcal{D}) := \#\{j \geq 1 : \dim(X_j, X_{j-1}) = n\}.$$

Define-se o polinómio duma decomposição celular finita  $\mathcal{D}$  por

$$\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathcal{D}) t^n .$$

**Corolário 8.10.1** (Fórmula de Euler). Sejam  $(X, \mathcal{D})$  um espaço compacto com uma decomposição celular finita. Então

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n(\mathcal{D}) = \mathcal{Q}_{-1}(\mathcal{D}) .$$

*Proof.* Basta observar que em ambos os casos (a) e (b), da Proposição 8.9.2, fazendo  $t = -1$  obtemos

$$\mathcal{P}_{-1}(Y, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_{-1}(X, \mathbb{K}) + (-1)^k$$

onde  $k = \dim(Y, X)$ . Logo

$$\begin{aligned} \chi(X) = \mathcal{P}_{-1}(X, \mathbb{K}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_{-1}(X_j, \mathbb{K}) - \mathcal{P}_{-1}(X_{j-1}, \mathbb{K}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{\dim(X_j, X_{j-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n(\mathcal{D}) = \mathcal{Q}_{-1}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

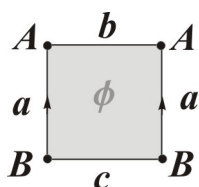
□

O corolário anterior mostra que num espaço compacto com uma decomposição celular finita a característica de Euler  $\chi(X)$  não depende do corpo de coeficientes  $\mathbb{K}$ .

Nas subsecções seguintes fazemos o cálculo das homologia de três superfícies: o cilindro, a garrafa de Klein e o plano projectivo.

## 8.10.1 Construção do Cilindro

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset X_5 \subset X_6$$



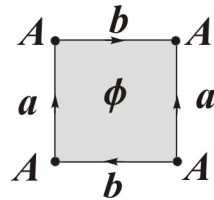
Cada linha representa uma etapa na construção do cilindro, obtido identificando os lados opostos, designados por  $a$ , do quadrado acima.

$i$	$X_i$	$k$ -célula $\phi$	$k$	$\partial\phi$	tipo de ligação	$\mathcal{P}_t(X_i, \mathbb{K})$
1		$A$	0	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	1
2		$B$	0	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	2
3		$a$	1	$A - B$	Não $(\forall \mathbb{K})$	1
4		$b$	1	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	$1 + t$
5		$c$	1	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	$1 + 2t$
6		$\phi$	2	$b - c$	Não $(\forall \mathbb{K})$	$1 + t$

O bordo da 2-célula final é a união das curvas fechadas  $b$  e  $c$ .

8.10.2 Construção da Garrafa de Klein

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4$$



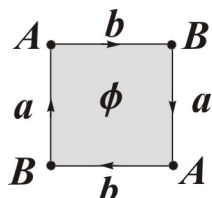
Cada linha representa uma etapa na construção da garrafa de Klein, obtida identificando de acordo com os sentidos expressos os dois pares de lados opostos, designados por  $a$  e  $b$ , do quadrado acima.

$i$	$X_i$	$k$ -célula $\phi$	$k$	$\partial\phi$	tipo de ligação	$\mathcal{P}_t(X_i, \mathbb{K})$
1		$A$	0	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	1
2		$a$	1	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	$1 + t$
3		$b$	1	$\emptyset$	Sim $(\forall \mathbb{K})$	$1 + 2t$
4		$\phi$	2	$2b$	$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow$ Não $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow$ Sim	$1 + t$ $1 + 2t + t^2$

O bordo da 2-célula final é 1-cadeia  $a + b - a + b = 2b$ , que é um bordo em  $H_1(X_3, \mathbb{Z}_2)$ , mas não é em  $H_1(X_3, \mathbb{R})$ .

## 8.10.3 Construção do Plano Projectivo

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset X_5$$



Cada linha representa uma etapa na construção do Plano Projectivo, obtido identificando de acordo com os sentidos expressos os dois pares de lados opostos, designados por  $a$  e  $b$ , do quadrado acima.

$i$	$X_i$	$k$ -célula $\phi$	$k$	$\partial\phi$	tipo de ligação	$\mathcal{P}_t(Y_i, \mathbb{K})$
1		$A$	0	$\emptyset$	Sim ( $\forall \mathbb{K}$ )	1
2		$B$	0	$\emptyset$	Sim ( $\forall \mathbb{K}$ )	2
3		$a$	1	$A - B$	Não ( $\forall \mathbb{K}$ )	1
4		$b$	1	$B - A$	Sim ( $\forall \mathbb{K}$ )	$1 + t$
5		$\phi$	2	$2a + 2b$	$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow$ Não $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow$ Sim	1 $1 + t + t^2$

O bordo da 2-célula final é 1-cadeia  $a + b + a + b = 2a + 2b$ , que é um bordo em  $H_1(X_4, \mathbb{Z}_2)$ , mas não em  $H_1(X_4, \mathbb{R})$ .

## 8.11 Relação com a homotopia

Vejam algumas consequências da propriedade homológica de invariância por homotopia.

**Proposição 8.11.1.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma equivalência de homotopia. Então  $H_k(f) : H_k(X, \mathbb{K}) \simeq H_k(Y, \mathbb{K})$  é um isomorfismo para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, espaços homotopicamente equivalentes têm espaços de homologia isomorfos.

*Proof.* Seja  $g : Y \rightarrow X$  uma inversa homotópica de  $f : X \rightarrow Y$ . Como  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  e  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ , tem-se  $H_k(g) \circ H_k(f) = \text{id}_{H_k(X)}$  e  $H_k(f) \circ H_k(g) = \text{id}_{H_k(Y)}$ , o que mostra que  $H_k(f) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  e  $H_k(g) : H_k(Y) \rightarrow H_k(X)$  são aplicações lineares inversas uma da outra.  $\square$

**Proposição 8.11.2.** Um espaço  $X$  é contráctil sse for homotopicamente equivalente a um ponto. Um espaço contráctil  $X$  tem a homologia dum ponto:  $H_0(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$  e  $H_k(X, \mathbb{K}) = \{0\}$  para todo  $k \geq 1$ .

**Proposição 8.11.3.** Se  $X$  é simplesmente conexo então  $H_1(X, \mathbb{K}) = \{0\}$ .

*Proof.* Se  $X$  é simplesmente conexo então toda a função contínua  $f : \mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}^2 \rightarrow X$  admite uma extensão contínua  $\tilde{f} : \mathbb{D}^2 \rightarrow X$ , definida por

$$\tilde{f}(t \cos \theta, t \sin \theta) = h_{1-t}(\cos \theta, \sin \theta),$$

onde  $h_t$  é uma homotopia entre  $h_0 = f$  e uma função constante  $h_1 \equiv p$ . Isto prova que todo o 1-ciclo, definido por uma ‘curva fechada’  $f$ , é homologicamente trivial.  $\square$

**Proposição 8.11.4.** Seja  $r : Y \rightarrow X$  um retracto de  $Y$  sobre  $X$ . Então a aplicação  $H_k(r) : H_k(Y, \mathbb{K}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{K})$  é sobrejectiva para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* Sendo  $i : X \rightarrow Y$  a inclusão de  $X$  em  $Y$ , temos  $r \circ i = \text{id}_X$ . Logo, ao nível da  $k$ -homologia vale  $H_k(r) \circ H_k(i) = \text{id}_{H_k(X)}$ , relação que implica a sobrejectividade de  $H_k(r)$ .  $\square$

**Proposição 8.11.5.** Se  $X$  é um retracto por deformação de  $Y$  então  $H_k(X, \mathbb{K}) \simeq H_k(Y, \mathbb{K})$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* Todo o retracto por deformação é uma equivalência de homotopia.  $\square$

## 8.12 Exercícios

Para cada  $n \geq 0$ , temos

- $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$  porque  $\mathbb{S}^{n-1}$  é o bordo de  $\mathbb{D}^n$ ,
- $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{S}^n$ , identificando  $\mathbb{D}^n$  com um hemisfério da esfera  $\mathbb{S}^n$ .

**Ex 8.1.** Usando os axiomas de Eilenberg-Steenrod calcule as homologias dos pares (relativas a um corpo de coeficientes arbitrário  $\mathbb{K}$ ) na sequência

$$\mathbb{D}^0 \subset \mathbb{S}^0 \subset \mathbb{D}^1 \subset \dots \subset \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n \subset \mathbb{S}^n \subset \dots$$

Por outras palavras, calcule as homologias do disco  $\mathbb{D}^n$ , da esfera  $\mathbb{S}^n$ , bem como as homologias relativas dos pares  $(\mathbb{S}^n, \mathbb{D}^n)$  e  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ .

**Ex 8.2.** Usando uma decomposição celular adequada calcule os números de Betti do  $n$ -toro  $(\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ .

**Sugestão:** Considere uma decomposição celular para  $\mathbb{S}^1$  e construa a partir dela uma decomposição celular produto para o  $n$ -toro  $(\mathbb{S}^1)^n$ .

**Ex 8.3.** Sejam  $D_1, D_2, \dots$  discos fechados disjuntos dois a dois contidos em  $\mathbb{D}^2$ . Usando uma decomposição celular adequada calcule os números de Betti das seguintes superfícies:

- o disco furado  $\mathbb{D}^2 \setminus D_1$ ,
- o disco com dois furos  $\mathbb{D}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ ,
- o disco com  $k$  furos  $\mathbb{D}^2 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$ .

Toda superfície compacta e orientável é homeomorfa ao bordo de um disco sólido com  $g \geq 0$  buracos. O inteiro  $g \geq 0$  diz-se o *gênero* da superfície.

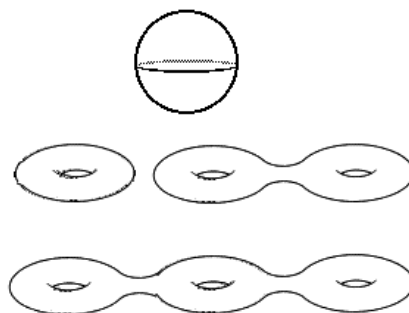


Figure 8.4: Superfícies compactas e orientadas de gêneros 0, 1, 2 e 3.



**Ex 8.4.** Mostre que toda a superfície  $S_g$  compacta e orientável de género  $g$  tem polinómio de Poincaré  $\mathcal{P}_t(S_g, \mathbb{K}) = 1 + 2gt + t^2$ , qualquer que seja o corpo de coeficientes  $\mathbb{K}$ . Conclua que  $\chi(S_g) = 2 - 2g$ .

**Sugestão:** Um modelo para a superfície  $S_g$  pode ser construído colando dois discos (iguais), com  $g$  furos cada um, através do bordo. Use esta construção para encontrar uma decomposição celular para  $S_g$ .

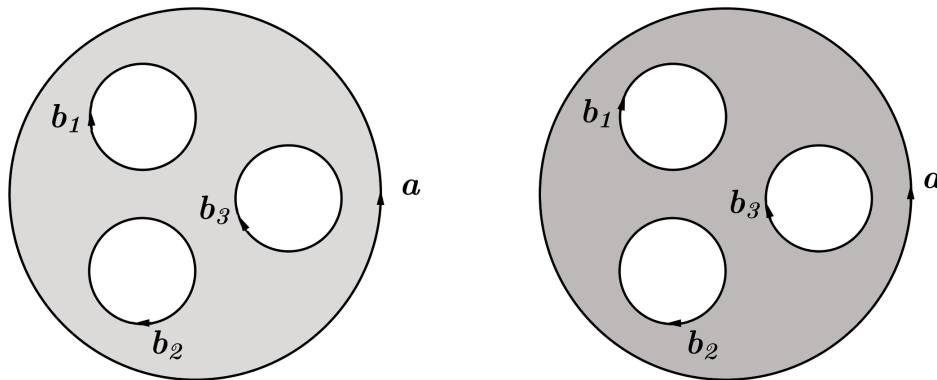


Figure 8.5: A superfície  $S_3$  de género 3 pode ser construída colando pelo bordo dois discos com 3 furos.

**Ex 8.5.** Determine os polinómios de Poincaré da garrafa de Klein e do Plano projectivo para corpos de característica 0 e de característica 2, respectivamente.



## Chapter 9

# Teoria de Morse

A Teoria de Morse estabelece uma conexão entre a estrutura dos pontos críticos duma função diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e a topologia da variedade  $X$  onde ela está definida. Seguimos de perto a abordagem de J. Milnor em [16].

### 9.1 Um exemplo

Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$  um toro com eixo de revolução perpendicular ao eixo dos  $zz$  (figura 9.1) e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) := z$ , a função altura. A função  $f$  tem exactamente quatro pontos críticos  $q$ ,  $r$ ,  $s$  e  $p$  com índices 0, 1, 1 e 2 respectivamente.

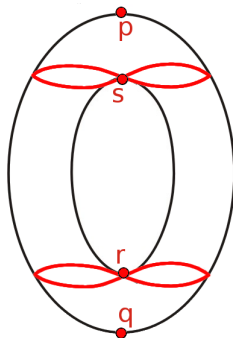


Figure 9.1: Pontos críticos da função altura no 2-toro

Para cada  $a \in \mathbb{R}$  consideremos o subnível da função  $f$  definido por

$$X^a := \{x \in X : f(x) \leq a\} .$$

Este conjunto é

- (a) vazio se  $a < f(q)$ ,

- (b) um disco se  $f(q) < a < f(r)$ ,
- (c) um cilindro se  $f(r) < a < f(s)$ ,
- (d) um toro menos um disco se  $f(s) < a < f(p)$ ,
- (e) o toro completo se  $f(p) < a$ .

Em particular, o tipo topológico de  $X^a$  não muda sempre que  $a$  é um valor regular de  $f$  variando entre dois níveis críticos consecutivos.

Vemos em seguida como varia o tipo homotópico do subnível  $X^a$  quando o parâmetro  $a$  atravessa um nível crítico (Figura 9.2).

(1) Se  $a < f(q) < a'$  então  $X^a = \emptyset$  e  $X^{a'}$  é um disco. Neste caso  $X^{a'}$  é homotopicamente equivalente a  $\{q\}$ , espaço que é obtido de  $X^a$  por junção duma 0-célula.

(2) Se  $a < f(r) < a'$  então  $X^{a'}$  é um cilindro, pelo que é homotopicamente equivalente a um espaço obtido de  $X^a$  por junção duma 1-célula.

(3) Se  $a < f(s) < a'$ , então  $X^{a'}$  é o toro menos um disco. Neste caso  $X^{a'}$  é homotopicamente equivalente a um espaço obtido de  $X^a$  por junção duma 1-célula.

(4) Finalmente se  $c < f(p) < a'$  então  $X^{a'}$  é o toro completo, e é obtido de  $X^a$  por junção duma 2-célula.

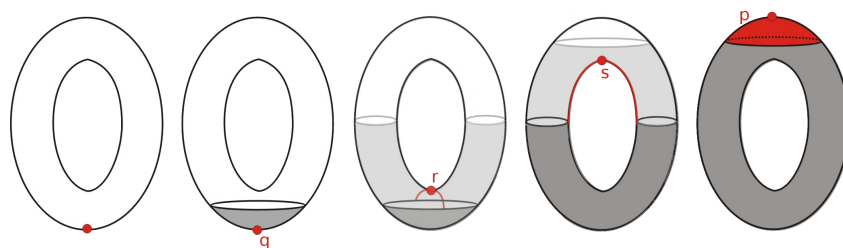


Figure 9.2: Metamorphose dos subníveis da função  $f$

A Teoria de Morse estabelece os factos descritos neste exemplo para funções de Morse em variedades de dimensão arbitrária.

## 9.2 Teoremas Básicos

Sejam  $X$  uma variedade sem bordo e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Chamaremos subnível  $c$  da função  $f$  ao conjunto

$$X^c = f^{-1} ]-\infty, c] = \{x \in X : f(x) \leq c\},$$

que é uma subvariedade com bordo de  $X$ , pelo menos desde que  $c$  seja um valor regular de  $f$ . O primeiro resultado básico da Teoria de Morse estabelece que, variando  $c$ , o tipo topológico e homotópico de  $X^c$  não muda enquanto  $c$  não atravesse um valor crítico.

**Teorema 9.2.1.** Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo tal que  $f^{-1}[a, b]$  é compacto sem pontos críticos de  $f$ . Então

- (a)  $X^a$  é difeomorfo a  $X^b$ ,
- (b)  $X^a$  é um retracto por deformação de  $X^b$ .

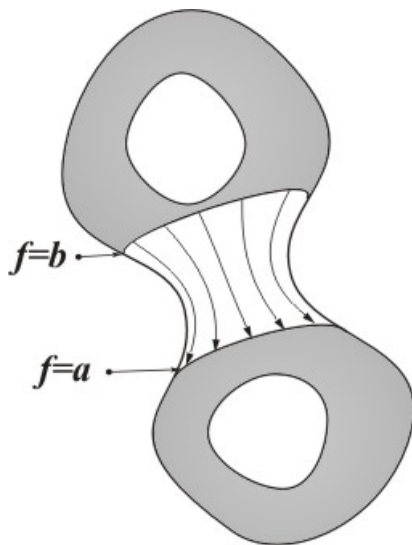


Figure 9.3: Deformação entre dois níveis ao longo do gradiente normalizado

*Proof.* Seja  $V$  uma vizinhança compacta de  $f^{-1}[a, b]$ , suficientemente pequena para não conter pontos críticos de  $f$ . Se  $\varepsilon > 0$  for pequeno, o compacto  $V \cap f^{-1}[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$  está contido no interior de  $V$ . Vamos usar o fluxo do campo  $-\nabla f$  para obter o desejado retracto por deformação de  $X^b$  em  $X^a$ . Seja  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  uma função suave tal que  $\beta(t) = 0$  para  $t \leq a - \varepsilon$  ou  $t \geq b + \varepsilon$ , e  $\beta(t) = 1$  para  $a \leq t \leq b$  (figura 9.4, c.f. Exercício 7.1).

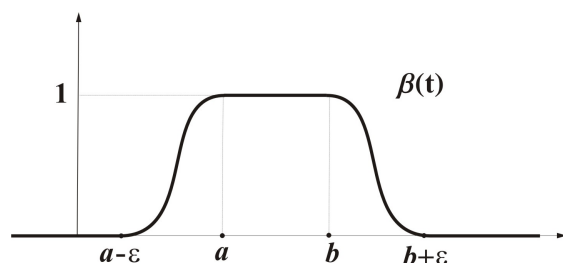


Figure 9.4: Gráfico da função  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definimos então

$$\xi(x) := \begin{cases} -\frac{\beta(f(x))}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \notin V \end{cases} .$$

O campo  $\xi$  está bem definido, e é suave, porque:

- (a)  $\beta(f(x)) = 0$  fora de  $V \cap f^{-1}[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ , que é um compacto contido no interior de  $V$ . Isto mostra que os dois ramos na definição de  $\xi(x)$  “colam” um com o outro.
- (b) Por definição de  $\beta$ ,  $\nabla f(x) \neq 0$  sempre que  $\beta(f(x)) \neq 0$ . Este facto justifica que o primeiro ramo está sempre bem definido.

O campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  tem suporte compacto contido em  $V$ . Seja  $\varphi^t$  o fluxo de  $\xi$ , que é completo pelo Teorema 3.2.2. Quando  $\varphi^t(x) \in V$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) &= \nabla f(\varphi^t(x)) \cdot \xi(\varphi^t(x)) = -\frac{\beta(f(\varphi^t(x)))}{\|\nabla f(\varphi^t(x))\|^2} \|\nabla f(\varphi^t(x))\|^2 \\ &= -\beta(f(\varphi^t(x))) . \end{aligned}$$

É claro que para  $\varphi^t(x) \notin V$ ,  $\frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) = 0$ . Em geral temos sempre  $\frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) \leq 0$ , e  $\frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) = -1$  quando  $\varphi^t(x) \in f^{-1}[a, b]$ . Fixemos um ponto  $x \in f^{-1}[a, b]$ , e consideremos

$$T(x) := \max\{t \geq 0 : \varphi^t(x) \in f^{-1}[a, b]\} .$$

Como  $f(\varphi^t(x))$  decresce, temos  $f(\varphi^{T(x)}(x)) = a$ . Mas para  $t \in [0, T(x)]$ , temos  $\varphi^t(x) \in f^{-1}[a, b]$ , e portanto

$$f(\varphi^t(x)) - f(x) = f(\varphi^t(x)) - f(\varphi^0(x)) = \int_0^t -1 ds = -t .$$

Logo,  $f(\varphi^t(x)) = f(x) - t$  para  $t \in [0, T(x)]$ . Substituindo  $t$  por  $T(x)$  obtemos  $a = f(\varphi^{T(x)}(x)) = f(x) - T(x)$ , donde sai que  $T(x) = f(x) - a$ . Concluimos que

$$f(\varphi^t(x)) = f(x) - t \quad \forall 0 \leq t \leq f(x) - a . \quad (9.1)$$

Esta conta mostra que dados  $a \leq c - t \leq c \leq b$ , o difeomorfismo  $\varphi^t$  transforma o nível  $f^{-1}(c)$  no nível  $f^{-1}(c - t)$ . Em particular,  $\varphi^{b-a}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(a)$ . Como  $f$  decresce ao longo das órbitas de  $\varphi^t(x)$ , segue que  $\varphi^{b-a}$  transforma o subnível  $X^b$  no subnível  $X^a$ , o que prova a alínea (a).

Para mostrar a alínea (b) definimos  $h_t: X^b \rightarrow X^b$ ,

$$h_t(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X^a \\ \varphi^{t(f(x)-a)}(x) & \text{se } x \in X^b \setminus X^a = f^{-1}[a, b] \end{cases}$$

A aplicação  $h: [0, 1] \times X^b \rightarrow X^b$ ,  $(t, x) \mapsto h_t(x)$ , é contínua porque nos pontos da fronteira entre os dois ramos de  $h_t(x)$ , ou seja nos pontos  $x \in f^{-1}(a)$ , o segundo ramo é igual ao primeiro:  $\varphi^{t(f(x)-a)}(x) = \varphi^{t0}(x) = x$ . Para  $t = 0$ , o segundo ramo de  $h_t(x)$  é  $\varphi^{t(f(x)-a)}(x) = \varphi^0(x) = x$ , qualquer que seja  $x \in X^b$ . Como o primeiro ramo também é igual a  $x$ , obtemos  $h_0 = \text{id}_{X^b}$ . Para  $t = 1$ , temos que

$$h_1(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X^a \\ \varphi^{f(x)-a}(x) & \text{se } x \in X^b \setminus X^a = f^{-1}]a, b] \end{cases}$$

é um retracto de  $X^b$  sobre  $X^a$ , que fixa os pontos de  $X^a$  e projecta  $X^b \setminus X^a$  sobre  $f^{-1}(a)$ . Finalmente, por definição, temos  $h_t(x) = x$  para todo  $x \in X^a$ , e a existência desta homotopia  $h_t$  prova a alínea (b) do enunciado.  $\square$

O segundo resultado básico da Teoria de Morse diz-nos que o tipo de homotopia do subnível  $X^c$ , quando  $c$  atravessa um valor crítico correspondente a um nível compacto com um único ponto crítico, ‘cresce por junção de uma célula’ com dimensão igual ao índice desse ponto crítico.

**Teorema 9.2.2.** Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave,  $p \in f^{-1}(c)$  um ponto crítico não degenerado de  $f$  com índice  $k$  e  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  é compacto e não contém nenhum outro ponto crítico de  $f$  além de  $p$ . Então existe uma  $k$ -célula  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow X^c$  tal que:

- (a)  $\phi(\partial\mathbb{D}^k) \subseteq X^{c-\varepsilon}$ ;
- (b)  $\phi(\text{int}(\mathbb{D}^k)) \subseteq X^c \setminus X^{c-\varepsilon}$ ;
- (c)  $X^{c-\varepsilon} \cup \phi(\mathbb{D}^k)$  é um retracto por deformação de  $X^{c+\varepsilon}$ .

*Proof.* Vamos supor que  $c = 0$ . Pelo Teorema 9.2.1 podemos assumir que  $\varepsilon$  é arbitrariamente pequeno. Pela Proposição 3.7.3 (Lema de Morse) existe uma parametrização local  $\psi: (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \simeq (X, p)$  tal que

$$(f \circ \psi)(u, v) = -\|u\|^2 + \|v\|^2,$$

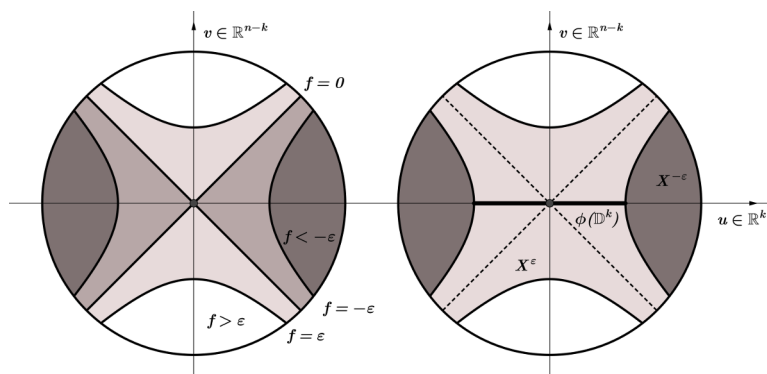
qualquer que seja  $(u, v)$  no disco

$$D_\varepsilon = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq 2\varepsilon \}.$$

De agora em diante vamos escrever  $f(u, v) = -\|u\|^2 + \|v\|^2$ , identificando  $f$  com o seu representante  $f \circ \psi$  neste sistema de coordenadas.

Seja  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow X$  a  $k$ -célula definida por  $\phi(u) := (\sqrt{\varepsilon}u, 0)$  para  $u \in \mathbb{D}^k$ . Supondo que  $u \in \partial\mathbb{D}^k$ , ou seja que  $\|u\| = 1$ , temos

$$f(\phi(u)) = f(\sqrt{\varepsilon}u, 0) = -\|\sqrt{\varepsilon}u\|^2 = -\varepsilon,$$

Figure 9.5: Níveis e subníveis de  $f(u, v)$  em  $D_\varepsilon$ 

o que mostra que  $\phi(\partial\mathbb{D}^k) \subset f^{-1}(-\varepsilon) \subset X^{-\varepsilon}$ , e justifica (1). Analogamente, se  $u \in \text{int}(\mathbb{D}^k)$ , i.e.,  $\|u\| < 1$ , então

$$f(\phi(u)) = f(\sqrt{\varepsilon}u, 0) = -\varepsilon\|u\|^2 > -\varepsilon,$$

peço que  $\phi(\text{int}(\mathbb{D}^k)) \subset f^{-1}(-\varepsilon, 0] = X^0 \setminus X^{-\varepsilon}$ .

Consideremos o elipsóide

$$E_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : \|u\|^2 + 2\|v\|^2 < 2\varepsilon\} \subset D_\varepsilon$$

e a perturbação  $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  definida em  $D_\varepsilon$  por

$$\tilde{f}(u, v) := f(u, v) - \mu(\|u\|^2 + 2\|v\|^2),$$

onde  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função decrescente de classe  $C^\infty$  tal que:

- (i)  $\mu(0) > \varepsilon$ ,
- (ii)  $\mu(x) = 0, \forall x \geq 2\varepsilon$ ,
- (iii)  $-1 < \mu'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

A função  $\tilde{f}$  é uma perturbação que “empurra”  $f$  para baixo dentro do elipsóide  $E_\varepsilon$ , e deixa a função  $f$  inalterada fora de  $E_\varepsilon$ . Para todo  $(u, v) \in D_\varepsilon$ ,

- (1)  $\tilde{f}(u, v) \leq f(u, v)$ ,
- (2)  $\tilde{f}(u, v) = f(u, v)$  se  $(u, v) \notin E_\varepsilon$ ,
- (3)  $\tilde{f}(u, 0) < -\varepsilon$ ,
- (4)  $(0, 0)$  é o único ponto crítico de  $\tilde{f}(u, v)$  em  $D_\varepsilon$ ,



(5) Se  $v \neq 0$  a função  $t \mapsto \tilde{f}(u, tv)$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, +\infty[$ .

A desigualdade (1) resulta de  $\mu$  ser decrescente e por (ii) não tomar valores negativos. Por (ii) temos  $\mu(\|u\|^2 + 2\|v\|^2) = 0$  para todo  $(u, v) \in D_\varepsilon \setminus E_\varepsilon$ , o que implica (2). Pelo Teorema do Valor Médio resulta de (iii) que  $\mu(x) > \varepsilon - x$ , para todo  $x \geq 0$ . Logo

$$\tilde{f}(u, 0) = -\|u\|^2 - \mu(\|u\|^2) < -\|u\|^2 - \varepsilon + \|u\|^2 = -\varepsilon,$$

o que prova (3). Para todo  $(u, v) \in D_\varepsilon$  temos

$$\nabla \tilde{f}(u, v) = (-2u, 2v) - \mu'(2u, 4v) = (-2(1 + \mu')u, 2(1 - 2\mu')v)$$

onde  $\mu' = \mu'(\|u\|^2 + 2\|v\|^2)$ . Por (iii) temos  $1 + \mu' > 0$  e  $1 - 2\mu' \geq 1$ . Estas desigualdades implicam o item (4), i.e.,  $(0, 0)$  é o único ponto crítico de  $\tilde{f}$  em  $D_\varepsilon$ . A propriedade (5) resulta de se ter  $\frac{d}{dt}\tilde{f}(u, tv) = 2t(1 - 2\mu')\|v\|^2 > 0$ , onde  $\mu' = \mu'(\|u\|^2 + 2\|v\|^2t^2)$ , sempre que  $t > 0$ .

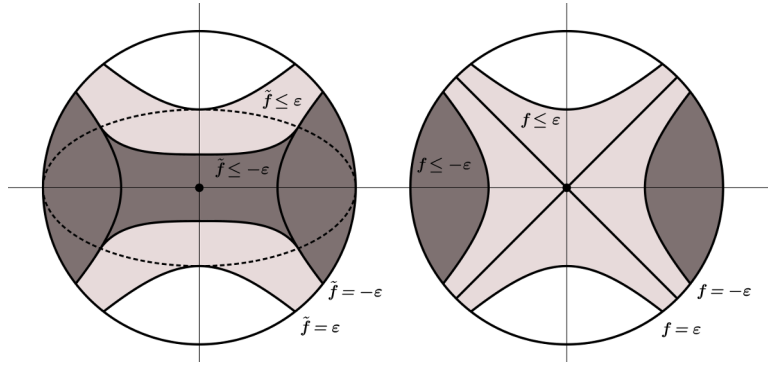


Figure 9.6: Subníveis de  $\tilde{f}(u, v)$  e de  $f(u, v)$  em  $D_\varepsilon$

Dividimos o resto da prova em duas partes:

**Parte I** Verificamos que  $\tilde{f}^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$  é um conjunto compacto, sem pontos críticos de  $\tilde{f}$ , e aplicamos o Teorema 9.2.1 para concluir que  $\tilde{X}_{-\varepsilon} := \{\tilde{f} \leq -\varepsilon\}$  é um retracto por deformação de  $\tilde{X}^\varepsilon := \{\tilde{f} \leq \varepsilon\} = X^\varepsilon$ .

**Parte II** Os conjuntos  $X^{-\varepsilon} \cup \phi(\mathbb{D}^k) \subset \tilde{X}^{-\varepsilon}$  diferem apenas numa vizinhança do ponto  $p$ . Mostramos que  $X^{-\varepsilon} \cup \phi(\mathbb{D}^k)$  é um retracto por deformação do subnível  $\tilde{X}^{-\varepsilon}$ . O argumento é localizado, sendo o retracto construído explicitamente no disco  $D_\varepsilon$ .

Tendo em conta que a relação “ser um retracto por deformação de” é transitiva, o teorema segue destes dois factos.

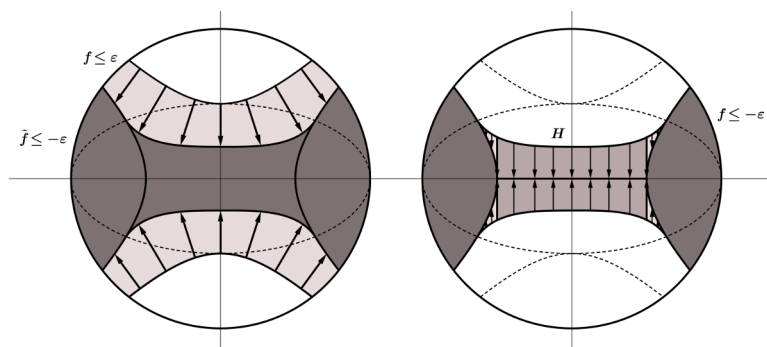


Figure 9.7: Retratos por deformação

**Parte I:** Observemos que  $\{f \geq \varepsilon\} = f^{-1}[\varepsilon, +\infty[$  não intersecta o elipsóide  $E_\varepsilon = \{(u, v) : \|u\|^2 + 2\|v\|^2 < 2\varepsilon\}$ . Nos pontos de intersecção, se existissem, teríamos

$$\varepsilon \leq \varepsilon + \|u\|^2 \leq \|v\|^2 < \varepsilon - \|u\|^2/2 \leq \varepsilon$$

o que é impossível. Logo  $\tilde{f}(x) = f(x)$  sempre que  $f(x) \geq \varepsilon$ . Tendo em conta que  $\tilde{f} \leq f$ , temos  $\tilde{f}^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ , o que implica que  $\tilde{f}^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$  é compacto. Se  $\tilde{f}$  tivesse pontos críticos neste compacto teriam de estar na vizinhança  $D_\varepsilon$  já que  $\tilde{f} = f$  fora desta vizinhança e o único ponto crítico de  $f$  está em  $D_\varepsilon$ . Por (3) e (4) o único ponto crítico de  $\tilde{f}$  em  $D_\varepsilon$  está na origem, e satisfaz  $\tilde{f}(0, 0) < -\varepsilon$ . Logo  $\tilde{f}$  não tem nenhum ponto crítico em  $\tilde{f}^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Como  $\tilde{f} \leq f$ , e  $\tilde{f} = f$  sempre que  $f \geq \varepsilon$ , vemos que  $\tilde{X}^\varepsilon = X^\varepsilon$ . Logo pelo Teorema 9.2.1 (Figura 9.7 à esquerda)  $\tilde{X}^{-\varepsilon}$  é um retracto por deformação de  $\tilde{X}^\varepsilon = X^\varepsilon$ .

**Parte II:** Definimos  $H := \tilde{X}^{-\varepsilon} \setminus X^{-\varepsilon}$ . É claro que  $H \subset D_\varepsilon$ . No sistema de coordenadas  $(u, v) \in D_\varepsilon$  temos

$$\begin{aligned} H &= \{(u, v) \in D_\varepsilon : -\varepsilon < -\|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ e } \tilde{f}(u, v) \leq -\varepsilon\}, \\ D_\varepsilon \cap X^{-\varepsilon} &= \{(u, v) \in D_\varepsilon : -\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq -\varepsilon\}, \\ D_\varepsilon \cap \tilde{X}^{-\varepsilon} &= \{(u, v) \in D_\varepsilon : \tilde{f}(u, v) \leq -\varepsilon\} = X^{-\varepsilon} \cup H, \\ \phi(\mathbb{D}^k) &= \{(u, 0) : \|u\| \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

O conjunto  $H$  está contido dentro do elipsoide  $E_\varepsilon$ , pois se  $(u, v) \in H \setminus E_\varepsilon$  então  $-\varepsilon < f(u, v) = \tilde{f}(u, v) \leq \varepsilon$ , o que é absurdo.

Definimos o mapa  $r : X^{-\varepsilon} \cup H \rightarrow X^{-\varepsilon} \cup \phi(\mathbb{D}^k)$  (Figura 9.7 à direita)

$$r(u, v) := \begin{cases} (u, 0) & \text{se } \|u\| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ e } \tilde{f}(u, v) \leq -\varepsilon \\ (u, sv) & \text{se } \|u\| > \sqrt{\varepsilon}, f(u, v) > -\varepsilon \text{ e } \tilde{f}(u, v) \leq -\varepsilon \\ (u, v) & \text{se } f(u, v) \leq -\varepsilon \end{cases}$$

onde  $s = s(u, v)$  é dado por

$$f(u, sv) = -\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad s = \sqrt{\frac{\|u\|^2 - \varepsilon}{\|v\|^2}}.$$

A aplicação  $r$  toma valores em  $X^{-\varepsilon} \cup \phi(\mathbb{D}^k)$  porque  $r(u, v) = (u, 0) \in \phi(\mathbb{D}^k)$  no primeiro ramo, e  $r(u, v) \in X^{-\varepsilon}$  no 2º e 3º ramos.

Se  $\|u\| > \sqrt{\varepsilon}$  e  $f(u, v) > -\varepsilon$ , então  $\|v\|^2 > \|u\|^2 - \varepsilon > 0$ , pelo que  $s = s(u, v)$  acima está bem definido. Portanto, o mapa  $r$  também está bem definido.

Vejamus que  $r$  é contínuo. Na fronteira entre o 1º e 2º ramos  $\|u\|^2 = \varepsilon$ , o que implica que  $s = 0$ , fazendo com que os dois ramos coincidam. Na fronteira entre o 2º e 3º ramos  $f(u, v) = -\varepsilon$ , o que implica que  $s = 1$ , fazendo com que os dois ramos coincidam. Finalmente, na fronteira entre o 1º e 3º ramos temos  $\|u\|^2 = \varepsilon$  e  $v = 0$ , o que implica que também aqui os dois ramos coincidam.

A aplicação  $r$  é um retracto porque no 1º ramo  $r(u, 0) = (u, 0)$  para os pontos  $(u, 0) \in \phi(\mathbb{D}^k)$ , enquanto no 3º ramo  $r(u, v) = (u, v)$  para os pontos  $(u, v) \in X^{-\varepsilon}$ .

A partir deste retracto construímos um retracto por deformação fazendo uma combinação convexa entre a identidade e a retracção  $r$ .

$$h_t(u, v) = (1 - t)(u, v) + tr(u, v) = \begin{cases} (u, (1 - t)v) & \text{no 1º ramo} \\ (u, (1 - t + ts)v) & \text{no 2º ramo} \\ (u, v) & \text{no 3º ramo} \end{cases}$$

Observemos que  $1 - t$  no 1º ramo, e  $1 - t + ts$  no 2º, estão sempre em  $[0, 1]$ , porque  $t, s \in [0, 1]$ . Da propriedade (5) da perturbação  $\tilde{f}(u, v)$  obtemos

$$\tilde{f}(h_t(u, v)) \leq \tilde{f}(u, v) \leq -\varepsilon,$$

o que prova que  $h_t(u, v) \in \tilde{f}^{-1}[-\infty, -\varepsilon] = X^{-\varepsilon} \cup H$ . A função  $h : [0, 1] \times X^{-\varepsilon} \cup H \rightarrow X^{-\varepsilon} \cup H$ ,  $h(t, u, v) := h_t(u, v)$  é o retracto por deformação procurado.  $\square$

O terceiro teorema diz-nos que sendo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse, a menos duma equivalência de homotopia, existe uma decomposição de  $X$  em células com uma célula para cada ponto crítico, de dimensão igual ao índice desse ponto crítico.

**Teorema 9.2.3.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse tal que  $f^{-1}[-\infty, a]$  é compacto para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Então existe um espaço topológico  $Z$  com uma decomposição celular  $\mathcal{D}$  tal que  $X$  é homotopicamente equivalente a  $Z$  e o número de células de  $\mathcal{D}$  com dimensão  $n$  é igual ao número de pontos críticos de  $f$  com índice igual a  $n$ .

*Proof.* Vamos considerar apenas o caso em que  $f$  tem um número finito  $N$  de pontos críticos  $p_1, \dots, p_N \in X$  e que os correspondentes valores críticos estão ordenados de modo que  $c_1 = f(p_1) < c_2 = f(p_2) < \dots < c_N = f(p_N)$ . Se assim não for podemos perturbar  $f$  de modo que a função modificada  $\tilde{f}$  tenha  $N$  valores críticos, com os correspondentes pontos críticos próximos dos originais e mantendo exactamente os mesmos índices. A perturbação  $\tilde{f}$  pode ser efectuada somando a  $f$  uma função polinomial de  $2^9$  grau suficientemente pequena (Exercício 5.27). Para cada ponto crítico  $p_i$  tomemos, de acordo com Teorema 9.2.2, u número positivo  $\varepsilon_i > 0$  e uma célula  $\phi_i$  de dimensão  $k_i = \text{ind}(f, p_i)$  tais que:

- (1)  $\phi_i(\partial \mathbb{D}^{k_i}) \subseteq X^{c_i - \varepsilon_i}$ ,
- (2)  $\phi_i(\text{int}(\mathbb{D}^{k_i})) \cap X^{c_i - \varepsilon_i} = \emptyset$ , e
- (3)  $X^{c_i - \varepsilon_i} \cup \phi_i(\mathbb{D}^{k_i})$  é um retracto por deformação de  $X^{c_i + \varepsilon_i}$ .

Tomando todos os  $\varepsilon_i$  suficientemente pequenos, podemos garantir que os intervalos  $[c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i]$  sejam disjuntos dois a dois. Então  $c_i + \varepsilon_i < c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}$ , e os intervalos  $[c_i + \varepsilon_i, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$  não contêm valores críticos. Definimos  $Y_0 = \emptyset$ , e para cada  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\tilde{Y}_i := X^{c_i - \varepsilon_i} \cup \phi_i(\mathbb{D}^{k_i}) \quad \text{e} \quad Y_i := X^{c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}}.$$

Por (1) e (2), cada  $\tilde{Y}_i$  é obtido de  $Y_{i-1}$  por junção da  $k_i$ -célula  $\phi_i$ . Por (3),  $\tilde{Y}_i$  é um retracto por deformação de  $X^{c_i + \varepsilon_i}$ . Como  $[c_i + \varepsilon_i, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$  não contêm valores críticos, pelo Teorema 9.2.1  $X^{c_i + \varepsilon_i}$  é um retracto por deformação de  $Y_i$ . Logo, por transitividade, cada  $\tilde{Y}_i$  é um retracto por deformação de  $Y_i$ .

Vamos agora provar que existe uma sequência de espaços topológicos  $\emptyset = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_N$  tal que cada  $Y_i$  é homotopicamente equivalente a  $Z_i$ , sendo  $Z_i$  obtido de  $Z_{i-1}$  por junção dum a  $k_i$ -célula.

A prova é feita por indução em  $i$ . Para  $i = 0$  não há nada a provar. Suponhamos, por hipótese de indução, que existe uma equivalência de homotopia  $f_{i-1} : Y_{i-1} \rightarrow Z_{i-1}$  sobre um espaço topológico  $Z_{i-1}$  admitindo uma decomposição celular  $\emptyset = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_{i-1}$  onde cada  $Z_j$  ( $j \leq i-1$ ) é obtido de  $Z_{j-1}$  por junção dum a  $k_j$ -célula. Pelo Lema 9.2.1 existe um homeomorfismo  $g_i : \tilde{Y}_i \rightarrow Y_{i-1} \sqcup_{\partial \phi_i} \mathbb{D}^{k_i}$ . Pelo Lema 9.2.4 podemos estender  $f_{i-1}$  a uma equivalência de homotopia  $\hat{f}_i : Y_{i-1} \sqcup_{\partial \phi_i} \mathbb{D}^{k_i} \rightarrow Z_{i-1} \sqcup_{f_{i-1} \circ \partial \phi_i} \mathbb{D}^{k_i}$ . Definimos  $Z_i := Z_{i-1} \sqcup_{f_{i-1} \circ \partial \phi_i} \mathbb{D}^{k_i}$ . Compondo com  $g_i$  obtemos a equivalência de homotopia  $\tilde{f}_i = \hat{f}_i \circ g_i : \tilde{Y}_i \rightarrow Z_i$ . Finalmente, porque  $\tilde{Y}_i$  é um retracto por deformação de  $Y_i$ , obtemos a equivalência de homotopia  $f_i = \tilde{f}_i \circ r : Y_i \rightarrow Z_i$ , onde  $r : Y_i \rightarrow \tilde{Y}_i$  designa um retracto homotópico à identidade.  $\square$

Dada uma aplicação contínua  $\phi : \partial \mathbb{D}^k \rightarrow X$ , vamos designar por  $X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  o quociente da união disjunta  $X \sqcup \mathbb{D}^k$  pela relação que identifica cada ponto

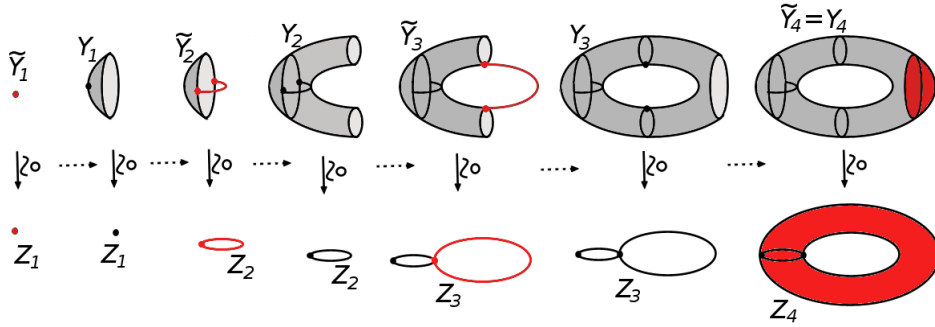


Figure 9.8: Decomposição celular associada à função altura no 2-toro

$x \in \partial \mathbb{D}^k$  com o ponto  $\phi(x) \in X$ ,

$$X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k := \frac{X \sqcup \mathbb{D}^k}{\phi}.$$

Consideramos em  $X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  a topologia quociente, que é a mais fina topologia que torna contínuas as aplicações naturais  $i_X: X \rightarrow X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  e  $p_{\phi}: \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$ . Esta topologia caracteriza-se por uma aplicação  $h: X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow Z$ , com valores num espaço topológico  $Z$ , ser contínua sse forem contínuas as composições  $h \circ i_X: X \rightarrow Z$  e  $h \circ p_{\phi}: \mathbb{D}^k \rightarrow Z$ .

**Lema 9.2.1.** Se  $Y$  se obtém de  $X$  por junção duma célula  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow Y$ , então  $Y$  é homeomorfo a  $X \sqcup_{\partial\phi} \mathbb{D}^k$ , onde  $\partial\phi = \phi|_{\partial\mathbb{D}^k}$ .

*Proof.* Definimos  $h: X \sqcup_{\partial\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow Y$  por

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ \phi(x) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k \end{cases}.$$

Claramente  $h$  é bijectiva. Por construção,  $h \circ i_X = \text{id}_X$  e  $h \circ p_{\phi} = \phi$  são contínuas. Logo, como  $X \sqcup_{\partial\phi} \mathbb{D}^k$  tem a topologia final, a aplicação  $h: X \sqcup_{\partial\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow Y$  é contínua.

Dado um conjunto fechado  $F \subset X \sqcup_{\partial\phi} \mathbb{D}^k$ , por definição de topologia final,  $i_X^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ , e  $p_{\phi}^{-1}(F)$  é fechado em  $\mathbb{D}^k$ . Segue que  $p_{\phi}^{-1}(F)$  e  $\phi(p_{\phi}^{-1}(F))$  são compactos, e, portanto,  $\phi(p_{\phi}^{-1}(F))$  é fechado em  $Y$ .

Logo  $h(F) = i_X^{-1}(F) \cup \phi(p_{\phi}^{-1}(F))$  é compacto e como tal fechado em  $Y$ . Isto mostra que  $h$  é um homeomorfismo.  $\square$

**Lema 9.2.2 (Whitehead).** Dados mapas homotópicos  $\phi, \psi: \partial\mathbb{D}^k \rightarrow X$  existe uma equivalência de homotopia  $k: X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_{\psi} \mathbb{D}^k$  que fixa todos os pontos de  $X$ .

*Proof.* Seja  $h_t: \partial\mathbb{D}^k \rightarrow X$  uma homotopia entre  $\phi$  e  $\psi$ . Definimos  $k: X \sqcup_\phi \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_\psi \mathbb{D}^k$

$$k(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ 2x & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ h(2 - 2\|x\|, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (9.2)$$

O mapa  $k$  transforma o disco  $\mathbb{D}_{1/2}^k$  de raio  $\frac{1}{2}$  em  $\mathbb{D}^k$ , coincide com  $\psi$  em  $\partial\mathbb{D}_{1/2}^k$ , transforma o anel  $\mathbb{D}^k \setminus \mathbb{D}_{1/2}^k$  no cilindro definido pela homotopia  $h_t$ , coincide com  $\phi$  em  $\partial\mathbb{D}^k$  e finalmente fixa todos os pontos de  $X$ . Analogamente definimos  $m: X \sqcup_\psi \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_\phi \mathbb{D}^k$

$$m(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ 2x & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ h(2\|x\| - 1, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

O mapa composto  $m \circ k$

$$m(k(x)) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ 4x & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1}{4} \\ h(4\|x\| - 1, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \frac{1}{4} < \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ h(2 - 2\|x\|, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

combina as homotopias  $h_t$  e  $h_{1-t}$ . Para concluir basta verificar que

$$H_t(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ 4x(1+3t)^{-1} & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1+3t}{4} \\ h(4\|x\| - 1 - 3t, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \frac{1+3t}{4} < \|x\| \leq \frac{1+t}{2} \\ h(2 - 2\|x\|, \frac{x}{\|x\|}) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

define um mapa contínuo  $H: [0, 1] \times X \sqcup_\phi \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_\phi \mathbb{D}^k$  tal que  $H_0 = m \circ k$  e  $H_1 = \text{id}$ . De modo inteiramente análogo, trocando os papéis de  $\phi$  e  $\psi$ , respectivamente de  $k$  e  $m$ , mostramos que o mapa  $k \circ m$  é homotópico à identidade.  $\square$

Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa contínuo. Dizemos que  $f$  tem um *inverso homotópico esquerdo* se existir um mapa  $g: Y \rightarrow X$  contínuo tal que  $g \circ f$  é homotópico a  $\text{id}_X$ . Dizemos que  $f$  tem um *inverso homotópico direito* se existir um mapa  $h: Y \rightarrow X$  contínuo tal que  $f \circ h$  é homotópico a  $\text{id}_Y$ .

**Lema 9.2.3.** Se um mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  tem inversos homotópicos esquerdo e direito então  $f: X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia.

*Proof.* Este lema segue do seguinte facto geral da Teoria das Categorias aplicado à Categoria Homotópica: Numa categoria, todo o morfismo  $f: X \rightarrow$

$Y$  que admita um inverso esquerdo  $g: Y \rightarrow X$  e um inverso direito  $h: Y \rightarrow X$ , estes dois inversos coincidem. De facto se  $g \circ f = \text{id}_X$  e  $f \circ h = \text{id}_Y$  então

$$h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g,$$

pelo que  $f: X \rightarrow Y$  é um isomorfismo.  $\square$

**Lema 9.2.4.** Dada uma  $k$ -célula  $\phi: \mathbb{D}^k \rightarrow X$ , toda a equivalência de homotopia  $f: X \rightarrow Y$  estende-se a uma equivalência de homotopia  $\tilde{f}: X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow Y \sqcup_{f \circ \phi} \mathbb{D}^k$ , caracterizada pela comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \sqcup_{f \circ \phi} \mathbb{D}^k \\ i_X \uparrow & & \uparrow i_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \sqcup_{f \circ \phi} \mathbb{D}^k \\ p_{\phi} \uparrow & & \uparrow p_{f \circ \phi} \\ \mathbb{D}^k & \xlongequal{\quad} & \mathbb{D}^k \end{array}$$

*Proof.* Seja  $g: Y \rightarrow X$  uma aplicação contínua tal que  $f \circ g$  é homotópica a  $\text{id}_Y$  e  $g \circ f$  é homotópica a  $\text{id}_X$ .

A extensão  $\tilde{f}: X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow Y \sqcup_{f \circ \phi} \mathbb{D}^k$  fica determinada pela comutatividade dos diagramas acima. De modo análogo podemos definir uma extensão  $\tilde{g}: Y \sqcup_{f \circ \phi} \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_{g \circ f \circ \phi} \mathbb{D}^k$ .

Começamos por mostrar que  $\tilde{f}$  admite um inverso homotópico esquerdo.

Seja  $h_t$  uma homotopia tal que  $h_0 = g \circ f$  e  $h_1 = \text{id}_X$ . Pelo Lema 9.2.2 existe  $k: X \sqcup_{g \circ f \circ \phi} \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  equivalência de homotopia, definida em (9.2), que fixa todos os pontos de  $X$ . A composição destes três mapas é dada por

$$k(\tilde{g}(\tilde{f}(x))) := \begin{cases} g(f(x)) & \text{se } x \in X \\ 2x & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ h(2 - 2\|x\|, \phi(\frac{x}{\|x\|})) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Para vermos que  $k \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}$  é homotópico à identidade em  $X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  definimos

$$H_t(x) := \begin{cases} h_t(x) & \text{se } x \in X \\ 2x(1+t)^{-1} & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| \leq \frac{1+t}{2} \\ h(2 - 2\|x\| + t, \phi(\frac{x}{\|x\|})) & \text{se } x \in \mathbb{D}^k, \|x\| > \frac{1+t}{2} \end{cases}.$$

A família  $H_t$  é formada por mapas contínuos e define uma homotopia  $H: [0, 1] \times X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k \rightarrow X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k$  tal que  $H_0 = k \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}$  e  $H_1 = \text{id}_{X \sqcup_{\phi} \mathbb{D}^k}$ . Logo  $\tilde{f}$  admite um inverso homotópico esquerdo.

De modo análogo mostramos que  $\tilde{f}$  admite um inverso homotópico direito. Pelo Lema 9.2.3,  $f$  é uma equivalência de homotopia.  $\square$

### 9.3 Desigualdades de Morse

Vamos agora estabelecer as chamadas *desigualdades de Morse* que relacionam as contagens de pontos críticos duma função de Morse com os números de Betti da variedade onde ela está definida.

**Teorema 9.3.1.** Seja  $X$  um espaço topológico compacto com uma decomposição celular finita  $\mathcal{D}$ . Para cada corpo  $\mathbb{K}$  existe um polinómio  $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(\mathcal{D}, \mathbb{K})$  com todos os coeficientes  $\geq 0$  tal que

$$\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}) - \mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = (1 + t) \mathcal{E}_t .$$

*Proof.* Seja  $\mathcal{D} = (\emptyset = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_N = X)$  a decomposição celular de  $X$ , e para cada  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mathcal{D}_i = (\emptyset = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_i)$  a decomposição do subespaço  $Y_i$ . Então, sendo  $k_i = \dim(Y_i, Y_{i-1})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_t(\mathcal{D}) - \mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) &= [\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_N) - \mathcal{P}_t(Y_N, \mathbb{K})] - \underbrace{[\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_0) - \mathcal{P}_t(Y_0, \mathbb{K})]}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_i) - \mathcal{P}_t(Y_i, \mathbb{K})] - [\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_{i-1}) - \mathcal{P}_t(Y_{i-1}, \mathbb{K})] \\ &= \sum_{i=1}^N \underbrace{[\mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_i) - \mathcal{Q}_t(\mathcal{D}_{i-1})]}_{=t^{k_i}} - \underbrace{[\mathcal{P}_t(Y_i, \mathbb{K}) - \mathcal{P}_t(Y_{i-1}, \mathbb{K})]}_{=t^{k_i} \text{ ou } -t^{k_i-1}} \\ &\qquad\qquad\qquad = 0 \text{ ou } t^{k_i} + t^{k_i-1} = (1+t)t^{k_i-1} \end{aligned}$$

Logo, definindo  $\delta_i = \delta_i(\mathcal{D}, \mathbb{K})$  como sendo 1 caso  $(Y_{i-1}, Y_i)$  não seja de tipo ligação relativamente ao corpo  $\mathbb{K}$ , e 0 no caso contrário, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_t(\mathcal{D}) - \mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) &= \sum_{i=1}^N \delta_i (1 + t) t^{k_i-1} \\ &= (1 + t) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{k_i=k} \delta_i \right) t^{k-1} \\ &= (1 + t) \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^{k-1} , \end{aligned}$$

onde para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $e_k = e_k(\mathcal{D}, \mathbb{K})$  é o número de pares  $(Y_i, Y_{i-1})$  de subespaços consecutivos na decomposição  $\mathcal{D}$  tais que  $\dim(Y_i, Y_{i-1}) = k$  e que não são de tipo ligação. Logo  $\mathcal{E}_t = \sum_{k=1}^{\infty} e_k t^{k-1}$ , com  $e_k \geq 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

O polinómio  $\mathcal{E}_t(\mathcal{D}, \mathbb{K})$  diz-se o  $\mathbb{K}$ -erro da decomposição celular  $\mathcal{D}$ . A decomposição celular  $\mathcal{D}$  diz-se  $\mathbb{K}$ -perfeita se  $\mathcal{E}_t(\mathcal{D}, \mathbb{K}) = 0$ .



Suponhamos agora que  $X$  é uma variedade compacta. Definimos o *polinómio de Morse* duma função de Morse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\mathcal{M}_t(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) t^k ,$$

onde para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_k(f)$  representa o número de pontos críticos de  $f$  com índice  $k$ .

Do Teorema 9.2.3 resulta que

**Corolário 9.3.1.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse numa variedade compacta sem bordo  $X$ . Então  $X$  é homotopicamente equivalente a um espaço  $Z$  com uma decomposição celular  $\mathcal{D}$  tal que  $\mathcal{M}_t(f) = \mathcal{Q}_t(\mathcal{D})$ .

**Corolário 9.3.2.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse numa variedade compacta sem bordo  $X$ . Então  $\chi(X) = \mathcal{M}_{-1}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k(f)$ .

*Proof.* Segue dos Corolários 9.3.1 e 8.10.1. □

Chama-se  $\mathbb{K}$ -erro duma função de Morse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ao único polinómio  $\mathcal{E}_t(f, \mathbb{K})$  tal que  $\mathcal{M}_t(f) - \mathcal{P}_t(X, \mathbb{K}) = (1+t)\mathcal{E}_t(f, \mathbb{K})$ . A função  $f$  diz-se  $\mathbb{K}$ -perfeita se  $\mathcal{E}_t(f, \mathbb{K}) = 0$ . Vamos escrever  $\mathcal{E}_t(f, \mathbb{K}) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^{k-1}$ , onde, como vimos na demonstração do Teorema 9.3.1,  $e_k = e_k(f, \mathbb{K})$  é o número de pontos críticos de  $f$  com índice  $k$  tais que a célula associada à passagem por esse nível crítico não é de tipo ligação.

**Teorema 9.3.2.** Sejam  $X$  uma variedade compacta sem bordo e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

- (1)  $c_k(f) - \beta_k(X, \mathbb{K}) = e_k + e_{k+1}$ ,
- (2) **(Desigualdades Fracas)**  $c_k(f) \geq \beta_k(X, \mathbb{K})$ ,
- (3) **(Desigualdades Fortes)**

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} c_i(f) \geq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \beta_i(X, \mathbb{K}) ,$$

- (4) **(Princípio Lacunar)**  $c_{k-1}(f) = c_{k+1}(f) = 0 \Rightarrow c_k(f) = \beta_k(X, \mathbb{K})$ .

*Proof.* (1)  $c_k - \beta_k = e_k + e_{k+1}$  porque

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (c_k - \beta_k) t^k &= \mathcal{M}_t - \mathcal{P}_t = (1+t) \mathcal{E}_t \\
 &= (1+t) \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^{k-1} + e_k t^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e_{k+1} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k \quad (\text{porque } e_0 = 0) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (e_k + e_{k+1}) t^k .
 \end{aligned}$$

(2) segue de (1), pois  $c_k - \beta_k = e_k + e_{k+1} \geq 0$ .

(3) Temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} (c_i - \beta_i) &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} (e_i + e_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} e_i - \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i} e_i \\
 &= (-1)^k e_0 - (-1)^{k-k-1} e_{k+1} = e_{k+1} \geq 0 ,
 \end{aligned}$$

donde  $\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} c_i \geq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \beta_i$ .

(4)  $c_{k+1} = 0$  implica  $\beta_{k+1} = 0$  porque  $0 \leq \beta_{k+1} \leq c_{k+1}$ . Analogamente,  $c_{k-1} = 0$  implica  $\beta_{k-1} = 0$ . Logo,  $e_{k+2} + e_{k+1} = c_{k+1} - \beta_{k+1} = 0$ , o que implica  $e_{k+1} = e_{k+2} = 0$ , porque estes números são não negativos, e também  $e_k + e_{k-1} = c_{k-1} - \beta_{k-1} = 0$ , o que implica  $e_k = e_{k-1} = 0$ . Resulta então que  $c_k - \beta_k = e_k + e_{k+1} = 0 + 0 = 0$ .  $\square$

## 9.4 Decomposição celular dinâmica

Através duma abordagem dinâmica, fazendo uso do fluxo do campo gradiente  $-\nabla f$ , é possível melhorar o Teorema 9.2.3.

**Teorema 9.4.1.** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse numa variedade compacta sem bordo  $X$ . Então  $X$  admite uma decomposição celular  $\mathcal{D}$  tal que  $\mathcal{M}_t(f) = \mathcal{Q}_t(X, \mathcal{D})$ .

Sendo  $X$  compacta, o campo  $\xi = -\nabla f$  é completo. Vamos considerar o fluxo  $\varphi^t$  de  $\xi$  que é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos. Os pontos críticos de  $f$  correspondem às singularidades de  $\xi$ , e, portanto, aos pontos fixos de  $\varphi^t$ . Estas singularidades são todas hiperbólicas. Uma singularidade  $\xi(p) = 0$  dum campo  $\xi$  diz-se hiperbólica se a derivada  $D\xi_p : T_p X \rightarrow T_p X$  não tiver valores próprios com parte real igual a zero. Numa singularidade hiperbólica  $p$ , definem-se os conjuntos

$$W^s(p) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi^t(x) - p\| = 0\} \text{ e}$$

$$W^u(p) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi^{-t}(x) - p\| = 0\},$$

formados pelos pontos  $x \in X$  cujas órbitas convergem a  $p$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , respectivamente  $t \rightarrow -\infty$ . Em singularidades hiperbólicas, estes conjuntos são sempre variedades imersas de dimensões complementares. Mais precisamente, se  $X$  tem dimensão  $n$ , existem imersões suaves  $f_u : \mathbb{R}^k \rightarrow X$  e  $f_s : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow X$  tais que  $f_u(\mathbb{R}^k) = W^u(p)$  e  $f_s(\mathbb{R}^{n-k}) = W^s(p)$ . O conjunto  $W^u(p)$  diz-se a *variedade instável* da singularidade  $p$ , enquanto  $W^s(p)$  se diz a *variedade estável* de  $p$ . No caso do campo gradiente  $\xi = -\nabla f$ , a dimensão  $k$  da variedade instável  $W^u(p)$  é precisamente o índice do ponto crítico,  $k = \text{ind}(f, p)$ . Um ponto mínimo de  $f$ , com índice  $n$ , corresponde a um ponto fixo atractor. Neste caso  $W^u(p) = \{p\}$  e  $W^s(p)$  é uma vizinhança aberta de  $p$ . Analogamente, um ponto máximo de  $f$ , com índice 0, corresponde a um ponto fixo repulsor, caso em que  $W^s(p) = \{p\}$  e  $W^u(p)$  é uma vizinhança aberta de  $p$ .

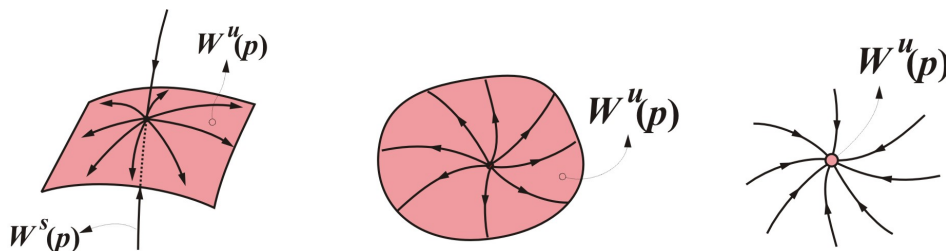


Figure 9.9: Exemplos de variedades instáveis.

Sobre o conjunto finito das singularidades hiperbólicas do campo gradiente  $\xi = -\nabla f$  define-se a seguinte relação:  $p \succ q$  sse  $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ . Para campos gradientes esta é uma relação de ordem parcial. Para funções genéricas, ditas *Morse-Smale*, estas intersecções são sempre transversais. Como a intersecção tem dimensão  $\geq 1$ , porque contém pelo menos uma órbita, segue que para funções Morse-Smale,

$$p \succ q \quad \Rightarrow \quad \text{ind}(f, p) > \text{ind}(f, q).$$

Para qualquer função de Morse  $f$ , a variedade  $X$  é união disjunta das variedades instáveis dos seus pontos críticos. As variedades instáveis  $W^u(p_i)$  e  $W^u(p_j)$ , de pontos distintos  $p_i \neq p_j$ , são sempre disjuntas. De facto, dado um ponto  $x \in X$ , é fácil mostrar que o limite  $p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-t}(x)$  existe sempre, sendo uma singularidade do campo. Logo  $x$  pertence à variedade instável  $W^u(p)$ . Cada variedade instável  $W^u(p)$  corresponde a uma célula de dimensão  $k = \text{ind}(f, p)$ , cujo bordo  $\partial W^u(p) = \overline{W^u(p)} \setminus W^u(p)$  satisfaz  $\partial W^u(p) = \cup_{q \prec p} W^u(q)$ . No caso de  $f$  ser Morse-Smale, pela observação feita acima,  $\partial W^u(p)$  é coberto por uma união de células com dimensão  $< k$ . Ordenando os pontos críticos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  de  $f$  de modo que  $p_i \succ p_j \Rightarrow i > j$ , e definindo para cada  $i$ ,  $X_i := \cup_{j=0}^i W^u(p_i)$ , a sequência  $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_N = X$  é uma decomposição celular da variedade  $X$ , onde cada  $X_i$  é obtido de  $X_{i-1}$  por junção da “célula”  $\overline{W^u(p_i)}$ , com dimensão igual a  $\text{ind}(f, p_i)$ .

Na figura 9.10 estão desenhadas as curvas de nível duma função  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com 4 mínimos locais  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , três pontos sela  $s_1, s_2, s_3$  e um máximo  $q$ . Estão também assinaladas algumas órbitas do campo  $-\nabla f$ . A decomposição celular Morse-Smale neste exemplo é formada pelas quatro 0-células  $\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}$ , as três 1-células  $W^u(s_1), W^u(s_2), W^u(s_3)$  e a 2-célula  $W^u(q)$ .

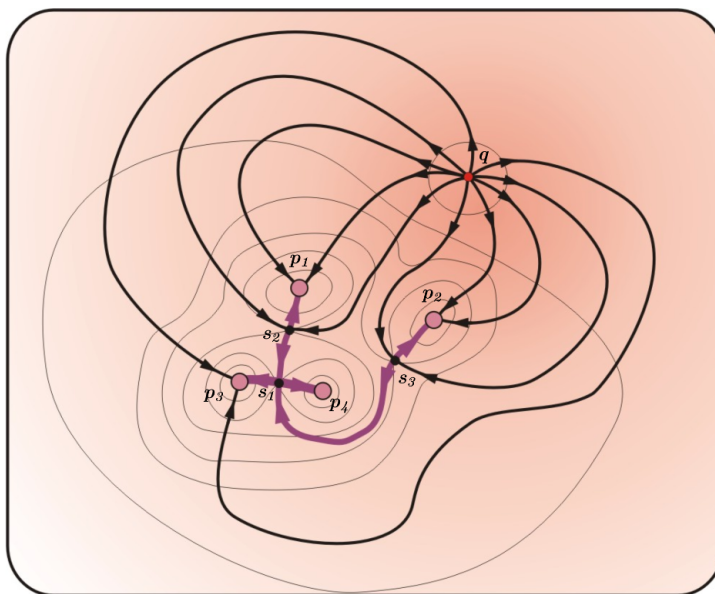


Figure 9.10: Decomposição celular associada a um campo gradiente Morse-Smale na esfera  $\mathbb{S}^2$

## 9.5 Funções de Morse próprias

Seja  $X$  uma variedade não compacta. Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é própria e limitada inferiormente se e somente se para todo  $c \in \mathbb{R}$  o semi-espaço  $X^c = f^{-1}] - \infty, c]$  for compacto (Exercício 9.21). A Teoria de Morse aplica-se a funções que satisfazem esta propriedade (Teorema 9.2.3).

**Proposição 9.5.1.** Toda a variedade (sem bordo)  $X$  admite uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (a)  $X^c = f^{-1}] - \infty, c]$  é compacto para todo  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $f$  é de Morse, i.e., todos os pontos críticos de  $f$  são não degenerados.

*Proof.* Segue do Teorema 2.3.2 (Whitney) e das proposições 9.5.2 e 9.5.3.  $\square$

Na realidade as funções que satisfazem a conclusão da Proposição 9.5.1 são densas em  $C^\infty(X, \mathbb{R})$  (Exercício 9.22).

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^N$  definimos a seguinte família de funções  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L_p(x) := \|x - p\|^2,$$

indexada nos pontos  $p \in \mathbb{R}^N$  do espaço ambiente de  $X$ .

**Proposição 9.5.2.** Se  $X \subset \mathbb{R}^N$  é uma variedade fechada em  $\mathbb{R}^N$ , então para todo  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função própria e limitada inferiormente, i.e.,  $L_p^{-1}] - \infty, c]$  é compacto para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

*Proof.* Basta observar que  $L_p^{-1}] - \infty, c] = X \cap \overline{B}_{\sqrt{c}}(p)$ , onde  $\overline{B}_{\sqrt{c}}(p)$  designa a bola fechada de centro  $p$  e raio  $\sqrt{c}$  em  $\mathbb{R}^N$ . Quando  $c < 0$  temos  $L_p^{-1}] - \infty, c] = \emptyset$ . Logo, como  $X$  é fechado em  $\mathbb{R}^N$ , segue que  $L_p^{-1}] - \infty, c]$  é fechado em limitado em  $\mathbb{R}^N$ , e portanto compacto.  $\square$

**Proposição 9.5.3.** Se  $X \subset \mathbb{R}^N$  é uma variedade fechada em  $\mathbb{R}^N$ , então para quase todo  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse.

Para estudar os pontos críticos das funções  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  vamos relacioná-los com os pontos críticos do mapa  $E: TX^\perp \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,

$$E(x, v) := x + v.$$

Observamos que a variedade  $TX^\perp$  tem dimensão  $N$  pelo que  $(x, v) \in TX^\perp$  é um ponto crítico de  $E$  sse  $\text{Nuc}(DE_{(x,v)}) \neq \{0\}$ .

**Proposição 9.5.4.** Dado  $x \in X$  são equivalentes as afirmações:

- (a)  $x$  é ponto crítico de  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

(b)  $(x, p - x) \in TX^\perp$ , i.e.,  $(x, p - x) \in E^{-1}(\{p\})$ .

*Proof.* Exercício 9.23. □

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade e  $q \in X$ .

**Definição 9.5.1.** Dizemos que  $p \in \mathbb{R}^N$  é um ponto focal de  $(X, q)$  se  $(q, p - q) \in TX^\perp$  e  $\text{Nuc}(DE_{(q, p-q)}) \neq \{0\}$ . A dimensão deste núcleo diz-se a multiplicidade do ponto focal. Dizemos simplesmente que  $p \in \mathbb{R}^N$  é um ponto focal de  $X$  se  $p$  for um ponto focal de  $(X, q)$  para algum  $q \in X$ .

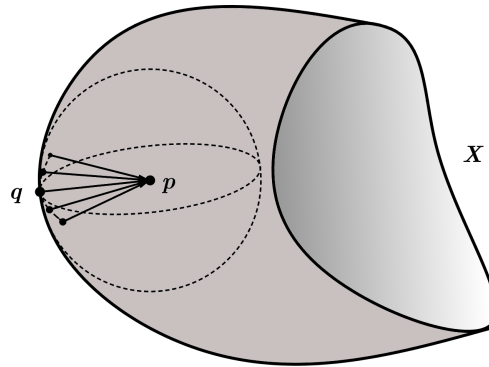


Figure 9.11: Ponto focal de  $(X, q)$

Para explicar o conteúdo geométrico da definição anterior consideremos uma função suave  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow TX^\perp$ ,  $f(t) = (q(t), \eta(t))$ , tal que  $f(0) = (q(0), \eta(0)) = (q, p - q)$  e para  $1 \leq j \leq k$ ,

$$Df_0(e_j) = \left( \frac{\partial q}{\partial t_j}(0), \frac{\partial \eta}{\partial t_j}(0) \right) \in \text{Nuc}(DE_{(q, p-q)}).$$

Então

$$q(t) + \eta(t) = E(q(t), \eta(t)) = E(q, p - q) + O(\|t\|^2) = p + O(\|t\|^2),$$

o que significa que as rectas normais a  $X$ ,  $\ell_t = \{q(t) + s\eta(t) : s \in \mathbb{R}\}$  com  $t \in \mathbb{R}^k$ , quase se intersectam no ponto focal  $p$  quando  $t \approx 0$ . Assim, um ponto focal de  $(X, q)$  é um ponto onde concorre uma família de rectas normais a  $X$  ao longo duma subvariedade de  $X$  contendo o ponto  $q$ . A dimensão duma tal família corresponde à multiplicidade do ponto focal.

Na proposição seguinte fazemos uso do conceito Riemanniano de segunda derivada duma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (Definição 14.12.2) que é uma aplicação bilinear simétrica  $\nabla^2 f(x): T_x X \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ , e do conceito de segunda forma fundamental do fibrado normal  $TX^\perp$  (Definição 14.12.3), que é uma aplicação bilinear  $B_x^\perp: T_x X^\perp \times T_x X \rightarrow T_x X$ .

**Proposição 9.5.5.** Se  $(q, p-q) \in TX^\perp$ , ou seja se  $q \in X$  é um ponto crítico de  $L_p$ , então

$$(a) \quad \frac{1}{2} \nabla^2 L_p(q)(u, v) = u \cdot (v + B_q^\perp(p-q, v)).$$

$$(b) \quad \text{Nuc}(DE_{(q, p-q)}) = \{(v, -v) \in T_q X \times \mathbb{R}^N : v + B_q^\perp(p-q, v) = 0\}$$

*Proof.* As duas primeiras derivadas de  $L_p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  são respectivamente  $(DL_p)_x v = (x-p) \cdot v$  e  $(D^2 L_p)_x(u, v) = 2u \cdot v$ . Calculemos agora a Hessiana de  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $q \in X$ . Usando a Definição 14.12.2 e a Proposição 14.12.13 temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 L_p(q)(u, v) &= 2u \cdot v + 2(q-p) \cdot B_q(u, v) \\ &= 2u \cdot v + 2u \cdot B_q^\perp(p-q, v) \\ &= 2u \cdot (v + B_q^\perp(p-q, v)). \end{aligned}$$

Quanto ao núcleo de  $DE_{(q, p-q)}$  temos

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(DE_{(q, p-q)}) &= \{(v, \zeta) \in T_{(q, p-q)} TX^\perp : v + \zeta = 0\} \\ &= \{(v, -v) \in T_q X \times \mathbb{R}^N : -v \in \Pi_q^\perp(p-q, v)\} \\ &= \{(v, -v) \in T_q X \times \mathbb{R}^N : v + B_q^\perp(p-q, v) \in T_q X^\perp\} \\ &= \{(v, -v) \in T_q X \times \mathbb{R}^N : v + B_q^\perp(p-q, v) = 0\}, \end{aligned}$$

a última igualdade porque  $v$  e  $B_q^\perp(p-q, v)$  são ambos tangentes a  $(X, q)$ .  $\square$

Desta proposição obtemos:

**Corolário 9.5.1.** Dado  $q \in X \subset \mathbb{R}^N$ , são equivalentes:

- (a)  $q \in X$  é um ponto crítico degenerado de  $L_p$ ,
- (b)  $p$  é um ponto focal de  $(X, q)$ .

Além disso a nulidade de  $q$  enquanto ponto crítico de  $L_p$  coincide com a multiplicidade de  $p$  como ponto focal de  $(X, q)$ .

*Demonstração da Proposição 9.5.3.* Pelo Teorema 5.1.1 (Sard) quase todo  $p \in \mathbb{R}^n$  é um valor regular do mapa  $E: TX^\perp \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Por outro lado, se  $p$  é um valor regular do mapa  $E$  então por definição de ponto focal (Definição 9.5.1)  $p$  não é ponto focal de  $X$ . Logo, pelo Corolário 9.5.1, todos os pontos críticos de  $L_p$  são não degenerados.  $\square$

Dado um vector  $\eta \in T_q^\perp X$  com  $\|\eta\| = 1$  considere o operador

$$B_q^\perp(\eta, \cdot): T_p X \rightarrow T_p X, \quad v \mapsto B_q^\perp(\eta, v)$$

onde  $B_q^\perp$  designa a segunda forma fundamental de  $TX^\perp$  no ponto  $(q, \eta)$  (Definição 14.12.3). Este operador é auto-adjunto pela Proposição 14.12.13.

**Proposição 9.5.6.** Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^N$ , e um ponto  $(q, p - q) \in TX^\perp$ , são equivalentes:

- (a)  $p$  é um ponto focal de  $(X, q)$
- (b)  $-\|p - q\|^{-1}$  é um valor próprio do operador  $B_q^\perp(\eta, \cdot)$  com  $\eta = \frac{p-q}{\|p-q\|}$ .

Além disso, a multiplicidade de  $p$  enquanto ponto focal de  $(X, q)$  coincide com a multiplicidade de  $\|p - q\|^{-1}$  como valor próprio de  $B_q^\perp(\eta, \cdot)$ .

*Proof.* Pela Proposição 9.5.5,  $p$  é um ponto focal de  $(X, q)$  sse existe um vector não nulo  $v \in T_q X$  tal que  $v + B_q^\perp(p - q, v) = 0$ , o que por sua vez é equivalente a  $B_q^\perp(\eta, v) = -\|p - q\|^{-1}v$ . □

A terminar esta secção, a proposição seguinte caracteriza os índices dos pontos críticos da função  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposição 9.5.7** (Teorema do índice para  $L_p$ ). Seja  $q \in X$  um ponto crítico de  $L_p$ . O índice de  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $q$  é igual à soma das multiplicidades dos pontos focais de  $(X, q)$  no intervalo aberto  $]q, p[$  que liga os pontos  $q$  e  $p$ .

*Proof.* Sejam  $\eta = \frac{p-q}{\|p-q\|}$  e  $\rho = \|p - q\|$ . Então os valores próprios negativos de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2 L_p(q)(u, v) &= u \cdot \left( v + B_q^\perp(p - q, v) \right) \\ &= \rho u \cdot \left( \frac{1}{\rho} v + B_q^\perp(\eta, v) \right) \end{aligned}$$

são da forma  $\frac{1}{\rho} + \mu$  onde  $\mu < -\rho^{-1}$  é valor próprio de  $B_q^\perp(\eta, \cdot)$ . Pela Proposição 9.5.6 os pontos focais de  $(X, q)$  no intervalo  $]q, p[$  são precisamente os pontos da forma  $q - \frac{1}{\mu} \eta$  tais que  $-\rho < \frac{1}{\mu} < 0$  ( $\Leftrightarrow \mu < -\rho^{-1}$ ), onde  $\mu$  é um valor próprio de  $B_q^\perp(\eta, \cdot)$ . Pela mesma proposição, coincidem as multiplicidades de  $q - \frac{1}{\mu} \eta$  enquanto ponto focal de  $(X, q)$  e de  $\mu$  enquanto valor próprio de  $B_q^\perp(\eta, \cdot)$ . Logo

$$\begin{aligned} \text{ind}(L_p, q) &= \sum_{\mu < -\rho^{-1}} \text{multiplicidade de } \mu \text{ como valor próprio de } B_q^\perp(\eta, \cdot) \\ &= \sum_{-\rho < \frac{1}{\mu} < 0} \text{multiplicidade de } \left( q - \frac{1}{\mu} \eta \right) \text{ como ponto focal de } (X, q). \end{aligned}$$

□



## 9.6 Funções quadráticas em $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{P}^n$

Dada uma matriz simétrica  $A \in \text{Mat}_{n+1}^S$ , consideremos a função  $f_A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_A(x) := x^t A x$ . Dada outra matriz  $B = A + cI$ , temos  $f_B(x) = f_A(x) + c\|x\|^2 = f_A(x) + c$ . As funções  $f_B$  e  $f_A$  têm os mesmos pontos críticos, com os mesmos índices, mas não os mesmos valores críticos.

**Proposição 9.6.1.** Se  $A$  tem  $n+1$  valores próprios distintos  $\lambda_0 < \dots < \lambda_n$ , e vectores próprios associados  $p_i \in \mathbb{S}^n$ ,  $A p_i = \lambda_i p_i$ , para  $0 \leq i \leq n$ , então  $f_A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse com valores críticos  $\lambda_i$  e pontos críticos associados  $\pm p_i$  com  $\text{ind}(f_A, \pm p_i) = i$ , para cada  $0 \leq i \leq n$ .

Em particular o seu polinómio de Morse é

$$\mathcal{M}_t(f_A) = 2 + 2t + 2t^2 + \dots + 2t^n.$$

*Proof.* A primeira parte desta proposição resulta do Exercício 3.18. Vamos aqui apenas calcular os índices dos pontos críticos  $p_i$ . Podemos, sem perda de generalidade, supor que a matriz  $A$  é diagonal, ou seja, que os vectores próprios de  $A$  são os vectores  $p_i = e_i$  da base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Neste caso  $f_A(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i^2$ . Para calcular os índices de  $f_A$  nos pontos críticos  $\pm e_i$ , fixamos as parametrizações locais da esfera  $\phi_{i,\pm}: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$

$$\begin{aligned} \phi_{i,\pm}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ := \left( x_0, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{j \neq i} x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right) \end{aligned}$$

Nestas coordenadas temos

$$f_A \circ \phi_{i,\pm}(x) = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j^2 + \lambda_i \left( 1 - \sum_{j \neq i} x_j^2 \right) = \lambda_i + \sum_{j=0}^n (\lambda_j - \lambda_i) x_j^2.$$

Logo, a Hessiana de  $f$  em  $\pm e_i$ , relativa à carta  $(\phi_{i,\pm})^{-1}$ , é a matriz diagonal com entradas

$$\lambda_0 - \lambda_i < \lambda_1 - \lambda_i < \dots < \lambda_{i-1} - \lambda_i < 0 < \lambda_{i+1} - \lambda_i < \dots < \lambda_n - \lambda_i.$$

Como esta matriz tem exactamente  $i$  entradas na diagonal (valores próprios) negativas, segue que  $\text{ind}(f_A, \pm p_i) = i$ .  $\square$

A esfera  $\mathbb{S}^n$  tem o seguinte polinómio de Poincaré, independente do corpo  $\mathbb{K}$  em questão,  $\mathcal{P}_t(\mathbb{S}^n, \mathbb{K}) = 1 + t^n$ . Logo, as funções quadráticas  $f_A$  não são

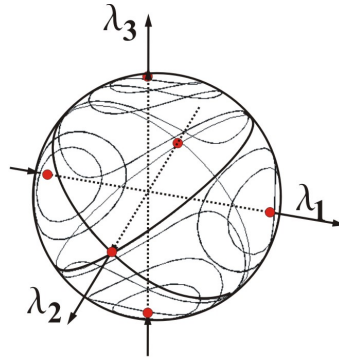


Figure 9.12: Pontos críticos de  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$\mathbb{K}$ -perfeitas para nenhum corpo. A figura 9.12 mostra as curvas de nível e os pontos críticos de uma função quadrática  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Chama-se *espaço projectivo real* de dimensão  $n$  ao quociente da esfera  $\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n/A$  pela relação de equivalência que identifica cada ponto  $x \in \mathbb{S}^n$  com o seu antípoda  $A(x) = -x$  (ver apêndice 14.6). Um ponto em  $\mathbb{P}^n$  é um par não ordenado  $\{-x, x\} \subset \mathbb{S}^n$ . Designamos por  $p_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  a projecção  $p_n(x) := \{-x, x\}$ . Com a topologia quociente,  $\mathbb{P}^n$  é uma variedade topológica compacta, e a projecção  $p_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é um homeomorfismo local. Para cada  $i = 0, \dots, n$ , definimos  $\phi_i^n : \text{int}(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,

$$\begin{aligned} \phi_i^n(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ := p_n \left( x_0, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{j \neq i} x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right). \end{aligned}$$

O mapa  $\phi_i : \text{int}(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathbb{P}^n$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem. As mudanças de coordenadas  $(\phi_i^n)^{-1} \circ \phi_j^n$  são mapas suaves. Logo, a família de cartas  $\{\phi_i : 0 \leq i \leq n\}$  é um atlas que define uma estrutura de variedade abstracta no projectivo  $\mathbb{P}^n$ . Com esta estrutura diferenciável a projecção  $p_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é um difeomorfismo local.

Existe um mergulho natural  $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $i(x) := (0, x)$ , que induz um correspondente mergulho entre espaços projectivos  $i : \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $i([x]) := [(0, x)]$ .

**Proposição 9.6.2.** O espaço  $\mathbb{P}^n$  obtém-se  $\mathbb{P}^{n-1}$  por junção da  $n$ -célula  $\phi_0^n : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  definida por

$$\phi_0^n(x_1, \dots, x_n) := p_n \left( \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_1, \dots, x_n \right).$$

Além disso o par  $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$  é de tipo ligação, relativamente a um corpo  $\mathbb{K}$ , sse  $n$  é ímpar ou  $\mathbb{K}$  é um corpo de característica<sup>1</sup> 2.

*Proof.* A restrição da célula  $\phi_0^n$  ao bordo  $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\partial\phi_0^n = i \circ p_{n-1}$ , identifica-se com um  $(n-1)$ -ciclo homólogo a  $\phi_0^{n-1} + (-1)^n \phi_0^{n-1}$  (Exercício 9.10).  $\square$

**Corolário 9.6.1.** A sequência de espaços projectivos

$$\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{P}^n$$

é uma decomposição celular de  $\mathbb{P}^n$ .

**Corolário 9.6.2.** Para um corpo  $\mathbb{K}$  de característica 2,

$$\mathcal{P}_t(\mathbb{P}^n, \mathbb{K}) = 1 + t + \dots + t^n$$

Para os restantes corpos,

$$\mathcal{P}_t(\mathbb{P}^n, \mathbb{K}) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 + t^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

*Proof.* Exercício 9.11.  $\square$

Toda a função par  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e., tal que  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ , passa ao cociente induzindo no espaço projectivo uma função  $\tilde{f} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz  $\tilde{f} \circ p_n = f$ . A função quadrática considerada acima,  $f_A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo uma função par, determina  $\tilde{f}_A : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $n$  pontos críticos com índices variando de 0 até  $n$ . O seu polinómio de Morse é

$$\mathcal{M}_t(\tilde{f}_A) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n.$$

Logo,  $\tilde{f}_A$  é uma função  $\mathbb{Z}_2$ -perfeita que não é  $\mathbb{R}$ -perfeita.

## 9.7 Teorema de Reeb

**Proposição 9.7.1.** Seja  $X$  uma variedade compacta sem bordo e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse com dois pontos críticos. Então  $X$  é homeomorfa à esfera  $\mathbb{S}^n$ .

<sup>1</sup>Chama-se *característica* dum corpo  $\mathbb{K}$  ao menor inteiro  $p \geq 1$  tal que  $p\lambda = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Se não existir um tal inteiro,  $\mathbb{K}$  diz-se ter característica 0. O corpo  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  tem característica 2, enquanto  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são corpos de característica 0.

*Proof.* Ver [16, §4, Cap. I]. Os dois pontos críticos são um máximo,  $f(p) = b$ , e um mínimo,  $f(q) = a$ , com  $a < b$ . Pelo Lema de Morse, se  $\varepsilon > 0$  for suficientemente pequeno, os conjuntos  $X^{a+\varepsilon} = f^{-1}[a, a + \varepsilon]$  e  $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$  são difeomorfos a  $\mathbb{D}^n$ . Mas, pelo primeiro teorema da teoria de Morse,  $X^{a+\varepsilon}$  é difeomorfo a  $X^{b-\varepsilon}$ . Logo  $X$  é a união de dois subconjuntos difeomorfos a  $\mathbb{D}^n$ ,  $f^{-1}[a, b - \varepsilon]$  e  $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$ , identificados ao longo da sua fronteira comum  $f^{-1}(b - \varepsilon) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . É agora fácil construir um homeomorfismo entre  $X$  e  $\mathbb{S}^n$  (Exercício 9.2).  $\square$

## 9.8 Exercícios

**Ex 9.1.** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma função suave, e  $U \subset Y$  um aberto conexo tal que  $f^{-1}(\overline{U})$  é um compacto sem pontos críticos. Mostre que, quaisquer que sejam  $y, y' \in U$ ,  $f^{-1}(y)$  e  $f^{-1}(y')$  são variedades difeomorfas.

**Sugestão:** Observe que este é um resultado local. Basta mostrar que  $f^{-1}(y) \simeq f^{-1}(y')$ , sempre que  $y$  e  $y'$  estão suficientemente próximos. Assim, podemos logo supor que  $Y = \mathbb{R}^k$ . Observe que dados  $y, y' \in U$ , existe uma sequência de pontos intermédios  $y^{(i)} \in \mathbb{R}^k$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ), tal que  $y^{(0)} = y$ ,  $y^{(k)} = y'$ , e para cada  $i = 1, \dots, k$ ,  $y^{(i)}$  difere de  $y^{(i-1)}$  apenas na  $i$ -ésima coordenada. Para provar que todas as pré-imagens destes pontos  $y^{(i)}$  são difeomorfas entre si, ficamos reduzidos a considerar o caso em que os pontos  $y, y' \in U$  diferem apenas na  $i$ -ésima coordenada. Escrevendo  $f = (f_1, \dots, f_k)$ , veja que se pode aplicar o 1º Teorema da Teoria de Morse à função  $f_i$  sobre a variedade  $\cap_{j \neq i} (f_j)^{-1}(y_j)$ .

**Ex 9.2.** Termine a prova do Teorema de Reeb (Proposição 9.7.1) construindo um homeomorfismo entre  $X$  e  $\mathbb{S}^n$  a partir de difeomorfismos entre  $\mathbb{D}^n$  e os semiespaços  $f^{-1}[a, b - \varepsilon]$  e  $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$ .

**Ex 9.3.** Calcule a homologia da esfera  $\mathbb{S}^n$  através duma decomposição celular.

**Ex 9.4.** Dê um exemplo duma função  $\mathbb{K}$ -perfeita na esfera  $\mathbb{S}^n$ .

Chama-se  $n$ -toro ao produto cartesiano  $\mathbb{T}^n = \overbrace{\mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}}^n$ , onde  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  é uma variedade de dimensão um difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ .

**Ex 9.5.** Mostre que  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sin(2\pi x_i)$ , é  $\mathbb{K}$ -perfeita.

**Sugestão:** Os números de Betti do  $n$ -toro são  $\beta_i(\mathbb{T}^n, \mathbb{K}) = \binom{n}{i}$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Ex 9.6.** Mostre que para qualquer função de Morse:

- (1)  $c_1(f) \geq c_0(f) - 1$  e  $c_2(f) \geq c_3(f) - 1$  se  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  
 (2)  $c_1(f) \geq c_0(f) + 2$  e  $c_2(f) \geq c_3(f) + 2$  se  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Sugestão:** Use as desigualdades de Morse fortes.

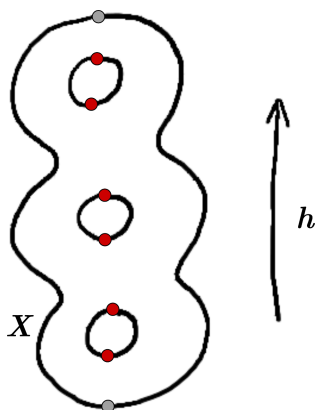


Figure 9.13: Pontos críticos da função altura  $h : S_3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ex 9.7.** Seja  $S_g$  uma superfície orientada de gênero  $g$ .

- (a) Mostre que existe uma função de Morse  $h : S_g \rightarrow \mathbb{R}$  que tem exactamente  $2g + 2$  pontos críticos. **Sugestão:** (Figura 9.13).  
 (b) Prove que toda a função de Morse  $f : S_g \rightarrow \mathbb{R}$  tem pelo menos  $2g + 2$  pontos críticos.  
 (c) É  $\mathbb{K}$ -perfeita qualquer função de Morse  $f : S_g \rightarrow \mathbb{R}$  que tenha exactamente  $2g + 2$  pontos críticos?

**Ex 9.8.** Seja  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo de dimensão  $n$ . Mostre que:

- (a) Se  $n$  é ímpar  $\chi(X^n) = 0$ .  
 (b) Se  $\mathbb{K}$  é um corpo e existe uma função de Morse  $\mathbb{K}$ -perfeita  $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}$  então para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\beta_i(X^n, \mathbb{K}) = \beta_{n-i}(X^n, \mathbb{K})$ .

**Sugestão:** Compare os pontos críticos de  $f$  e  $-f$ .

**Ex 9.9.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas sem bordo.

Mostre que  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ .

**Sugestão:** Tome funções de Morse  $f$  em  $X$ , e  $g$  em  $Y$ . Veja que  $h(x, y) = f(x) + g(y)$  é uma função de Morse em  $X \times Y$ , tal que o conjunto dos pontos críticos de  $h$  é o produto cartesiano do conjunto dos pontos críticos de  $f$  pelo de  $g$ , e relacione os respectivos índices.

**Ex 9.10.** Considere a extensão  $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  obtida por junção duma  $n$ -célula  $\phi_0^n : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Mostre que a restrição  $\partial\phi_0^n$  de  $\phi_0^n$  ao bordo identifica-se com um  $(n-1)$ -ciclo homólogo a  $\phi_0^{n-1} + (-1)^n \phi_0^{n-1}$ .

**Sugestão:** Visto como um  $(n-1)$ -ciclo, o mapa  $\partial\phi_0^n : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^n$  é homólogo à soma da sua restrição ao hemisfério norte, identificável com  $\phi_0^{n-1}$ , com a sua restrição ao hemisfério sul, identificável com  $(-1)^n \phi_0^{n-1}$ . Note que a aplicação antípoda  $A : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  tem sinal  $\text{sgn}(A) = (-1)^n$ .

**Ex 9.11.** Mostre que  $\mathcal{P}_t(\mathbb{P}^n, \mathbb{K}) = 1 + t + \dots + t^n$ , para qualquer corpo  $\mathbb{K}$  de característica 2, e que, para os restantes corpos,

$$\mathcal{P}_t(\mathbb{P}^n, \mathbb{K}) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 + t^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

**Sugestão:** Use a Proposição 9.6.2, ou o Exercício 9.10.

**Ex 9.12.** Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse invariante pela aplicação antípoda  $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $x \mapsto -x$ . Mostre que  $f$  tem pelo menos dois pontos críticos de cada índice  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Ex 9.13.** Considere a seguinte decomposição celular da esfera  $\mathbb{S}^n$ ,

$$\emptyset \subset \mathbb{D}^0 \subset \mathbb{S}^0 \subset \mathbb{D}^1 \subset \mathbb{S}^1 \subset \dots \subset \mathbb{D}^n \subset \mathbb{S}^n,$$

do Exercício 8.1. Calcule os polinómios de Poincaré de cada um dos subespaços desta decomposição, identificando se as células correspondentes são, ou não, de tipo ligação.

Os dois exercícios seguintes referem-se à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix},$$

e às funções quadráticas  $f_A : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{f}_A : \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  por ela determinadas.

**Ex 9.14.** Mostre como identificar a decomposição celular da esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  associada à ordenação  $(-e_1, e_1, -e_2, e_2, \dots, -e_n, e_n)$  dos pontos críticos de  $f_A : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , com a decomposição celular do exercício anterior.

**Ex 9.15.** Veja como identificar a decomposição celular do espaço projectivo  $\mathbb{P}^{n-1}$  associada à ordenação  $([e_1], [e_2], \dots, [e_n])$  dos pontos críticos de  $\tilde{f}_A : \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , com a decomposição celular  $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{P}^{n-1}$ .

**Ex 9.16.** Existe alguma função de Morse  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\mathcal{M}_t(f) = 2 + t + t^3$ ? E com  $\mathcal{M}_t(f) = 2 + t^2 + t^3$ ? Justifique a não existência, ou faça um esboço das superfícies de nível duma tal função.

**Sugestão:** Identifique  $\mathbb{S}^3$  com  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , via projecção estereográfica, e suponha que  $p = \infty$  é o único máximo da função.

**Ex 9.17.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave tal que

- 1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = -\infty$ ,
- 2)  $(0,0)$ ,  $(-1,0)$  e  $(1,0)$  são os únicos pontos críticos de  $f$ ,
- 3)  $f(0,0) = -2$ ,  $f(-1,0) = 4$ ,  $f(1,0) = 0$ ,
- 4) As Hessianas de  $f$  nos pontos  $(0,0)$ ,  $(-1,0)$  e  $(1,0)$  são respectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para cada  $c \in \mathbb{R}$  escrevemos

$$M_c := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq c \}.$$

- (a) Mostre que  $M_c$  é compacto, para todo  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (b) Determine a topologia dos conjuntos  $M_2$ ,  $M_{-1}$  e  $M_{-3}$ , i.e., modelos aos quais estes conjuntos sejam homeomorfos.
- (c) Calcule os polinómios de Morse  $\mathcal{M}_t(f|_{M_2})$ ,  $\mathcal{M}_t(f|_{M_{-1}})$  e  $\mathcal{M}_t(f|_{M_{-3}})$ .
- (d) Esboce as curvas de nível de  $f$  (incluindo as linhas críticas).

**Ex 9.18.** Seja  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse com seis pontos críticos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  e  $p_6$  tais que

$$f(p_1) < 1 < f(p_2) < f(p_3) < 2 < f(p_4) < f(p_5) = f(p_6),$$

e  $f^{-1}(] - \infty, 2])$  é difeomorfo ao disco  $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

- (a) Mostre que  $p_3$  e  $p_4$  não podem ser mínimos locais.
- (b) Determine os índices de todos os pontos críticos.
- (c) Identificando  $\mathbb{S}^2$  com  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , suponha que  $p_1 = \infty$  e  $f^{-1}[1, +\infty[ = \mathbb{D}^2$ . Esboce o retrato das curvas de nível de  $f$  no disco  $\mathbb{D}^2$ .

**Ex 9.19.** Considere a função  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) := x + z^2$ .

- (a) Mostre que os pontos críticos de  $f$  são:  
 $(-1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .
- (b) Mostre que  $f$  é uma função de Morse.  
**Sugestão:** Escolha cartas apropriadas.
- (c) Determine os índices dos pontos críticos de  $f$ .
- (d) Escreva o polinómio de Morse da função  $f$ .
- (e) Mostre que  $f^{-1}[0, +\infty[$  é uma variedade com bordo difeomorfa a um disco.
- (f) Faça um desenho representando  $f^{-1}[0, +\infty[$  como um disco  $\mathbb{D}^2$ , os pontos críticos de  $f$  em  $\mathbb{D}^2 = f^{-1}[0, +\infty[$ , e os seus respectivos níveis.

**Ex 9.20.** Seja  $X$  uma superfície compacta e orientada de género  $g \geq 0$ . Mostre que dados números inteiros  $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{N}^3$  satisfazendo as desigualdades de Morse

$$c_0 \geq 1, \quad c_2 \geq 1 \quad \text{e} \quad c_1 = c_0 + c_2 + 2g - 2,$$

existe uma função de Morse  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{M}_t(f) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ .

**Sugestão:** Seja

$$\Gamma := \{c_0 + c_1 t + c_2 t^2: c_0 \geq 1, c_2 \geq 1, c_1 = c_0 + c_2 + 2g - 2\}.$$

Todo o elemento de  $\Gamma$  pode ser alcançado somando a  $p_0(t) = 1 + 2gt + t^2$  múltiplos inteiros dos polinómios  $u(t) = 1 + t$  e  $v(t) = t + t^2$ . Assim, basta ver que  $p_0(t)$  é o polinómio duma função de Morse  $f$ , e que é sempre possível modificar localmente uma função de Morse  $f$  com polinómio  $p(t) = \mathcal{M}_t(f)$  de modo a que o seu polinómio de Morse passe a ser  $p(t) + u(t)$  ou  $p(t) + v(t)$ .

**Ex 9.21.** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua numa variedade  $X$  não compacta. Mostre que  $f$  é própria e limitada inferiormente se e somente se  $f^{-1}] - \infty, c]$  for compacto para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ex 9.22.** Dada uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , mostre que existe uma função suave  $F: W \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $W$  é um espaço Euclideano, tal que  $f = F(0, \cdot)$  e para quase todo  $w \in W$ ,

- (a)  $F_w := F(w, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse,
- (b)  $F_w^{-1}] - \infty, c]$  é compacto para todo  $c \in \mathbb{R}$ .



**Sugestão:** Seja  $i: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  um mergulho tal que  $i(X)$  é fechado em  $\mathbb{R}^N$  (Teorema 2.3.2). Sejam  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$  o mapa suave  $\phi(x) := (i(x), f(x))$  e  $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^{N+1}$  a imagem  $\tilde{X} := \phi(X)$ , que é fechada em  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ . Considere a função  $L: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(x, y) := y$ , que satisfaz  $L \circ \phi = f$  (Exercício 1.11).

Pode assim supor que  $X = \tilde{X}$  e  $f(x, y) = L(x, y) = y$ .

Seja  $W = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  e defina para cada  $(\varepsilon, v) \in W$ ,  $f_{\varepsilon, v}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_{\varepsilon, v}(x) := y + v \cdot x + \varepsilon y^2 + \varepsilon \|x\|^2.$$

Veja que  $f_{0,0} = f$  e que, para  $\varepsilon > 0$ ,  $f_{\varepsilon, v} = c + \varepsilon L_p$  onde  $p = -\frac{1}{2\varepsilon}(v, 1)$  e  $c = (\|v\|^2 + 1)/(4\varepsilon)$ . Aplique então a Proposição 9.5.3.

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^N$  e um ponto  $p \in \mathbb{R}^N$ , os exercícios seguintes referem a função  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L_p(x) := \|x - p\|^2$ .

**Ex 9.23.** Dado  $x \in X$ , mostre que são equivalentes:

- (a)  $x$  é um ponto crítico de  $L_p$ ,
- (b)  $p - x \in T_x X^\perp$ , ou seja se  $(x, p - x) \in TX^\perp$ .

**Ex 9.24.** Determine os pontos focais (com as respectivas multiplicidades) das seguintes superfícies em  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (esfera)
- (b)  $C^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1\}$  (cilindro)
- (c)  $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1\}$  (toro,  $a > 1$ )

**Ex 9.25.** Sejam  $X$  uma das superfícies do Exercício 9.24, e  $p \in \mathbb{R}^3$  um ponto não focal de  $X$ . Descreva geometricamente os pontos críticos de  $L_p: X \rightarrow \mathbb{R}$  e caracterize os respectivos índices.



## Chapter 10

# Teoria do Grau

A Teoria do Grau atribui um invariante topológico (numérico) a cada mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  entre variedades compactas, sem bordo e com a mesma dimensão. Este invariante chamado o *grau* do mapa  $f$  é denotado por  $\deg(f)$ . Na realidade o grau é um invariante homotópico no sentido em que dois mapas homotópicos têm sempre o mesmo grau. O grau dum mapa  $f: X \rightarrow Y$  ‘mede’ o número de vezes que a imagem  $f(X)$  cobre  $Y$ . Desta interpretação resulta claro que o grau é multiplicativo. Dados mapas contínuos  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$ , entre variedades  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  nas condições acima, tem-se sempre

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f).$$

A Teoria do grau de Brouwer, que iremos tratar aqui, introduz o conceito de grau para mapas suaves, no contexto da Topologia Diferencial.

Existem outras abordagens ao conceito de grau, como a Teoria homológica do grau que a seguir descrevemos em traços gerais.

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas, conexas, sem bordo e com a mesma dimensão  $n$ .

Suponhamos primeiro que  $X$  e  $Y$  são *orientáveis*. Para qualquer corpo os espaços de homologia  $H_n(X)$  e  $H_n(Y)$  têm dimensão 1. Estes espaços admitem geradores canónicos  $[\lambda_X]$  e  $[\lambda_Y]$  definidos por ciclos  $\lambda_X \in Z_n(X)$  e  $\lambda_Y \in Z_n(Y)$  que podem ser construídos a partir de triangulações orientadas de  $X$  e  $Y$  respectivamente (ver apêndice 14.11). Prova-se que para cada aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  existe um único inteiro  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ , dito o *grau* de  $f$ , tal que a aplicação  $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  satisfaz  $H_n(f)[\lambda_X] = \deg(f)[\lambda_Y]$ . Ambas as propriedades, a invariância por homotopia e a multiplicatividade, são muito fáceis de verificar no âmbito da Homologia Singular. A relação de homologia entre ciclos  $f_*\lambda_X \sim n\lambda_Y$ , com  $n = \deg(f)$ , traduz de forma precisa a ideia pouco rigorosa de que a imagem de  $f$  cobre  $n$  vezes a variedade  $Y$ .

Quando  $X$  é uma variedade não orientável de dimensão  $n$  podemos ter  $H_n(X, \mathbb{K}) = \{0\}$  para alguns corpos  $\mathbb{K}$ . De qualquer modo  $H_n(X, \mathbb{Z}_2)$

tem sempre dimensão 1. Este espaço admite um gerador canônico  $[\lambda_X]$  definido por um ciclo  $\lambda_X \in Z_n(X, \mathbb{Z}_2)$  construído a partir duma triângulação de  $X$  (ver apêndice 14.11). Pode-se assim replicar a definição anterior introduzindo a noção homológica de *grau módulo 2* dum mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  entre variedades não necessariamente orientáveis. Este grau módulo 2 goza das mesmas propriedades de invariância por homotopia e de multiplicatividade. Ele é definido como a única ‘paridade’  $\deg_2(f) \in \mathbb{Z}_2$  tal que a aplicação  $H_n(f): H_n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(Y, \mathbb{Z}_2)$  satisfaz  $H_n(f)[\lambda_X] = \deg_2(f)[\lambda_Y]$ .

## 10.1 Teoria do Grau Módulo 2

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas, sem bordo, com a mesma dimensão  $n = \dim X = \dim Y$ .

Dado um mapa suave  $f: X \rightarrow Y$ , vamos denotar por  $V_f$  o conjunto dos seus valores regulares. Se  $y \in V_f$  então  $Df_x: T_x \rightarrow T_y Y$  é isomorfismo para cada  $x \in f^{-1}(y)$ . Pelo Teorema da Função Inversa o conjunto  $f^{-1}(y)$  é formado de pontos isolados. Como  $X$  é compacto resulta que  $f^{-1}(y)$  é finito.

Define-se o *grau módulo 2* de  $f$  em  $y$  como sendo a ‘paridade’ do número de pré-imagens

$$\deg_2(f, y) = \#f^{-1}(y) \pmod{2}.$$

O conjunto  $V_f$  é aberto (Exercício 2.11).

**Proposição 10.1.1.** Para cada valor regular  $y \in Y$  do mapa  $f: X \rightarrow Y$ , a função  $\deg_2(f, \cdot): V_f \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $y \mapsto \deg_2(f, y)$  é localmente constante.

*Proof.* Pelo Exercício 2.9, para cada valor regular  $y \in Y$  existe uma vizinhança aberta  $U \subseteq Y$  de  $y$  tal que  $f^{-1}(U)$  se escreve como união disjunta de abertos  $V_i \subseteq X$ ,  $f^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ , onde a restrição  $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$  é um difeomorfismo para todo  $i = 1, \dots, k$ . Segue que  $\#f^{-1}(y) = k$ , e  $\deg_2(f, y) = k \pmod{2}$  para todo  $y \in U$ .  $\square$

A proposição seguinte será usada para demonstrar a invariância por homotopia do grau módulo 2.

**Proposição 10.1.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas sem bordo, da mesma dimensão, e  $Z$  uma variedade compacta com bordo tal que  $\partial Z = X$ . Se  $f: X \rightarrow Y$  admite uma extensão suave  $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$  então  $\deg_2(f, y) = 0$  para todo  $y \in V_f$ .

*Proof.* Seja  $y \in V_f \cap V_{\tilde{f}}$ . Pelo Teorema 4.2.1  $\tilde{f}^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n + 1 - n = 1$ , tal que  $\partial\tilde{f}^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y) \cap \partial Z = f^{-1}(y)$ . Cada componente conexa da pré-imagem  $\tilde{f}^{-1}(y)$  é uma curva fechada  $\sigma_i$  difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , ou uma curva aberta  $\gamma_i$  difeomorfa ao intervalo  $[0, 1]$ , com  $\partial\gamma_i = \{a_i, b_i\}$  (Exercício 7.8). Vamos designar por  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  as componentes conexas abertas de  $\tilde{f}^{-1}(y)$ .

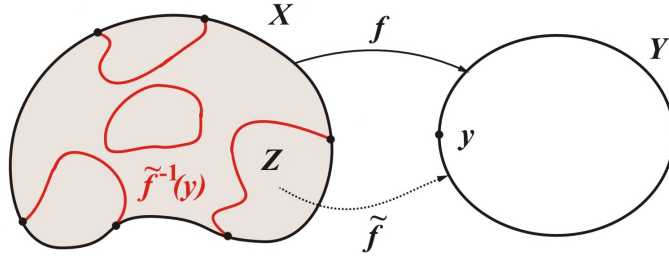


Figure 10.1: Pré-imagens de  $f$  e da sua extensão  $\tilde{f}$

A união dos bordos  $\partial\gamma_i$  forma o conjunto pré-imagem

$$f^{-1}(y) = \{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\}$$

com um número par de elementos (Exercício 7.9). Logo  $\deg_2(f, y) = 0$ .

Finalmente, se  $y \in V_f$  mas  $y$  não é um valor regular de  $\tilde{f}$ , tomamos pela Proposição 10.1.1 uma vizinhança  $U \subseteq V_f$  de  $y$  onde  $\deg_2(f, \cdot)$  seja constante. Pelo Teorema de Sard existe  $y' \in U$  valor regular de  $\tilde{f}$ . Logo, pelo o caso anterior,  $\deg_2(f, y) = \deg_2(f, y') = 0$ .  $\square$

**Proposição 10.1.3.** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  mapas suaves, homotópicos entre si e  $y \in V_f \cap V_g$ . Então  $\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$ .

*Proof.* Seja  $Z$  o cilindro  $[0, 1] \times X$  o cilindro cujo bordo é dado por  $\partial Z = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times X)$ .

Comecemos por supor que  $f$  e  $g$  são suavemente homotópicos, i.e., que existe uma homotopia suave  $\tilde{h} : Z \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$ . Se  $y \in V_f \cap V_g$  então  $y$  é também valor regular da restrição  $h|_{\partial Z} : \partial Z \rightarrow Y$ . Temos  $(h|_{\partial Z})^{-1}(y) = \{0\} \times f^{-1}(y) \cup \{1\} \times g^{-1}(y)$ , sendo esta uma união disjunta. Logo pela Proposição 10.1.2,  $0 = \deg_2(h|_{\partial Z}, y) = \deg_2(f, y) + \deg_2(g, y)$ , o que implica  $\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$ .

Consideremos agora o caso geral em que as aplicações suaves  $f$  e  $g$  são homotópicas. Seja  $h : Z \rightarrow Y$  uma homotopia contínua entre  $f$  e  $g$ . Pela Proposição 7.1.2 existe uma aplicação suave  $\hat{h} : Z \rightarrow Y$  arbitrariamente próxima de  $h$ . Esta aproximação suave não é uma homotopia entre  $f$  e  $g$  mas as restrições  $\hat{f}, \hat{g} : X \rightarrow Y$  definidas por  $\hat{f}(x) := \hat{h}(0, x)$  e  $\hat{g}(x) := \hat{h}(1, x)$  são

aplicações suaves respectivamente próximas de  $f$  e de  $g$ . Pelo Exercício 7.14 segue que  $f$  é suavemente homotópica a  $\hat{f}$  e que  $g$  é suavemente homotópica a  $\hat{g}$ . Finalmente da transitividade do Exercício 7.15 concluímos que  $f$  é suavemente homotópica a  $g$ , o que nos reduz ao caso anterior.  $\square$

Dois difeomorfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se *suavemente isotópicos* se existir um mapa suave  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $h(0, \cdot) = f$ ,  $h(1, \cdot) = g$  e para cada  $t \in [0, 1]$  a aplicação  $h_t : X \rightarrow Y$ ,  $h_t := h(t, \cdot)$  é um difeomorfismo. O mapa  $h$  diz-se uma *isotopia* entre  $f$  e  $g$ .

Designamos por  $\text{Dif}^\infty(X)$  o grupo de todos os difeomorfismos  $f : X \rightarrow X$  e por  $\text{Dif}_0^\infty(X)$  o subgrupo dos difeomorfismos  $f \in \text{Dif}^\infty(X)$  que são isotópicos à identidade (Exercício 10.2).

Todo o difeomorfismo isotópico à identidade preserva a orientação (exercício 10.3). A recíproca não é verdadeira. O grupo  $\text{Dif}_0^\infty(X)$  é em geral um subgrupo próprio do grupo dos difeomorfismos de  $X$  que preservam a orientação. Todo o difeomorfismo  $f \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  é homotópico à identidade, pelo que induz a aplicação identidade  $H_k(f) = \text{id}_{H_k(X)}$  em cada espaço de homologia  $H_k(X)$ . Logo qualquer difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^\infty(X)$  que preserve a orientação mas induza uma acção não trivial num certo espaço de homologia  $H_k(X)$  não pode ser isotópico à identidade.

O grupo de difeomorfismos  $\text{Dif}_0^\infty(X)$  actua naturalmente no espaço  $X$ , sendo a acção definida por  $\text{Dif}_0^\infty(X) \times X \rightarrow X$ ,  $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ . Esta acção diz-se *transitiva* ou *homogénea* se para quaisquer  $x, y \in X$  existir  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

**Lema 10.1.1.** Toda a variedade conexa sem bordo  $X$  é homogénea, no sentido que para quaisquer  $x, y \in X$  existe  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

*Proof.* Para qualquer campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  com suporte compacto, o seu fluxo  $\varphi_\xi^t$  é completo (Teorema 3.2.2). Como  $\varphi_\xi^0 = \text{id}_X$  temos  $\varphi_\xi^t \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Consideremos a relação  $x \sim y$  se existir  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Porque  $\text{Dif}_0^\infty(X)$  é um grupo, esta é uma relação de equivalência. Basta mostrar que a relação  $\sim$  é aberta, i.e., que as suas classes de equivalência são abertas em  $X$ , pois como  $X$  é conexo este facto implica que haja apenas uma classe de equivalência.

Dado  $p \in X$  vejamos então que a classe de equivalência de  $p$  contem uma vizinhança de  $p$ . Denotemos por  $B_r \subset \mathbb{R}^n$  a bola de centro na origem e raio  $r$  e seja  $\phi : B_1 \rightarrow U$  um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  em  $X$ . O conjunto  $V = \phi(B_{1/2})$  é uma vizinhança aberta de  $p$ . Dado  $q \in V$  seja  $v = \phi^{-1}(q) \in B_{1/2}$ . Consideremos uma função de classe  $C^\infty$ , não crescente,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\beta(t) = 1$  se  $t \leq 1/4$  e  $\beta(t) = 0$  se  $t \geq 3/4$ . O

campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$  definido por  $\xi_v(x) := \beta(\|x\|^2)v$  tem suporte compacto contido em  $B_1$  e é constante  $\xi_v(x) \equiv v$  sobre a bola  $B_{1/2}$ . Logo  $\varphi_{\xi_v}^1(0) = v$ . O push-forward deste campo  $\xi = \phi_*\xi_v$  estende-se a um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  com suporte compacto tal que  $\varphi_\xi^t(p) = \phi(tv)$  para  $t \in [0, 1]$ , e em particular,  $\varphi_\xi^1(p) = q$ . Isto mostra que  $p \sim q$ , e, portanto, que o aberto  $V$  está contido na classe de equivalência de  $p$ .  $\square$

Vamos agora concluir que o grau  $\deg_2(f, y)$  é independente da escolha do valor regular  $y \in V_f$ , o que permite definir o *grau módulo 2* de  $f$ , denotado por  $\deg_2(f)$ , como valor constante de  $\deg_2(f, \cdot) : V_f \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

**Proposição 10.1.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades nas condições anteriores, mas  $Y$  conexa. Dado um mapa suave  $f : X \rightarrow Y$ , a aplicação  $\deg_2(f, \cdot) : V_f \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é constante.

*Proof.* Como  $Y$  é conexa, fixados  $y, y' \in V_f$  existe um difeomorfismo  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(Y)$  tal que  $\varphi(y) = y'$ . Segue que  $f$  é suavemente homotópica a  $\varphi \circ f$  e, pela Proposição 10.1.3,

$$\begin{aligned} \deg_2(f, y') &= \deg_2(\varphi \circ f, y') = \#(\varphi \circ f)^{-1}(y') \pmod{2} \\ &= \#f^{-1}(y) \pmod{2} = \deg_2(f, y). \end{aligned}$$

Notamos que  $(\varphi \circ f)^{-1}(y') = f^{-1}(y)$ .  $\square$

Da Proposição 10.1.3 segue a invariância por homotopia: se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações suaves suavemente homotópicas então  $\deg_2(f) = \deg_2(g)$ .

**Proposição 10.1.5.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  variedades compactas e conexas sem bordo. Dadas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  suaves,  $\deg_2(g \circ f) = \deg_2(g) \deg_2(f)$ .

*Proof.* Sejam  $z \in V_{g \circ f}$  um valor regular e  $g^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , seja  $f^{-1}(y_i) = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}\}$ . Como a composição  $D(g \circ f)_{x_{i,j}} : T_{x_{i,j}}X \rightarrow T_zZ$  é um isomorfismo segue que  $Df_{x_{i,j}} : T_{x_{i,j}}X \rightarrow T_{y_i}Y$  e  $Dg_{y_i} : T_{y_i}Y \rightarrow T_zZ$  são também isomorfismos, quaisquer que sejam  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i$ . Assim  $z \in Z$  é um valor regular de  $g$  e cada  $y_i$  é um valor regular de  $f$ , donde  $\deg_2(g) \equiv n \pmod{2}$  e  $\deg_2(f) \equiv k_i \pmod{2}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Logo

$$\begin{aligned} \deg_2(g \circ f) &= \sum_{i=1}^n k_i \pmod{2} = n \deg_2(f) \pmod{2} \\ &= \deg_2(g) \deg_2(f). \end{aligned}$$

$\square$

Vejamos agora alguns exemplos e aplicações.

**Exemplo 10.1.1.** *Qualquer difeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  tem grau  $\deg_2(f) = 1$ , porque  $\#f^{-1}(y) = 1$  para todo  $y \in Y$ . Em particular  $\deg_2(\text{id}_X) = 1$ .*

**Exemplo 10.1.2.** *Qualquer mapa não sobrejectivo  $f: X \rightarrow Y$  tem grau zero,  $\deg_2(f) = 0$ , porque cada  $y \in Y \setminus f(X) \subset V_f$ ,  $\#f^{-1}(y) = 0$ .*

Vamos agora re-demonstrar o Teorema 7.2.1 como aplicação da Teoria do grau módulo 2.

**Proposição 10.1.6.** *Seja  $X$  uma variedade compacta com bordo. Então  $\partial X$  não é um retracto de  $X$ .*

*Proof.* Se existisse uma retracção  $r: X \rightarrow \partial X$ , pela Proposição 10.1.2,

$$0 = \deg_2(r|_{\partial X}) = \deg_2(\text{id}_{\partial X}) = 1.$$

□

O famoso Teorema do ponto fixo de Brouwer segue facilmente do resultado anterior (Exercício 7.17).

**Teorema 10.1.1** (Brouwer). *Todo o mapa contínuo  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tem pelo menos um ponto fixo.*

*Proof.* Seja  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  um mapa contínuo sem pontos fixos. Por compacidade do disco  $\mathbb{D}^n$  temos  $\varepsilon := \min_{x \in \mathbb{D}^n} \|f(x) - x\| > 0$ . Pelo Corolário 14.3.1 (Teorema de Stone-Weierstrass) podemos aproximar  $f$  por uma função polinomial  $p: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ . Notamos que se tivermos uma aproximação polinomial  $p: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $f$  tal que  $\|p\|_\infty > 1$ , então  $p/\|p\|_\infty$  será uma nova aproximação de  $f$  com imagem contida em  $\mathbb{D}^n$ . Se a aproximação  $p: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  satisfizer  $\|f(x) - p(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , então para todo  $x \in \mathbb{D}^n$ ,

$$\|p(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|f(x) - p(x)\| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Logo a aproximação suave  $p: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  também não tem pontos fixos. Posto isto, vamos assumir que  $f$  é suave sem pontos fixos. Definimos uma aplicação  $g: \mathbb{D}^n \rightarrow \partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$  por  $g(x) := f(x) + t(x) \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ , sendo  $t = t(x)$  o único escalar positivo tal que  $\|f(x) + t \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}\|^2 = 1$  (figura 7.6).

Como  $g(x)$  é o ponto de intersecção da semi-recta de  $f(x)$  para  $x$  com a esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  temos  $g(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Logo  $g: \mathbb{D}^n \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$  é uma retracção, o que contradiz a Proposição 10.1.6. □



## 10.2 Teoria do Grau de Brouwer

Nesta secção  $X$  e  $Y$  são variedades compactas e orientadas sem bordo com a mesma dimensão  $n$ . Supomos também que a variedade  $Y$  é conexa.

Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa suave e designamos por  $V_f$  o conjunto dos valores regulares de  $f$ . Este conjunto é aberto em  $Y$  (Exercício 2.11).

Dado  $y \in V_f$ , como vimos na secção anterior que a pré-imagem  $f^{-1}(y)$  é um conjunto finito. Definimos

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(Df_x),$$

onde  $\operatorname{sgn}(Df_x)$  designa o sinal do isomorfismo  $Df_x$  entre os espaços lineares orientados  $T_x X$  e  $T_y Y$ . Observemos que o sinal  $\operatorname{sgn}(Df_x)$  corresponde à orientação induzida na pré-imagem  $f^{-1}(y)$ , de acordo com a definição dada na secção 6.4 (Exercício 6.13).

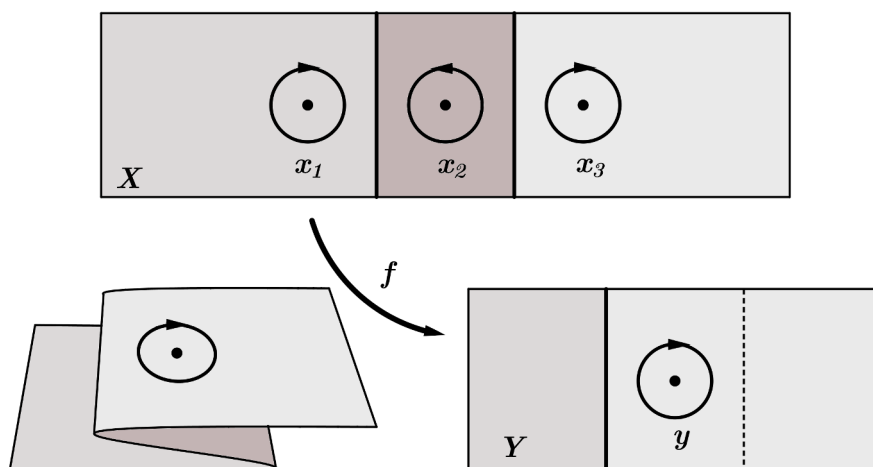


Figure 10.2: Orientação das pré-imagens por um mapa com duas dobras

**Proposição 10.2.1.** A função  $\deg(f, \cdot) : V_f \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $y \mapsto \deg(f, y)$ , é localmente constante.

*Proof.* Pelo Exercício 2.9, para cada  $y \in V_f$  existe uma vizinhança aberta  $U \subseteq V_f$  de  $y$  tal que  $f^{-1}(U)$  se escreve como união disjunta de abertos  $V_i \subseteq X$ ,  $f^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ , onde a restrição  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  é um difeomorfismo para todo  $i = 1, \dots, k$ . Escrevendo  $\varepsilon_i := \operatorname{sgn}(f|_{V_i})$ , segue que  $\deg(f, y) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$  para todo  $y \in U$ .  $\square$

A proposição seguinte será usada para demonstrar a invariância por homotopia do grau de Brouwer.

**Proposição 10.2.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas orientadas sem bordo, e  $Z$  uma variedade compacta orientada com bordo  $Z$  tal que  $\partial Z = X$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  admite uma extensão suave  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  então  $\deg(f, y) = 0$  para todo  $y \in V_f$ .

*Proof.* Seja  $y \in V_f$  e suponhamos também que  $y \in V_{\tilde{f}}$ . Pelo Teorema 4.2.1,  $\tilde{f}^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n + 1 - n = 1$ , tal que  $\partial\tilde{f}^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y) \cap \partial Z = f^{-1}(y)$ . Cada componente conexa da pré-imagem  $\tilde{f}^{-1}(y)$  é uma curva fechada  $\sigma_i$  difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , ou uma curva aberta  $\gamma_i$  difeomorfa ao intervalo  $[0, 1]$ , com  $\partial\gamma_i = \{a_i, b_i\}$ . Vamos designar por  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  as componentes conexas abertas de  $\tilde{f}^{-1}(y)$ .

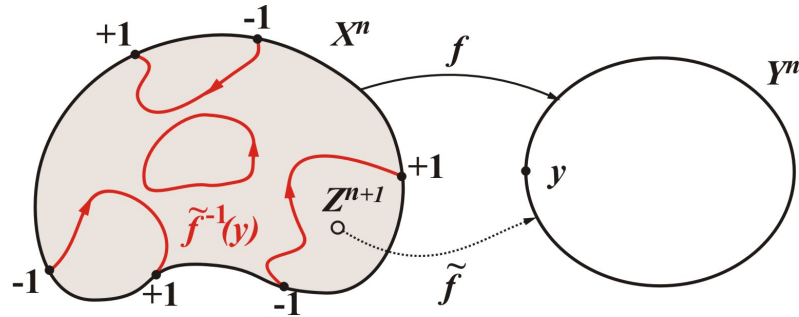


Figure 10.3: Pré imagens orientadas de  $f$  e da sua extensão  $\tilde{f}$

Cada arco  $\gamma_i \subseteq \tilde{f}^{-1}(y)$  está orientado como pré-imagem e induz uma orientação no bordo  $\partial\gamma_i = \{a_i, b_i\}$  tal que  $\text{sgn}(a_i) = -1$  e  $\text{sgn}(b_i) = +1$ . A união de todos estes bordos forma o conjunto pré-imagem  $f^{-1}(y) = \{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\}$ . Mas pela Proposição 6.4.2 estas orientações de  $\partial\tilde{f}^{-1}(y)$  coincidem com a orientação induzida na pré-imagem  $f^{-1}(y)$  por  $f$ . Como a orientação induzida por  $f$  na pré-imagem  $x \in f^{-1}(y)$  é o sinal  $\text{sgn}(Df_x)$ , resulta que  $\text{sgn}(Df_{a_i}) = -1$  e  $\text{sgn}(Df_{b_i}) = +1$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Logo,

$$\begin{aligned} \deg(f, y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(Df_x) \\ &= \sum_{i=1}^m \underbrace{\text{sgn}(Df_{a_i}) + \text{sgn}(Df_{b_i})}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, se  $y \in V_f \setminus V_{\tilde{f}}$  tomamos pela Proposição 10.2.1 uma vizinhança  $U \subseteq V_f$  de  $y$  onde  $\deg(f, \cdot)$  seja constante. Pelo Teorema de Sard existe  $y' \in U \cap V_{\tilde{f}}$ . Logo pelo o caso anterior  $\deg(f, y) = \deg(f, y') = 0$ .  $\square$

**Proposição 10.2.3.** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  mapas suaves, homotópicos entre si e  $y \in V_f \cap V_g$ . Então  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .

*Proof.* Consideremos o cilindro  $Z = [0, 1] \times X$  com a orientação produto, cujo bordo  $\partial Z$  é a união de duas cópias de  $X$ ,  $\{0\} \times X$  munida da orientação oposta de  $X$  e  $\{1\} \times X$ , com a orientação de  $X$  (Exercício 6.18).

Suponhamos agora que  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  é uma homotopia suave entre  $f$  e  $g$ . Como vimos na demonstração da Proposição 10.1.3 uma tal homotopia suave existe sempre que os mapas  $f$  e  $g$  sejam homotópicos.

Se  $y \in V_f \cap V_g$  então  $y$  é também valor regular da restrição  $h|_{\partial Z} : \partial Z \rightarrow Y$ . Temos que  $\deg(h|_{\{1\} \times X}, y) = \deg(g, y)$  uma vez que  $h(1, x) = g(x)$  e  $\{1\} \times X$  tem a mesma orientação que  $X$ . Analogamente, temos  $\deg(h|_{\{0\} \times X}, y) = -\deg(f, y)$  porque  $h(0, x) = f(x)$  e  $\{0\} \times X$  tem a orientação oposta de  $X$ . Logo pelo teorema anterior  $0 = \deg(h|_{\partial Z}, y) = \deg(g, y) - \deg(f, y)$ , o que implica  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .  $\square$

Vamos agora concluir que o grau  $\deg(f, y)$  é independente do valor regular  $y$  de  $f$ , o que permite definir o *grau de  $f$* , denotado por  $\deg(f)$ , como valor constante de  $\deg(f, y)$  para  $y \in V_f$ .

**Proposição 10.2.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas e orientadas com a mesma dimensão,  $Y$  conexa. Dado um mapa suave  $f : X \rightarrow Y$ , a aplicação  $\deg(f, \cdot) : V_f \rightarrow \mathbb{Z}$  é constante.

*Proof.* Como  $Y$  é conexa, fixados  $y, y' \in V_f$  existe um difeomorfismo  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(Y)$  tal que  $\varphi(y) = y'$ . Segue que  $f$  é suavemente homotópica a  $\varphi \circ f$  e, pela Proposição 10.2.3,

$$\begin{aligned} \deg(f, y') &= \deg(\varphi \circ f, y') = \sum_{x \in \#(\varphi \circ f)^{-1}(y')} \text{sgn}(D\varphi_{f(x)} \circ Df_x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(Df_x) = \deg(f, y). \end{aligned}$$

Notamos que  $(\varphi \circ f)^{-1}(y') = f^{-1}(y)$  e  $\text{sgn}(D\varphi_y) = +1$ , porque  $\varphi$  preserva a orientação.  $\square$

Da Proposição 10.2.3 segue a invariância por homotopia: se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações suaves suavemente homotópicas então  $\deg(f) = \deg(g)$ .

**Proposição 10.2.5.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  variedades compactas orientadas sem bordo,  $Y$  e  $Z$  conexas e todas elas com a mesma dimensão. Dadas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  suaves,  $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ .

*Proof.* Sejam  $z \in V_{g \circ f}$  e  $g^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_l\}$ . Para cada  $i = 1, \dots, l$ , seja  $f^{-1}(y_i) = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}\}$ . Então

$$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = \cup_{i=1}^l \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}\}.$$

Como a composição  $D(g \circ f)_{x_{i,j}} : T_{x_{i,j}}X \rightarrow T_zZ$  é um isomorfismo segue que  $Df_{x_{i,j}} : T_{x_{i,j}}X \rightarrow T_{y_i}Y$  e  $Dg_{y_i} : T_{y_i}Y \rightarrow T_zZ$  são também isomorfismos, quaisquer que sejam  $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k_i$ . Assim, como  $z \in V_{g \circ f}$  temos  $z \in V_g$  e  $y_i \in V_f$ , para cada  $i = 1, \dots, l$ , donde  $\deg(g) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(Dg_{y_i})$  e  $\deg(f) = \sum_{j=1}^{k_i} \text{sgn}(Df_{x_{i,j}})$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ . Logo

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} \text{sgn}(D(g \circ f)_{x_{i,j}}) \\ &= \sum_{i=1}^l \text{sgn}(Dg_{y_i}) \sum_{j=1}^{k_i} \text{sgn}(Df_{x_{i,j}}) \\ &= \deg(f) \sum_{i=1}^l \text{sgn}(Dg_{y_i}) = \deg(g) \deg(f). \end{aligned}$$

□

Vejamos agora alguns exemplos e aplicações.

**Exemplo 10.2.1.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo entre variedades orientadas compactas e conexas. Se  $f$  preserva a orientação então  $\deg(f) = 1$ , e se  $f$  inverte a orientação então  $\deg(f) = -1$ . Em particular  $\deg(\text{id}_X) = 1$ .*

**Exemplo 10.2.2.** *Qualquer mapa não sobrejectivo  $f : X \rightarrow Y$  tem grau zero,  $\deg(f) = 0$ , porque os valores  $y \in Y \setminus f(X) \subset V_f$  não têm pré-imagens.*

**Exemplo 10.2.3.** *Dada  $A \in \text{GL}(n+1)$ , o difeomorfismo  $F_A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $F_A(x) := \frac{Ax}{\|Ax\|}$ , satisfaz  $\deg(F_A) = \text{sgn}(\det A)$  (Exercício 6.20).*

Seja  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a esfera de Riemann, que podemos identificar com  $\mathbb{S}^2$  via projecção estereográfica. Todo o mapa polinomial  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0,$$

com grau  $n \geq 1$ , é uma aplicação própria porque

$$p(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty.$$

Logo  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  estende-se a um mapa contínuo  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  tal que  $\bar{p}(\infty) = \infty$ . Além de contínua a extensão  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  é um mapa analítico. A aplicação  $\phi: (\dot{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\dot{\mathbb{C}}, 0)$ ,  $\phi(z) := z^{-1}$  é um automorfismo involutivo de  $\dot{\mathbb{C}}$  que pode ser visto como uma carta da esfera de Riemann no ponto  $\infty$ . O representante de  $\bar{p}$  nesta carta, que é dado por

$$\tilde{p}(z) := (\phi \circ \bar{p} \circ \phi)(z) = \frac{z^n}{1 + a_{n-1}z + \dots + a_0 z^n},$$

é um mapa analítico em  $z = 0$ .

**Proposição 10.2.6.** O mapa  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  tem grau de Brouwer  $\deg(\bar{p}) = n$ .

*Proof.* Dado  $y \in \mathbb{C}$  valor regular de  $\bar{p}$ , as pré-imagens de  $y$  são os zeros simples da equação polinomial  $p(z) - y = 0$  (de grau  $n$ ) pelo que  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  tem exactamente  $n$  pré-imagens. Seja  $z \in p^{-1}(y)$  um ponto regular de  $\bar{p}$ . A derivada  $D\bar{p}_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D\bar{p}_z v = p'(z)v$ , é uma aplicação conforme que em particular preserva a orientação, i.e.,  $\text{sgn}(Dp_z) = +1$ . Logo  $\deg(\bar{p}) = \#\bar{p}^{-1}(y) = n$ .

Alternativamente,  $\deg(\bar{p}) = n$  porque o mapa polinomial  $\bar{p}_0(z) = z^n$  é homotópico a  $\bar{p}(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  através da homotopia  $\bar{p}_t(z) := z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Assim  $\deg(\bar{p}) = \deg(\bar{p}_0) = n$  porque 1 é um valor regular de  $\bar{p}_0$  cujas  $n$  pré-imagens são as  $n$ -ésimas raízes da unidade.  $\square$

O Teorema Fundamental da Álgebra é um corolário fácil da Proposição 10.2.6.

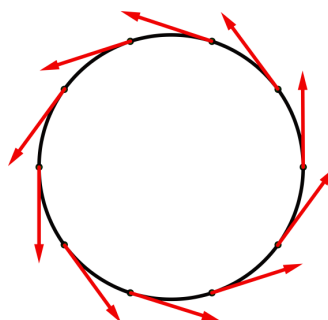
**Teorema 10.2.1.** Todo o polinómio de grau  $n \geq 1$  e coeficientes em  $\mathbb{C}$  tem pelo menos uma raiz em  $\mathbb{C}$ .

*Proof.* Seja  $p(z)$  um polinómio de grau  $n \geq 1$ . Então o mapa  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  tem grau  $n \neq 0$ , pelo que  $\bar{p}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  tem de ser sobrejectiva. Logo existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(z_0) = 0$ .  $\square$

Vamos chamar *mapa antípoda* à aplicação  $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $A(x) := -x$ . Notamos que  $A = F_{-I}$  é o automorfismo da esfera induzido pela matriz  $-I$ , e em particular o seu grau é  $\deg(A) = \text{sgn}(\det(-I)) = (-1)^{n+1}$ . Logo, se  $n$  é par então  $A$  não é homotópico à identidade. A recíproca desta implicação também é válida como iremos ver em seguida.

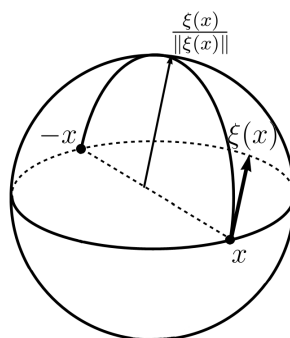
O teorema seguinte é também conhecido como o *Teorema da esfera des-penteada*, onde ‘pentear a esfera’ significa encontrar um campo de vectores suave  $\xi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  sem ‘cabelos em pé’, i.e., tal que  $\xi(x) \notin T_x \mathbb{S}^\perp$  para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . Tomando a componente tangente  $\xi^T \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$  de um tal ‘penteado’ vemos que a possibilidade de pentear a esfera equivale à existência dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$  sem singularidades.

A esfera  $\mathbb{S}^1$  pode ‘ser penteada’ conforme se pode ver na figura 10.4.

Figure 10.4: Penteado da esfera  $\mathbb{S}^1$ 

**Teorema 10.2.2.** Dado um inteiro  $n \geq 1$  são equivalentes:

- (a) A esfera  $\mathbb{S}^n$  admite um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$  sem singularidades.
- (b) O mapa antípoda  $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é homotópico à identidade.
- (c)  $n$  é ímpar.

Figure 10.5: Homotopia entre  $A$  e  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ 

*Proof.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Se existir  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$  sem singularidades podemos definir uma homotopia  $h: [0, 1] \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  entre  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  e o mapa antípoda  $A$  por

$$h(t, x) = \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|} .$$

Logo  $A$  é homotópico a  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) Se  $A$  é homotópico a  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  então

$$(-1)^{n+1} = \deg(A) = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1 ,$$

e portanto que  $n$  é ímpar.

(c)  $\Rightarrow$  (a) Se  $n = 2k - 1$  é ímpar

$$\xi(x_1, \dots, x_{2k}) := (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

é um campo sem singularidades em  $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$ .  $\square$

### 10.3 Exercícios

**Ex 10.1.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo entre duas variedades compactas conexas e orientadas. Mostre que  $\deg(f) = \text{sgn}(f)$ . Conclua que  $f$  não é homotópica a uma aplicação constante. Se  $f$  for apenas um difeomorfismo local, continuará válida esta igualdade?

**Ex 10.2.** Mostre que  $\text{Dif}_0^\infty(X)$  é um subgrupo de  $\text{Dif}^\infty(X)$ .

**Ex 10.3.** Seja  $X$  uma variedade orientável. Mostre que todo o difeomorfismo  $f \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  preserva a orientação.

**Ex 10.4.** Seja  $X$  uma variedade. Mostre que a relação  $x \sim y$  se existir  $\varphi \in \text{Dif}_0^\infty(X)$  tal que  $\varphi(x) = y$ , é uma relação de equivalência.

**Ex 10.5.** Sejam  $f, g : X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  aplicações contínuas. Mostre que se para todo  $x \in X^n$ ,  $\|f(x) - g(x)\| < 2$  então  $f$  e  $g$  são homotópicas, respectivamente suavemente homotópicas se  $f$  e  $g$  forem suaves.

**Sugestão:** Veja a figura 10.6.

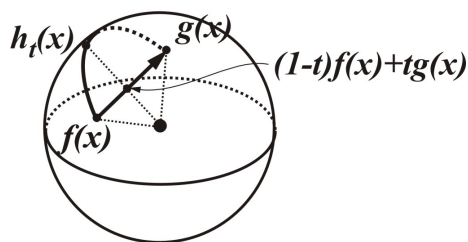


Figure 10.6: Homotopia entre  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$

**Ex 10.6.** Mostre que se  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$  é um mapa suave não sobrejectivo então é  $f$  homotópico a uma aplicação constante.

**Ex 10.7.** Seja  $f : X^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  contínua. Mostre que se  $m < n$  então  $f$  é homotópica a uma aplicação constante.

**Ex 10.8.** Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma aplicação contínua com  $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ . Mostre que então  $f$  tem pelo menos um ponto fixo.

**Sugestão:** Se  $f$  não tem pontos fixos então, pelo Exercício 10.5, é homotópico ao mapa  $A : x \mapsto -x$ .

**Ex 10.9.** Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  contínua com  $\deg_2(f) = 1$ . Mostre que então  $f$  leva algum par de pontos antípodos noutro par de pontos antípodos, i.e. existe  $p \in \mathbb{S}^n$  tal que  $f(-p) = -f(p)$ .

**Sugestão:** Se  $f(-x) \neq -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^n$  então, pelo Exercício 10.5,  $f(x)$  é homotópica à função par  $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{\|f(x)+f(-x)\|}$ .

**Ex 10.10.** Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  um mapa suave e par, i.e.,  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . Mostre que

- (a)  $\deg_2(f) = 0$ .
- (b)  $\deg(f) = 0$  se  $n$  é par.

**Ex 10.11.** Seja  $X^n$  uma variedade compacta, orientada, sem bordo,  $n \geq 2$ . Mostre que se existe  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  com  $\deg(f) = 1$  então  $X$  é simplesmente conexa.

O exercício seguinte mostra que o grau módulo 2, e o grau de Brouwer, podem ser estendidos a mapas contínuos.

**Ex 10.12.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas sem bordo, e  $f : X \rightarrow Y$  um mapa contínuo homotópico a mapas  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  suaves. Mostre que

- (a)  $\deg_2(f_1) = \deg_2(f_2)$ ,
- (b)  $\deg(f_1) = \deg(f_2)$ , se  $X$  e  $Y$  estiverem orientadas.

Seja  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  a projecção canónica  $\pi(x) := e^{2\pi ix}$ . Dado  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  contínua, chama-se *levantamento de  $f$*  a qualquer mapa contínuo  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ .

**Ex 10.13.** Dado um mapa  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  contínuo mostre que se  $x_0 \in \mathbb{R}$  for tal que  $\pi(x_0) = f(1, 0)$ :

- (a) Existe um único levantamento  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  tal que  $\tilde{f}(0) = x_0$ .
- (b) O levantamento  $\tilde{f}$  é suave se  $f$  o for.
- (c) Sendo  $m = \deg(f)$ ,  $\tilde{f}$  satisfaz  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + m$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



**Ex 10.14.** Mostre que dois mapas suaves  $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  têm o mesmo grau se e somente se são suavemente homotópicos.

**Sugestão:** Obtenha a homotopia entre  $f$  e  $g$  por combinação convexa entre os respectivos levantamentos  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$ .

**Ex 10.15.** Mostre que a existência de um campo contínuo sem singularidades na esfera  $\mathbb{S}^n$  equivale à existência de um campo suave  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{S}^n)$  sem singularidades.

Chama-se *transformação racional* a uma função  $f : \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  que se exprima como quociente de dois polinômios não nulos

$$f(z) := \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

com coeficientes  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ .

**Ex 10.16.** Mostre que a transformação racional  $f(z)$  determina um mapa suave da esfera de Riemann  $\dot{\mathbb{C}}$  nela própria com grau igual a  $\max\{n, m\}$ .

Chama-se *transformação de Möbius* a um mapa  $f : \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  que se exprima como quociente de dois polinômios não nulos de grau  $\leq 1$

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  satisfazendo  $ad - bc \neq 0$ .

**Ex 10.17.** Mostre que as transformações de Möbius formam um grupo de difeomorfismos da esfera de Riemann  $\dot{\mathbb{C}}$  com grau igual a 1.

Chamam-se *circunferências* da esfera de Riemann  $\dot{\mathbb{C}}$  às rectas e circunferências no plano complexo. O nome justifica-se porque as circunferências de  $\dot{\mathbb{C}}$  correspondem de facto às circunferências de  $\mathbb{S}^2$  via projecção estereográfica  $p : \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $p(z) := \left( \frac{2\operatorname{Re}z}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$ .

**Ex 10.18.** As transformações de Möbius transformam circunferências de  $\dot{\mathbb{C}}$  em circunferências de  $\dot{\mathbb{C}}$ .

**Sugestão:** Toda a transformação de Möbius é composição de transformações de Möbius da forma  $z \mapsto az$ ,  $z \mapsto z + b$  e  $z \mapsto z^{-1}$ .

**Ex 10.19.** Mostre que para todo o inteiro  $k \in \mathbb{Z}$  existe um mapa suave  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que  $\deg(f) = k$ .

**Ex 10.20.** Mostre que para todo o inteiro  $k \in \mathbb{Z}$  existe um mapa suave  $f: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que  $\deg(f) = k$ .

**Sugestão:** Use o Exercício 10.19 para reduzir o problema ao caso  $k = 1$ . Fixe um  $n$ -disco  $D \subset X^n$  (subvariedade difeomorfa a  $\mathbb{D}^n$ ) e um ponto  $p \in \mathbb{S}^n$ . Considere um mapa  $f: D \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que  $f \equiv p$  em  $\partial D$ ,  $f|_{\text{int}(D)}: \text{int}(D) \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$  seja um homeomorfismo e estenda-o a um mapa contínuo  $f: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que  $f(x) = p$  para todo  $x \in X^n \setminus D$ .

**Ex 10.21.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas de dimensão  $n$ . Assuma que  $X$  é conexa e simplesmente conexa, e que  $Y$  admite um espaço de recobrimento universal  $\tilde{Y}$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que toda a aplicação suave  $f: X \rightarrow Y$  é homotópica a uma função constante, e em particular que  $\deg(f) = 0$ .

**Sugestão:** Considere um levantamento  $\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{Y}$  do mapa  $f: X \rightarrow Y$  relativo a uma aplicação de recobrimento  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$  (Proposição 7.5.3).

**Ex 10.22.** Mostre que todo o mapa suave  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ , com  $n \geq 2$ , tem grau 0.

**Sugestão:** Exercício 10.21.

Chama-se *levantamento* dum mapa  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  a qualquer mapa contínuo  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ , onde  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  representa a projecção canónica.

**Ex 10.23.** Dado um mapa  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  contínuo mostre que se  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$  forem tais que  $p(y_0) = f(p(x_0))$ :

- Existe um único levantamento  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $f$  tal que  $\tilde{f}(x_0) = y_0$ .
- O levantamento  $\tilde{f}$  é suave se  $f$  o for.
- Existe uma matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  tal que  $\tilde{f}(x + k) - \tilde{f}(x) = Ak$ , quaisquer que sejam  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $k \in \mathbb{Z}^n$ .
- A matriz em (c) representa o morfismo  $\pi(f): \pi(\mathbb{T}^n, x) \rightarrow \pi(\mathbb{T}^n, f(x))$  relativamente às bases canónicas dos grupos  $\pi(\mathbb{T}^n, x) \simeq \mathbb{Z}^n$ .
- A matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  em (c) é tal que  $\deg(f) = \det A$ .
- Dois mapas  $f, g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  são homotópicos sse admitirem levantamentos  $\tilde{f}, \tilde{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que

$$\tilde{f}(x + k) - \tilde{f}(x) = Ak = \tilde{g}(x + k) - \tilde{g}(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ , com  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ .

## Chapter 11

# Teorema de Poincaré-Hopf

O Teorema de Poincaré-Hopf estabelece uma fórmula que relaciona a característica de Euler duma variedade compacta com a soma dos índices das singularidades dum campo de vectores definido nessa variedade. Este teorema foi demonstrado por H. Poincaré para superfícies, e depois de alguns resultados parciais de L. Brouwer e J. Hadamard foi demonstrado por Heinz Hopf em 1926.

### 11.1 Índice duma singularidade

Começamos por introduzir e trabalhar o conceito de índice duma singularidade para campos vectoriais definidos em abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Adiante mostramos a invariância do índice por mudança de coordenadas, e só então estendemos o conceito de índice a campos vectoriais definidos em variedades. Como veremos, a Proposição 10.2.2 do capítulo anterior desempenha um papel ubíquo na prova do Teorema de Poincaré-Hopf.

Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(U)$  um campo de vectores, ao qual associamos o mapa  $\varphi_\xi: U \setminus \xi^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  definido por

$$\varphi_\xi(x) := \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}.$$

Seja  $Z^n \subset U$  uma variedade compacta e com bordo, de dimensão  $n$ , tal que o campo  $\xi$  não se anule ao longo do bordo  $\partial Z$ . Designaremos por

$$\deg(\varphi_\xi, Z)$$

o grau do mapa restringido  $\varphi_\xi|_{\partial Z}: \partial Z \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Nesta definição a esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  é orientada como bordo do disco  $\mathbb{D}^n$ , enquanto  $\partial Z$  é orientada como bordo de  $Z$ . Tanto  $Z^n$  como  $\mathbb{D}^n$  recebem a orientação canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 11.1.1.** Seja  $Z^n \subset U$  uma variedade compacta e com bordo, de dimensão  $n$ , tal que  $\xi \neq 0$  em  $Z$ . Então  $\deg(\varphi_\xi, Z) = 0$ .

*Proof.* Por hipótese  $\varphi_\xi: Z^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  é um mapa suave. A conclusão segue da Proposição 10.2.2.  $\square$

Dada uma singularidade isolada  $p \in U$ ,  $\xi(p) = 0$ , chamamos *índice* do campo  $\xi$  na singularidade  $p$  ao grau de Brouwer

$$\text{Ind}_p(\xi) := \text{deg}(\varphi_\xi, D_\varepsilon(p)),$$

onde  $D_\varepsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - p\| \leq \varepsilon\}$  é um disco de raio suficientemente pequeno de modo a isolar a singularidade  $p$ , i.e., tal que  $D_\varepsilon(p) \cap \xi^{-1}(0) = \{p\}$ .

Para justificar a independência do raio  $\varepsilon > 0$  escolhido consideremos  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$  tais que  $D_{\varepsilon'}(p) \cap \xi^{-1}(0) = \{p\}$ . Como  $Z = D_{\varepsilon'}(p) \setminus \text{int}(D_\varepsilon(p))$  é um anel sem singularidades de  $\xi$ , pela Proposição 11.1.1 temos  $0 = \text{deg}(\varphi_\xi, Z) = \text{deg}(\varphi_\xi, D_{\varepsilon'}(p)) - \text{deg}(\varphi_\xi, D_\varepsilon(p))$ . Logo  $\text{deg}(\varphi_\xi, D_{\varepsilon'}(p)) = \text{deg}(\varphi_\xi, D_\varepsilon(p))$ , o que mostra que o índice em  $p$  é independente do raio  $\varepsilon$  escolhido.

A figura seguinte ilustra alguns exemplos de singularidades de campos vectoriais em  $\mathbb{R}^2$  com índices 2, 1 e  $-1$ . O Exercício 11.1 tem exemplos de singularidades com outros índices.

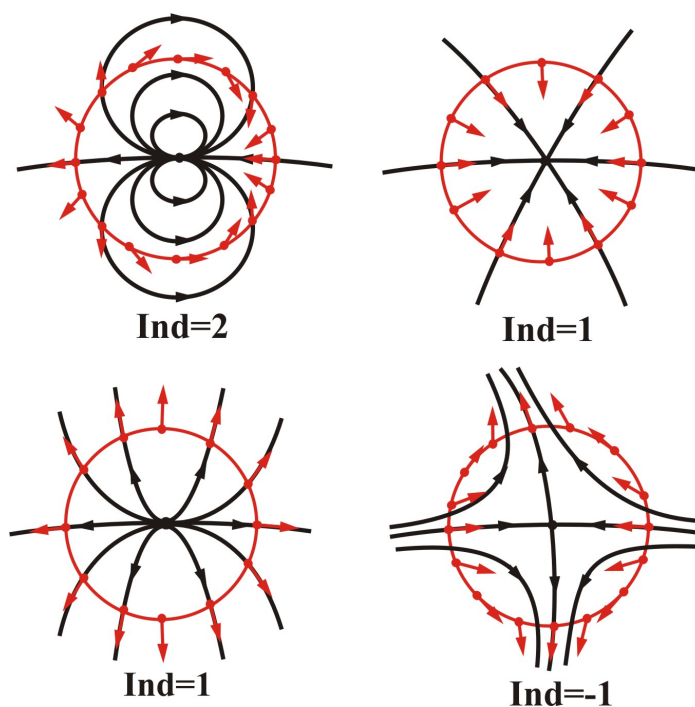


Figure 11.1: Índices de algumas singularidades em  $\mathbb{R}^2$

**Proposição 11.1.2.** Seja  $p \in U$  uma singularidade não degenerada dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(U)$ . Então  $\text{Ind}_p(\xi) = \text{sgn}(\det D\xi_p) = \pm 1$ .

*Proof.* Supondo que  $p = 0$  é uma singularidade não degenerada,  $A = D\xi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo. Pelo desenvolvimento de Taylor na origem temos  $\xi(x) = Ax + O(\|x\|^2)$  quando  $x \rightarrow 0$ . Seja  $D$  um pequeno disco centrado na origem, e consideremos o mapa  $\varphi_A : \partial D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  definido por  $\varphi_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ . Quando o raio do disco  $D$  é pequeno as aplicações  $\varphi_\xi|_{\partial D}$  e  $\varphi_A$  estão próximas uma da outra. De facto, tomando constantes positivas  $C$  e  $c$  tais que  $\|\xi(x) - Ax\| \leq C\|x\|^2$ ,  $\|Ax\| \geq c\|x\|$  e  $\|\xi(x)\| \geq c\|x\|$  para todo  $x \in D$ , e supondo por exemplo que  $\|\xi(x)\| \leq \|Ax\|$  (o caso contrário é análogo, bastando trocar os papéis de  $\xi(x)$  e  $Ax$ ) temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_\xi(x) - \varphi_A(x)\| &= \left\| \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\leq \frac{\|\xi(x) - Ax\|}{\|\xi(x)\|} + \left\| \frac{Ax}{\|\xi(x)\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\leq \frac{\|\xi(x) - Ax\|}{\|\xi(x)\|} + \left\| \frac{\|Ax\| - \|\xi(x)\|}{\|\xi(x)\| \|Ax\|} \right\| \|Ax\| \\ &\leq 2 \frac{\|\xi(x) - Ax\|}{\min\{\|\xi(x)\|, \|Ax\|\}} \leq \frac{2C}{c} \|x\|. \end{aligned}$$

Logo, pelo Exercício 10.5,  $\varphi_\xi|_{\partial D}$  e  $\varphi_A$  são homotópicas sempre que o raio  $r$  do disco  $D$  satisfizer  $\frac{2C}{c}r < 2$ . Por outro lado, como  $g : \partial D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $g(x) := x/\|x\|$ , é um difeomorfismo que preserva a orientação e  $\varphi_A = F_A \circ g$  onde  $F_A : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $F_A(x) := Ax/\|Ax\|$ , pelo Exercício 6.20, segue que  $\text{sgn}(\varphi_A) = \text{sgn}(F_A) = \text{sgn}(\det A)$ . Logo,

$$\text{Ind}_0(\xi) = \text{deg}(\varphi_\xi) = \text{deg}(\varphi_A) = \text{sgn}(\varphi_A) = \text{sgn}(\det A).$$

□

**Proposição 11.1.3.** Seja  $p \in U$  um ponto crítico não degenerado duma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Os índices de  $p$  como ponto crítico de  $f$  e como singularidade de  $\nabla f$  satisfazem  $\text{Ind}_p(\nabla f) = (-1)^{\text{ind}(f,p)}$ .

*Proof.* Supondo que  $p = 0$  é um ponto crítico não degenerado da função  $f$ , a matriz Hessiana  $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$  é não singular. Pelo desenvolvimento de Taylor na origem temos  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + O(\|x\|^3)$  e  $\nabla f(x) = Ax + O(\|x\|^2)$  quando  $x \rightarrow 0$ . Sejam  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$  os valores próprios de  $A$ . O determinante de  $A$  é o produto dos valores próprios de  $A$ , i.e.,  $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ . O índice de  $A$  é o número  $\text{ind}(A) = k$  de valores próprios negativos. Desta caracterização resulta que  $\text{sgn}(\det A) = (-1)^{\text{ind}(A)}$ . Logo,

$$\text{Ind}_p(\nabla f) = \text{sgn}(\det A) = (-1)^{\text{ind}(A)} = (-1)^{\text{ind}(f,p)}.$$

□

O resultado seguinte estabelece a estabilidade do índice dum campo de vectores numa singularidade.

**Proposição 11.1.4** (Estabilidade Local do Índice). Sejam  $p \in U$  uma singularidade isolada dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(U)$  e  $\varepsilon$  um número positivo tal que  $D_\varepsilon(p) \cap \xi^{-1}(0) = \{p\}$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que para todo o campo de Morse  $\tilde{\xi} \in \mathcal{X}^\infty(U)$  com  $\|\xi - \tilde{\xi}\|_\infty < \delta$ ,

$$\text{Ind}_p(\xi) = \sum_{x \in \tilde{\xi}^{-1}(0) \cap D_\varepsilon(p)} \text{sgn}(\det D\tilde{\xi}_x).$$

*Proof.* Seja  $D = D_\varepsilon(p)$  e fixemos  $\delta > 0$  tal que

$$\min_{x \in \partial D} \|\xi(x)\| > 2\delta.$$

Se  $\tilde{\xi} \in \mathcal{X}^\infty(U)$  é um campo de Morse tal que  $\|\xi - \tilde{\xi}\|_\infty < \delta$  então

$$\|\tilde{\xi}(x)\| \geq \|\xi(x)\| - \|\xi(x) - \tilde{\xi}(x)\| > 2\delta - \delta = \delta,$$

para  $x \in \partial D$ , e repetindo a conta efectuada na demonstração da Proposição 11.1.2 obtemos para todo  $x \in \partial D$ ,

$$\|\varphi_\xi(x) - \varphi_{\tilde{\xi}}(x)\| \leq 2 \frac{\|\xi(x) - \tilde{\xi}(x)\|}{\min\{\|\xi(x)\|, \|\tilde{\xi}(x)\|\}} < \frac{2\delta}{\delta} = 2.$$

Logo, pelo Exercício 10.5, os mapas  $\varphi_\xi|_{\partial D}$  e  $\varphi_{\tilde{\xi}}|_{\partial D}$  são homotópicos.

Seja  $\{p_1, \dots, p_m\} = D \cap \tilde{\xi}^{-1}(0)$ . O campo  $\tilde{\xi}$  não tem singularidades em  $\partial D$  porque  $\|\tilde{\xi}(x)\| > \delta$  para todo  $x \in \partial D$ . Sejam  $D_1, \dots, D_m$  pequenos discos fechados respectivamente centrados no pontos  $p_1, \dots, p_m$ , disjuntos dois a dois e contidos no interior de  $D$ . Então  $Z = D \setminus (\text{int}(D_1) \cup \dots \cup \text{int}(D_m))$  é uma variedade com bordo tal que  $\partial Z = \partial D \cup \partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_m$ . Cada componente interior do bordo  $\partial D_i$  recebe de  $Z$  a orientação oposta à que lhe é induzida pelo disco  $D_i$ . Pela Proposição 11.1.1 segue então que

$$0 = \deg(\varphi_{\tilde{\xi}}, Z) = \deg(\varphi_{\tilde{\xi}}, D) - \sum_{i=1}^m \deg(\varphi_{\tilde{\xi}} D_i),$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Ind}_p(\xi) &= \deg(\varphi_\xi, D) = \deg(\varphi_{\tilde{\xi}}, D) = \sum_{i=1}^m \deg(\varphi_{\tilde{\xi}}, D_i) \\ &= \sum_{x \in D \cap \tilde{\xi}^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\tilde{\xi}) = \sum_{x \in D \cap \tilde{\xi}^{-1}(0)} \text{sgn}(\det D\tilde{\xi}_x). \end{aligned}$$

□

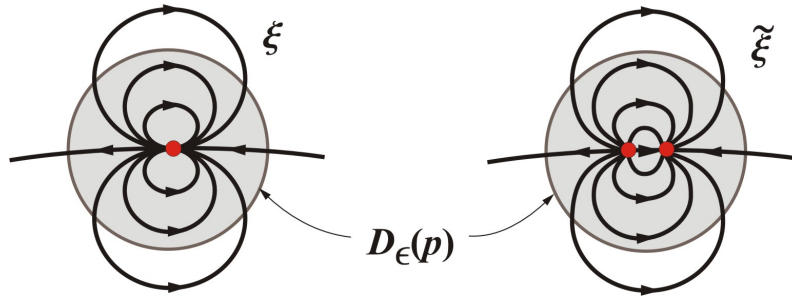


Figure 11.2: Uma singularidade degenerada de índice 2 que se desdobra em duas singularidades não degeneradas, de índice 1

Uma singularidade degenerada  $p \in U$  dum campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(U)$  pode ser vista como o resultado de colapsar várias singularidades não degeneradas. Perturbando  $\xi$ , obtemos um campo de Morse  $\tilde{\xi} \in \mathcal{X}^\infty(U)$ , perto de  $\xi$ , no qual a singularidade  $p$  se desdobra em várias singularidades não degeneradas  $p_1, \dots, p_m$ . O teorema acima diz-nos que o índice  $\text{Ind}_p(\xi)$  ‘guarda memória’ do somatório dos índices das singularidades  $p_i$  de  $\tilde{\xi}$  colapsadas na singularidade  $p$  de  $\xi$ .

Vejamos agora que o índice dum campo vectorial numa singularidade é invariante por mudanças de coordenadas.

**Proposição 11.1.5.** Seja  $\phi : U \rightarrow V$  um difeomorfismo entre abertos  $U$  e  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(U)$  é um campo com uma singularidade isolada  $p \in U$  então  $\text{Ind}_{\phi(p)}(\phi_*\xi) = \text{Ind}_p(\xi)$ .

*Proof.* Consideremos o campo  $\eta = \phi_*\xi \in \mathcal{X}^\infty(V)$  que tem uma singularidade isolada no ponto  $q = \phi(p)$ . Fixemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $D_\varepsilon(p) \cap \xi^{-1}(0) = \{p\}$  e  $D_\varepsilon(q) \cap \eta^{-1}(0) = \{q\}$ . Seja  $\tilde{\xi}$  um campo de Morse próximo de  $\xi$  satisfazendo as hipóteses da Proposição 11.1.4 e consideremos o campo de Morse  $\tilde{\eta} := \phi_*\tilde{\xi}$ . Por definição de ‘push-forward’ temos  $\tilde{\eta}(\phi(x)) = D\phi_x(\tilde{\xi}(x))$  para todo  $x \in U$ . Derivando esta relação numa singularidade  $\tilde{\xi}(x) = 0$  obtemos  $D\tilde{\eta}_{\phi(x)} \circ D\phi_x = D\phi_x \circ D\tilde{\xi}_x$ , o que implica que  $D\tilde{\eta}_{\phi(x)} = D\phi_x \circ D\tilde{\xi}_x \circ (D\phi_x)^{-1}$ . Logo  $\det(D\tilde{\eta}_{\phi(p)}) = \det(D\tilde{\xi}_p)$ , e em particular  $\text{Ind}_{\phi(p)}(\tilde{\eta}) = \text{Ind}_p(\tilde{\xi})$ . Como o difeomorfismo  $\phi$  estabelece uma correspondência bijectiva entre as singularidades de  $\tilde{\xi}$  em  $D_\varepsilon(p)$  e as singularidades de  $\tilde{\eta}$  em  $D_\varepsilon(q)$ , temos

$$\text{Ind}_q(\tilde{\eta}) = \sum_{x \in D_\varepsilon(q) \cap \tilde{\eta}^{-1}(0)} \text{sgn}(\det D\tilde{\eta}_x) = \sum_{x \in D_\varepsilon(p) \cap \tilde{\xi}^{-1}(0)} \text{sgn}(\det D\tilde{\xi}_x) = \text{Ind}_p(\tilde{\xi}).$$

□

Seja  $X$  uma variedade e  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo de vectores com uma singularidade isolada no ponto  $p \in X$ .

Define-se o *índice de  $\xi$  em  $p$* , como sendo o índice na origem dum representante  $\phi_*\xi$  de  $\xi$  relativo a uma carta local  $\phi : (X, p) \simeq (\mathbb{R}^n, 0)$ . Pela Proposição anterior esta definição é independente da carta local escolhida.

## 11.2 Teorema de Poincaré-Hopf

Antes de enunciar o Teorema de Poincaré-Hopf necessitamos de mais um conceito. Seja  $X$  uma variedade compacta com bordo e  $\nu \in \mathcal{X}_\perp^\infty(\partial X)$  o seu campo normal exterior a  $X$  (Teorema 4.1.1).

Dizemos que um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  *aponta para fora de  $X$*  se tivermos  $\xi(x) \cdot \nu(x) > 0$  para todo  $x \in \partial X$ .

**Teorema 11.2.1** (Poincaré-Hopf). Seja  $X$  uma variedade compacta com bordo e  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo com singularidades isoladas que aponte para fora de  $X$ . Então

$$\chi(X) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi).$$

Dada uma variedade compacta com bordo  $X^n \subset \mathbb{R}^n$  com campo normal exterior  $\nu \in \mathcal{X}_\perp^\infty(\partial X)$ , chama-se *mapa de Gauss* da hipersuperfície  $\partial X$  à aplicação suave  $N : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , definida por  $N(x) := \nu(x)$ , qualquer que seja  $x \in \partial X$ .

**Lema 11.2.1** (Hopf). Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade compacta com bordo de dimensão  $n$ . Dado um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  com singularidades isoladas que aponte para fora de  $X$ ,

$$\text{deg}(N) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi).$$

onde  $\text{deg}(N)$  representa o grau do mapa de Gauss  $N : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ .

*Proof.* Seja  $\{p_1, \dots, p_m\} = \xi^{-1}(0)$  o conjunto das singularidades do campo  $\xi$ . Como  $\varphi_\xi(x) \cdot N(x) > 0$ , para todo  $x \in \partial X$ , pelo o Exercício 10.5 a restrição  $\varphi_\xi : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  é homotópica ao mapa de Gauss  $N : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Logo  $\text{deg}(N) = \text{deg}(\varphi_\xi|_{\partial X})$ .

Sejam  $D_1, \dots, D_m$  pequenos discos fechados centrados respectivamente no pontos  $p_1, \dots, p_m$ , disjuntos dois a dois e contidos em  $X \setminus \partial X$ . Então  $Z = X \setminus (\text{int}(D_1) \cup \dots \cup \text{int}(D_m))$  é uma variedade com bordo tal que  $\partial Z = \partial X \cup \partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_m$ . Cada componente  $\partial D_i$  do bordo  $\partial X$  recebe de



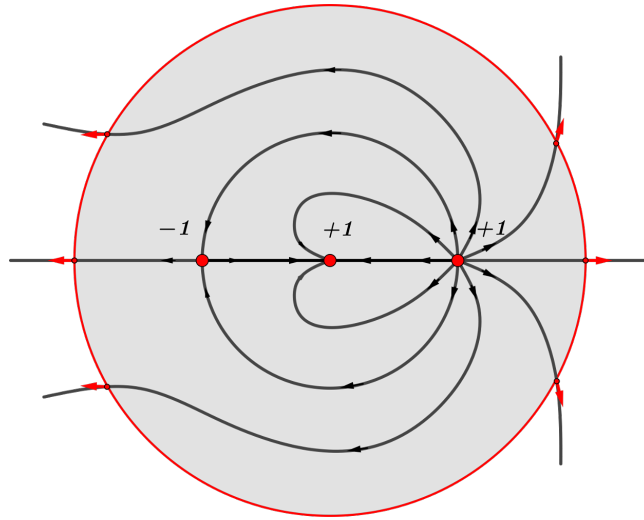


Figure 11.3: Um campo com três singularidades no disco

$Z$  a orientação oposta à que lhe é induzida pelo disco  $D_i$ . Pela Proposição 11.1.1 segue então que

$$0 = \deg(\varphi_\xi, Z) = \deg(\varphi_\xi, X) - \sum_{i=1}^m \deg(\varphi_\xi, D_i),$$

donde

$$\deg(N) = \deg(\varphi_\xi|_{\partial X}) = \deg(\varphi_\xi, X) = \sum_{i=1}^m \deg(\varphi_\xi, D_i) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi).$$

□

**Lema 11.2.2.** Dada uma variedade compacta com bordo  $X$ , existe uma função suave  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (1)  $f^{-1}(0) = \partial X$ ,
- (2)  $f \leq 0$  em  $X$ ,
- (3)  $0$  é um valor regular de  $f$ , e
- (4)  $f$  é uma função de Morse.

*Proof.* Sejam  $\nu \in \mathcal{X}_\perp^\infty(\partial X)$  o campo normal exterior de  $X$  ao longo de  $\partial X$ ,  $V_\epsilon(\partial X)$  uma vizinhança tubular de  $\partial X$  e  $\pi : V_\epsilon(\partial X) \rightarrow \partial X$  a projecção associada. Definimos  $f : X \cap V_\epsilon(\partial X) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) := (x - \pi(x)) \cdot \nu(\pi(x)).$$

Dado  $x \in X \cap V_\varepsilon(\partial X)$ , os vectores  $\nu(\pi(x))$  e  $x - \pi(x)$  são colineares e apontam em sentidos opostos. Logo  $f(x) = -\|x - \pi(x)\| \leq 0$  porque  $\|\nu(\pi(x))\| = 1$ . Este facto prova o item (2). Por outro lado  $f(x) = 0$  equivale a  $x = \pi(x)$ , ou seja  $x \in \partial X$ , o que prova (1).

Se  $x \in \partial X = f^{-1}(0)$ , e  $u \in \mathbb{R}^N$  temos

$$Df_x(u) = (u - D\nu_x(u)) \cdot \nu(x) = u \cdot \nu(x)$$

pelo que 0 é valor regular de  $f$ . O item (3) fica assim estabelecido.

Deixamos como exercício (Exercício 11.9) a verificação de que é possível estender  $f$  a uma função suave  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as propriedades (1)-(3) e que seja constante fora da vizinhança  $V_\varepsilon(\partial X)$ .

Diminuindo  $\varepsilon$  podemos supor que  $\|\nabla f\| \geq \varepsilon$  em  $X \cap V_\varepsilon(\partial X)$ . Pela Proposição 5.4.2 existe uma função de Morse  $\hat{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in X$  se tem  $\|\nabla f(x) - \nabla \hat{f}(x)\| < \varepsilon/2$ . Com mais uma perturbação, sem alterar o gradiente, podemos supor que  $\hat{f} \leq f$ .

Seja agora  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave não crescente tal que

$$\begin{cases} \beta(t) = 1 & \text{se } t \leq -\varepsilon/2 \\ \beta(t) = 0 & \text{se } t \geq -\varepsilon/4 \end{cases} .$$

Definindo

$$\tilde{f}(x) := (1 - \beta(f(x)))f(x) + \beta(f(x))\hat{f}(x)$$

temos  $\tilde{f}(x) = f(x)$  em  $X \cap V_{\varepsilon/4}(\partial X)$ , pelo que a função  $\tilde{f}$  satisfaz as propriedades (1)-(3). Temos também  $\tilde{f}(x) = \hat{f}(x)$  em  $X \setminus V_{\varepsilon/2}(\partial X)$ , pelo que os pontos críticos de  $\tilde{f}$  em  $X \setminus V_\varepsilon(\partial X)$  são todos não degenerados.

Finalmente, temos

$$\nabla \tilde{f} = (1 - \beta + \beta'(\hat{f} - f))\nabla f + \beta \nabla \hat{f}$$

com  $\beta = \beta \circ f$  e  $\beta' = \beta' \circ f$ . Como  $\beta'(\hat{f} - f) \geq 0$ , em  $X \cap V_\varepsilon(\partial X)$  vale

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{f}\| &\geq (1 + \beta'(\hat{f} - f))\|\nabla f\| - \beta\|\nabla \hat{f} - \nabla f\| \\ &\geq (1 + \beta'(\hat{f} - f))\varepsilon - \beta \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0, \end{aligned}$$

pelo que todos os pontos críticos de  $\tilde{f}$  estão em  $X \setminus V_\varepsilon(\partial X)$ . Logo  $\tilde{f}$  é uma função de Morse.  $\square$

*Demonstração do Teorema 11.2.1.* Dividimos a prova em três casos:

**1º Caso**  $X$  é uma variedade compacta com bordo de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n$ . Pelo Lema 11.2.1, o somatório  $\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi)$  é independente do campo

$\xi$ . Basta-nos agora dar um exemplo dum campo onde a soma dos índices seja igual à característica de Euler  $\chi(X)$ . Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  como no Lema 11.2.2, e consideremos o campo de Morse  $\xi = \nabla f$ . Da Teoria de Morse, corolários 1 e 2 da secção 9, temos  $\chi(X) = \sum_{k=0}^n c_k (-1)^k$ , onde  $c_k$  é o número de pontos críticos de índice  $k$  da função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Logo

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n c_k (-1)^k = \sum_{p \in \text{Crit}(f)} (-1)^{\text{ind}(f,p)} = \sum_{p \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_p(\xi),$$

onde a última igualdade segue da Proposição 11.1.3.

**2º Caso**  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  é uma variedade compacta sem bordo.

Sejam  $V_\varepsilon(X)$  uma vizinhança tubular de  $X$ , e  $\pi : V_\varepsilon(X) \rightarrow X$  a projecção associada (Teorema 4.3.1). A ideia neste caso é estender o campo  $\xi$  à vizinhança tubular  $V_\varepsilon(X)$  e reduzir a prova ao caso anterior. Definimos  $\tilde{\xi} : V_\varepsilon(X) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,

$$\tilde{\xi}(x) := \underbrace{x - \pi(x)}_{T_{\pi(x)}^\perp X} + \underbrace{\xi(\pi(x))}_{T_{\pi(x)} X}.$$

O bordo da vizinhança tubular  $V_\varepsilon(X)$  é o conjunto de nível da função suave  $h(x) = \text{dist}_X(x)^2$ ,  $\partial V_\varepsilon(X) = h^{-1}(\varepsilon^2)$ , pelo que o campo gradiente  $\nabla h(x) = 2(x - \pi(x))$  aponta para fora de  $V_\varepsilon(X)$  ao longo de  $\partial V_\varepsilon(X)$ . Como

$$\tilde{\xi}(x) \cdot \nabla h(x) = 2 \|x - \pi(x)\|^2 = 2\varepsilon^2 > 0,$$

vemos que o campo  $\tilde{\xi}$  também aponta para fora de  $V_\varepsilon(X)$  ao longo de  $\partial V_\varepsilon(X)$ . Os campos  $\xi$  e  $\tilde{\xi}$  têm as mesmas singularidades porque

$$\tilde{\xi}(p) = 0 \Leftrightarrow p = \pi(p) \text{ e } \xi(\pi(p)) = 0 \Leftrightarrow p \in X \text{ e } \xi(p) = 0.$$

Em particular todas as singularidades de  $\tilde{\xi}$  estão em  $X$ . Pelo Teorema 11.1.4 (estabilidade do índice local) podemos supor, substituindo se necessário  $\xi$  por um campo de Morse próximo, que todas as singularidades de  $\xi$  são não degeneradas. Vamos mostrar que os campos  $\xi$  e  $\tilde{\xi}$  têm os mesmos índices em cada singularidade  $p \in X$ . Numa singularidade temos  $\pi(p) = p$ , e as aplicações lineares  $D\pi_p : \mathbb{R}^N \rightarrow T_p X$  e  $\text{id} - D\pi_p : \mathbb{R}^N \rightarrow T_p^\perp X$  são projecções ortogonais. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} D\tilde{\xi}_p(u) &= u - D\pi_p(u) + D\xi_{\pi(p)} D\pi_p(u) \\ &= \underbrace{(\text{Id} - D\pi_p)(u)}_{\in T_p^\perp X} + \underbrace{D\xi_p D\pi_p(u)}_{\in T_p X}. \end{aligned}$$

Numa base ortonormada de  $\mathbb{R}^N$  em que os primeiros vectores formem uma base de  $T_p^\perp X$  e os últimos uma base de  $T_p X$ , a matriz Jacobiana de  $D\tilde{\xi}_p$  tem

a forma  $\begin{bmatrix} I & O \\ O & A \end{bmatrix}$ , onde  $A$  representa a matriz Jacobiana de  $D\xi_p : T_p X \rightarrow T_p X$  na base correspondente. Logo

$$\text{Ind}_p(\tilde{\xi}) = \text{sgn}(\det \begin{bmatrix} I & O \\ O & A \end{bmatrix}) = \text{sgn}(\det A) = \text{Ind}_p(\xi).$$

Finalmente, como  $X$  é um retracto por deformação de  $V_\varepsilon(X)$ , pelo caso anterior aplicado ao campo  $\tilde{\xi}$  temos

$$\chi(X) = \chi(V_\varepsilon(X)) = \sum_{x \in \tilde{\xi}^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\tilde{\xi}) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{Ind}_x(\xi).$$

**3º Caso** (Caso Geral)  $X$  é uma variedade compacta com bordo.

A prova do caso geral faz uso dum generalização do Teorema da vizinhança tubular (Teorema 4.3.1) para variedades compactas com bordo sendo, dificuldades técnicas à parte, análoga à do caso anterior.

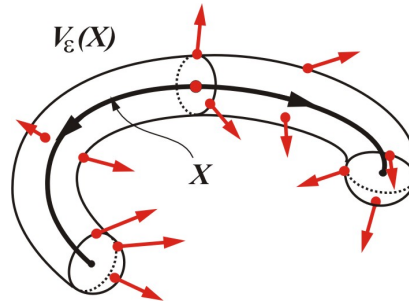


Figure 11.4: Vizinhança tubular dum variedade com bordo

Dada uma variedade compacta com bordo  $X \subset \mathbb{R}^N$ , e um número positivo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a  $\varepsilon$ -vizinhança

$$V_\varepsilon(X) := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}_X(x) \leq \varepsilon\}$$

é tal que existe um mapa contínuo  $\pi : V_\varepsilon(X) \rightarrow X$  satisfazendo  $\text{dist}_X(x) = \|x - \pi(x)\|$ . A função  $h : V_\varepsilon(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) := \text{dist}_X(x)^2$  é de classe  $C^1$  com gradiente  $\nabla h(x) = 2(x - \pi(x))$ . A vizinhança tubular  $V_\varepsilon(X)$  decompõem-se na união das duas regiões

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^\perp(X) &= \{x \in V_\varepsilon(X) : x - \pi(x) \in T_x^\perp X\} \\ V_\varepsilon^+(\partial X) &= \{x \in V_\varepsilon(X) : \pi(x) \in \partial X\}. \end{aligned}$$

A primeira destas duas regiões corresponde ao fecho topológico da vizinhança tubular da variedade aberta  $X \setminus \partial X$ , enquanto a segunda está contida na vizinhança tubular do bordo  $\partial X$ . Tanto o mapa  $\pi$  como a função  $h$  são

suaves no interior de cada uma destas regiões. A quebra de diferenciabilidade ocorre apenas ao longo da hiper-superfície  $\mathcal{H} := V_\varepsilon^\perp(X) \cap V_\varepsilon^+(\partial X)$  intersecção destas duas regiões.

Definimos do mesmo modo a extensão do campo  $\tilde{\xi} : V_\varepsilon(X) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,

$$\tilde{\xi}(x) := x - \pi(x) + \xi(\pi(x)).$$

Este campo é contínuo em  $V_\varepsilon(X)$  e de classe  $C^\infty$  em  $V_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{H}$ . Como  $\tilde{\xi} \neq 0$  em  $\mathcal{H}$  podemos aproximar  $\tilde{\xi}$  por um campo suave  $\hat{\xi} : V_\varepsilon(X) \rightarrow \mathbb{R}^N$  que, tal como  $\tilde{\xi}$  aponte para fora de  $V_\varepsilon(X)$  ao longo de  $\partial V_\varepsilon(X)$ , que tenha exactamente as mesmas singularidades que  $\tilde{\xi}$  e  $\xi$ , e finalmente que coincida com  $\tilde{\xi}$  numa vizinhança compacta destas singularidades. O teorema segue de aplicar o primeiro caso ao campo  $\hat{\xi}$ .  $\square$

### 11.3 Exercícios

**Ex 11.1.** As aplicações  $z \mapsto z^m$  e  $z \mapsto \bar{z}^m$  definem campos vectoriais em  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  com um zero isolado na origem. Mostre que os índices destes campos na origem são respectivamente  $m$  e  $-m$ .

**Ex 11.2.** Seja  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa com um zero em  $z_0 \in U$ . Mostre que, como campo vectorial em  $\mathcal{X}^\infty(U)$ , o índice de  $f$  na singularidade  $z_0$  é igual à ordem  $k$  do zero  $z_0$ . A ordem de  $z_0$  é, por definição, um inteiro  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$  com  $g(z_0) \neq 0$  e  $g(z)$  holomorfa em  $U$ .

**Ex 11.3.** Seja  $p(z) = az^2 + bz + c$  um polinómio de grau  $\leq 2$ . Mostre que

- (a)  $p$  induz um campo suave na esfera de Riemann  $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Sugestão :** Considere as cartas locais  $\phi_1 : (\dot{\mathbb{C}}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $\phi_1(z) = z$ , e  $\phi_2 : (\dot{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $\phi_2(z) = 1/z$ , e a transformação de coordenadas  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ . Sendo  $p(z)$  o representante dum campo na carta  $\phi_1$  calcule o respectivo representante na carta  $\phi_2$ .

- (b) Quando é que este campo tem uma singularidade no ponto  $\infty$ ?

- (c) Nas condições da alínea (b), qual o índice de  $p$  em  $\infty$ ?

- (d) Desenhe as singularidades e linhas de fluxo dos campos definidos pelos polinómios  $z^2 - 1$ ,  $z^2$ ,  $z$  e  $1$ .

**Sugestão:** Resolvendo as equações diferenciais  $z' = z^2$  e  $z' = z^2 - 1$  obtemos os fluxos  $\varphi^t(z) = \frac{z}{1-tz}$  e  $\psi^t(z) = \frac{(1-z)e^{2t} - (z+1)}{(z-1)e^{2t} - (z+1)}$  respectivamente. Pelo Exercício 10.18 podemos concluir que as trajectórias destes fluxos são segmentos de recta, semi-rectas ou arcos de circunferência.

**Ex 11.4.** Mostre que a esfera  $\mathbb{S}^{2k-1}$  admite um campo tangente sem singularidades.

**Sugestão :** Para  $k = 1$ , use o campo  $\xi(x, y) = (-y, x)$ .

**Ex 11.5.** Mostre que o  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$  admite um campo tangente sem singularidades.

**Ex 11.6.** Mostre que a esfera  $\mathbb{S}^{2k}$  não admite campos tangentes sem singularidades.

**Ex 11.7.** Sejam  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo de vetores tangente a uma variedade  $X$  de dimensão  $n$ , e  $p \in X$  uma singularidade isolada de  $\xi$ . Mostre que

$$\text{Ind}_p(-\xi) = (-1)^n \text{Ind}_p(\xi).$$

**Ex 11.8.** Considere o campo  $\xi(x, y) = (x^3 + x^2 - y^2, 2xy + y^3)$ ,  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

(a) Calcule as singularidades do campo  $\xi$ .

**Sugestão:** Todas as singularidades ficam sobre o eixo  $y = 0$ .

(b) Qual o grau de  $\varphi_\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $\varphi_\xi(x, y) = \xi(x, y) / \|\xi(x, y)\|$ , onde sobre  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ ?

**Sugestão:** Compare com o grau do mapa correspondente ao campo  $\eta(x, y) = (x^3, y^3)$ . Se necessitar pode também aumentar o raio de  $\Gamma$ .

(c) Quais os índices das singularidades encontradas?

**Sugestão:** De (b) infira qual a soma dos índices das singularidades no interior de  $\Gamma$ .

(c) É um campo de Morse  $\xi$ ?

(d) Se  $\tilde{\xi}$  for um campo de Morse perto de  $\xi$  tal que  $\deg(\varphi_{\tilde{\xi}}|_\Gamma) = \deg(\varphi_\xi|_\Gamma)$ , qual o número mínimo de singularidades que pode garantir para  $\tilde{\xi}$  no interior de  $\Gamma$ ? Quais os respectivos índices?

(e) Desenhe as singularidades e as trajectórias dum campo de Morse  $\tilde{\xi}$  nas condições da alínea anterior.

**Ex 11.9.** Sejam  $X$  uma variedade compacta com bordo,  $\varepsilon$  um número positivo tal que  $V_\varepsilon(\partial X)$  é uma vizinhança tubular de  $\partial X$ , e  $f : X \cap V_\varepsilon(X) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave tal que  $f = 0$  em  $\partial X$  e  $f = -\varepsilon$  em  $X \cap \partial V_\varepsilon(\partial X)$ . Mostre que existe uma função suave  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{f} = f$  em  $X \cap V_{\varepsilon/2}(\partial X)$  e que seja constante fora da vizinhança  $V_\varepsilon(\partial X)$ .

## Chapter 12

# Teorema de Jordan-Brouwer

Toda a curva simples fechada  $C \subset \mathbb{R}^2$  divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada, dita o *interior* de  $C$ , e outra ilimitada, chamada o *exterior* de  $C$ . Este é o conteúdo do clássico *Teorema da curva de Jordan*, demonstrado pelo matemático francês C. Jordan no fim do século XIX.

Neste capítulo estabelecemos a seguinte versão suave do *Teorema de separação de Jordan-Brouwer* que generaliza o teorema da curva de Jordan.

**Teorema 12.0.1.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma variedade compacta e conexa, sem bordo e de dimensão  $n$ . Então  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  tem exactamente duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada.

Além disso, a união de  $X$  com a componente conexa limitada de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  é uma variedade compacta com bordo igual a  $X$ .

**Corolário 12.0.1.** Toda a variedade compacta e conexa, sem bordo e de dimensão  $n$   $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é orientável.

*Proof.* Exercício 12.5. □

### 12.1 Componentes conexas

Nesta secção vamos supor que  $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma variedade compacta e conexa, sem bordo, de dimensão  $n$ .

**Proposição 12.1.1.** Sejam  $p \notin X$ ,  $x \in X$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então existe um caminho contínuo  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) \in U$ .

*Proof.* Ver exercício 12.3 e figura 12.3. □

**Corolário 12.1.1.** O complementar  $\mathbb{R}^n \setminus X$  tem no máximo duas componentes conexas.

*Proof.* Tomando um disco aberto  $U$ , suficientemente pequeno, centrado num ponto de  $X$ , o complementar  $U \setminus X$  tem exactamente duas componentes conexas. Pela proposição 12.1.1, cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus X$  contem uma das componentes de  $U \setminus X$ . Logo  $\mathbb{R}^n \setminus X$  tem no máximo duas componentes conexas.  $\square$

## 12.2 Winding numbers

Sejam  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo de dimensão  $n$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave. Dado  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(X)$ , definimos  $\varphi_{f,p}: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,

$$\varphi_{f,p}(x) := \frac{f(x) - p}{\|f(x) - p\|}.$$

Se  $X^n$  é uma variedade orientada, chama-se *winding number* (número de voltas) de  $f$  em torno de  $p$  ao grau  $W(f, p) := \deg(\varphi_{f,p})$ .

Mais geralmente, chama-se *winding number mod 2* (número de voltas mod 2) de  $f$  em torno de  $p$  ao grau  $W_2(f, p) := \deg_2(\varphi_{f,p})$ .

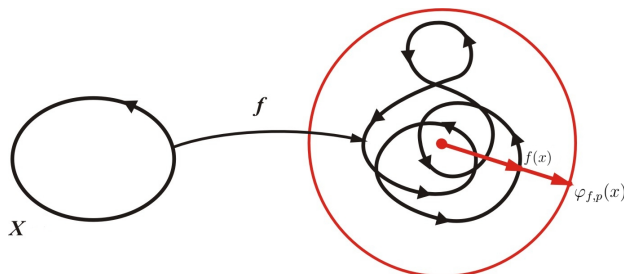


Figure 12.1: Número de voltas do mapa  $f$  em torno dum ponto.

**Proposição 12.2.1.** Seja  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo de dimensão  $n$  e  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave. Se  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n \setminus f(X)$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(X)$  então

- (a)  $W(f, p_0) = W(f, p_1)$ , se  $X^n$  estiver orientada.
- (b)  $W_2(f, p_0) = W_2(f, p_1)$ .



*Proof.* Os mapas  $\varphi_{f,p_0}, \varphi_{f,p_1}: X \rightarrow \mathbb{S}^n$  são homotópicos através da homotopia  $h: [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,

$$h(t, x) := \frac{f(x) - \gamma(t)}{\|f(x) - \gamma(t)\|},$$

onde  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$  designa um caminho que liga  $\gamma(0) = p_0$  a  $\gamma(1) = p_1$ .  $\square$

Dados  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $v \in \mathbb{S}^n$ , designemos por

$$\ell_{p,v} = \{p + tv : t \geq 0\}$$

a semirecta de origem  $p$  e direcção  $v$ .

**Proposição 12.2.2.** Sejam  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo, e  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave. Dados  $v \in \mathbb{S}^n$  e  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$ ,

$$\varphi_{f,p}^{-1}(v) = f^{-1}(\ell_{p,v}).$$

Além disso  $f \pitchfork \ell_{p,v}$  sse  $v$  é um valor regular de  $\varphi_{f,p}: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Em particular,  $f \pitchfork \ell_{p,v}$  para quase todo  $v \in \mathbb{S}^n$ .

*Proof.* Dados  $v \in \mathbb{S}^n$  e  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$ ,  $\frac{f(x)-p}{\|f(x)-p\|} = \varphi_{f,p}(x) = v$  se e somente se  $f(x) = p + \|f(x) - p\|v \in \ell_{p,v}$ .

Como  $\varphi_{f,p}$  é a composição de  $f$  com uma projecção radial, para cada  $u \in T_x X$  temos  $(D\varphi_{f,p})_x(u) = 0$  se e somente se  $Df_x(u)$  for colinear com  $v$  (ver exercício 12.4). Logo  $x \in X$  é um ponto crítico de  $\varphi_{f,p}$  se e somente se  $v \in Df_x(T_x X)$ , ou seja, se e somente se  $\ell_{p,v}$  não é transversal a  $Df_x(T_x X)$ . Isto mostra que  $v \in \mathbb{S}^n$  é um valor regular de  $\varphi_{f,p}$  se e somente se  $f \pitchfork \ell_{p,v}$ .

Pelo teorema 5.1.1 (Teorema de Sard) segue que  $f \pitchfork \ell_{p,v}$  para quase todo  $v \in \mathbb{S}^n$ .  $\square$

**Proposição 12.2.3.** Seja  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo e seja  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  suave. Dados  $v \in \mathbb{S}^n$  e  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$  tais que  $f \pitchfork \ell_{p,v}$ ,

- (a)  $W(f, p) = \sum_{x \in f^{-1}(\ell_{p,v})} \text{sgn}(D\varphi_{f,p}(x))$  se  $X^n$  estiver orientada,
- (b)  $W_2(f, p) = \#f^{-1}(\ell_{p,v}) \pmod{2}$ .

*Proof.* Como  $W(f, p) = \text{deg}(\varphi_{f,p})$  e  $W_2(f, p) = \text{deg}_2(\varphi_{f,p})$ , usando a proposição 12.2.2, a conclusão desta proposição segue da definição do grau mod 2 (secção 10.1) e do grau de Brouwer (secção 10.2).  $\square$

**Corolário 12.2.1.** Seja  $X^n$  uma variedade compacta sem bordo e seja  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  suave. Sejam  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$  e  $v = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \in \mathbb{S}^n$  tais que  $X \pitchfork \ell_{p_0,v}$ .

$$(a) \quad W(f, p_0) = W(f, p_1) + \sum_{x \in f^{-1}[p_0, p_1]} \operatorname{sgn}(D\varphi_{f,p}(x)).$$

$$(b) \quad W_2(f, p_0) = W_2(f, p_1) + \#f^{-1}([p, p']) \pmod{2}.$$

*Proof.* Como  $\ell_{p_0, v} = \ell_{p_1, v} \cup [p_0, p_1]$  temos a seguinte decomposição em união disjunta  $f^{-1}(\ell_{p_0, v}) = f^{-1}(\ell_{p_1, v}) \cup f^{-1}([p_0, p_1])$ , que reduz a conclusão deste corolário à proposição 12.2.3.  $\square$

### 12.3 Prova do Teorema de Jordan-Brouwer

Seja  $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma variedade compacta e conexa, sem bordo, de dimensão  $n$ . Vamos aplicar os conceitos da secção anterior à aplicação de inclusão  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f(x) := x$ , escrevendo  $W_2(X, p)$  em vez de  $W_2(f, p)$ , e escrevendo  $\varphi_{X, p}$  em vez de  $\varphi_{f, p}$ . Definimos

$$U_0 = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X : W_2(X, p) = 0\}$$

$$U_1 = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X : W_2(X, p) = 1\}.$$

A família  $\{X, U_0, U_1\}$  constitui uma partição de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Os conjuntos  $U_0$  e  $U_1$  são abertos (porquê?). Resta-nos ver que são não vazios.

**Proposição 12.3.1.** Os conjuntos abertos  $U_0$  e  $U_1$  são conexos não vazios.

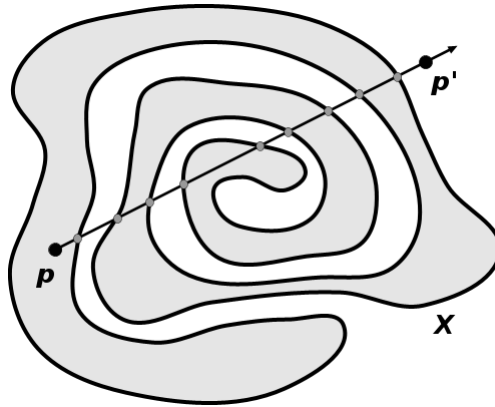
*Proof.* Fixemos  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  e comecemos por justificar que o conjunto imagem  $\varphi_{X, p}(X) \subset \mathbb{S}^n$  tem interior não vazio na esfera  $\mathbb{S}^n$ . De facto, escolhendo  $x_0 \in X$  tal que  $\|x_0 - p\| = \min_{x \in X} \|x - p\|$  temos que o vector  $v_0 = \varphi_{X, p}(x_0)$  é perpendicular a  $T_{x_0}X$ . Logo  $(D\varphi_{X, p})_{x_0}: T_{x_0}X^n \rightarrow T_{v_0}\mathbb{S}^n$  é um isomorfismo, e pelo teorema 1.3.1 (da função inversa)  $v_0 = \varphi_{X, p}(x_0)$  é interior a  $\varphi_{X, p}(X)$ .

Pelo teorema 5.1.1 (teorema de Sard) existe um valor regular  $v \in \mathbb{S}^n$  do mapa  $\varphi_{X, p}: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  em  $\operatorname{int}(\varphi_{X, p}(X))$ . Pela proposição 12.2.2 a semi-recta  $\ell_{p, v}$  intersecta transversalmente a hipersuperfície  $X^n$ . Além disso, como  $v \in \varphi_{X, p}(X)$ , essa intersecção é não vazia. Pelo corolário 12.2.1, ao longo da semi-recta  $\ell_{p, v}$  o *winding number*  $W_2(X, x)$  muda de sinal (pelo menos uma vez) nos pontos em que  $\ell_{p, v}$  intersecta  $X^n$ . Logo  $U_0$  e  $U_1$  são ambos não vazios.

Pelo corolário 12.1.1, os abertos  $U_0$  e  $U_1$  têm de ser conexos.  $\square$

A proposição 12.3.1 dá-nos um critério simples para verificar se um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  é interior ou exterior a  $X$ . Um ponto  $p \notin X$  é interior a  $X$  se e somente se para uma (qualquer) semi-recta  $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$  com origem  $p$  e transversal a  $X$ ,  $\#(\ell \cap X)$  for ímpar.

**Proposição 12.3.2.** O conjunto  $U_1$  é limitado. O conjunto  $U_0$  é ilimitado (o seu complementar é limitado).

Figure 12.2:  $p \in \text{int}(X)$ ?

*Proof.* Seja  $B(0, R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma bola contendo a variedade compacta  $X^n$ . Se  $p \notin B(0, R)$  tomando  $v = \frac{p}{\|p\|} \in \mathbb{S}^n$  temos  $\ell_{p,v} \cap X = \emptyset$ , o que implica  $W_2(X, p) = 0$ , ou seja  $p \in U_0$ .

Logo  $U_1 \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus U_0 \subset B(0, R)$  é um conjunto limitado.  $\square$

Deixamos ao cuidado do leitor a conclusão da prova do teorema 12.0.1 (exercício 12.6).

## 12.4 Exercícios

**Ex 12.1.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um disco centrado em  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave tal que  $f: D \rightarrow f(D)$  seja um difeomorfismo. Mostre que

- $W(f|_{\partial D}, f(q)) = \text{sgn}(Df)$ , considerando em  $\partial D$  a orientação induzida como bordo de  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .
- $W_2(f|_{\partial D}, f(q)) = 1$ .

**Sugestão:** Se  $D$  tiver um raio suficientemente pequeno então  $\varphi_{f,p}: \partial D \rightarrow \mathbb{S}^n$  é um difeomorfismo, que preserva a orientação sse  $f$  preserva a orientação.

O exercício seguinte relaciona o winding number  $W(f, p)$  de um mapa  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  com o “grau de Brouwer” de uma extensão  $\tilde{f}: Z^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  de  $f$  a uma variedade compacta  $Z^{n+1}$  com bordo igual a  $X^n$ . Note que este “grau de Brouwer” está relacionado mas não corresponde exactamente à definição de grau dada no capítulo 10.

**Ex 12.2.** Seja  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave e  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X^n)$ . Suponha que  $X^n = \partial Z^{n+1}$  é o bordo duma variedade compacta  $Z^{n+1}$  e a função  $f$  admite uma extensão suave  $\tilde{f}: Z^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Mostre que

- (a) Caso  $Z^{n+1}$  seja orientada, considerando em  $X^n$  a orientação induzida como bordo de  $Z^{n+1}$  temos  $W(f, p) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(p)} \text{sgn}(Df_x)$ .
- (b) Em qualquer caso,  $W_2(f, p) = \#\tilde{f}^{-1}(p) \pmod{2}$ .

**Sugestão:** Use o exercício 12.1 e as proposições 10.2.2 e 10.1.2 nas alíneas (a) e (b) respectivamente.

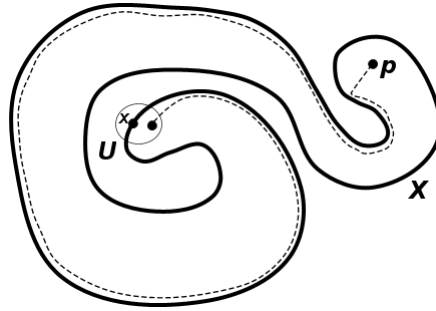


Figure 12.3: Caminho sugerido (exercício 12.3)

**Ex 12.3.** Sejam  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma variedade compacta e conexa sem bordo,  $p \notin X$ ,  $x \in X$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Mostre que  $p$  pode ser conectado a um ponto de  $U$  por um caminho que não intersekte  $X$ .

**Sugestão:** Escolha o ponto  $q \in X$  que minimiza a distância a  $p$  e considere uma vizinhança tubular  $V_\varepsilon(X)$  de  $X$ . Ligue  $p$  a um ponto  $q'$  perto de  $q$  em  $V_\varepsilon(X)$ , para depois ligar  $q'$  a  $U$  por um caminho em  $V_\varepsilon(X)$  (figura 12.3).

**Ex 12.4.** Sejam  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave e  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ . Mostre que para todo  $x \in X$  e  $u \in T_x X$ ,

$$(D\varphi_{f,p})_x(u) = \frac{Df_x(u) - (v \cdot Df_x(u))v}{\|f(x) - p\|},$$

onde  $v = \varphi_{f,p}(x) \in \mathbb{S}^n$ .

**Ex 12.5.** Mostre que toda a variedade  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  compacta, sem bordo de dimensão  $n$  é orientável.

**Sugestão:** Use o Teorema de Jordan Brouwer (Teorema 12.0.1).

**Ex 12.6.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma variedade compacta e conexa, sem bordo e de dimensão  $n$ . Mostre que

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in X \text{ ou } W_2(X, x) = 1\}$$

é uma variedade compacta com bordo tal que  $\partial Z = X$ .

**Sugestão:** Dado  $p \in X^n$ , tome um difeomorfismo local  $\phi : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, p)$  que induza um difeomorfismo local  $\phi : (\{0\} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (X^n, p)$ . Veja então que, a menos de trocar o sinal da primeira componente,  $\phi$  induz um difeomorfismo local  $\phi : (H^{n+1}, 0) \rightarrow (Z^{n+1}, p)$ .

Seja  $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave numa variedade compacta orientável e sem bordo  $X^n$  de dimensão  $n$ . Duas componentes conexas  $C$  e  $C'$  de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$  dizem-se *adjacentes* se existir um segmento de recta  $s$  ligando um ponto de  $C$  a um ponto de  $C'$  tal que  $s \subset C \cup f(X) \cup C'$ ,  $f \pitchfork s$  e  $\#f^{-1}(s) = 1$ .

Dadas duas componentes conexas  $C$  e  $C'$  de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$  vamos associar um sinal  $\text{sgn}(C, C')$  ao par ordenado  $(C, C')$ . Seja  $v \in \mathbb{S}^n$  um vector unitário com a direcção e sentido do segmento de recta orientado  $s$  associado à adjacência entre  $C$  e  $C'$  e seja  $\{x\} = f^{-1}(s)$ . Por transversalidade vale a seguinte decomposição em soma directa

$$\mathbb{R}^{n+1} = \langle v \rangle \oplus Df_x(T_x X),$$

estando os três espaços desta decomposição naturalmente orientados: o espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  munido da orientação canónica,  $\langle v \rangle$  com a orientação determinada pelo vector  $v$  e  $Df_x(T_x X)$  com a orientação induzida por  $T_x X$ . Definimos  $\text{sgn}(C, C') := +1$  se estas três orientações forem compatíveis (ver secção 6.1). Caso contrário,  $\text{sgn}(C, C') := -1$ .

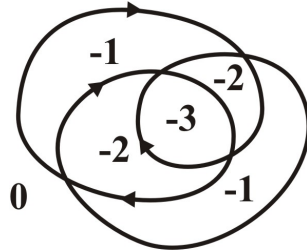


Figure 12.4: Winding numbers

Os *winding numbers* na figura 12.4 podem ser calculados usando a fórmula do exercício seguinte.

**Ex 12.7.** Seja  $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um mapa suave numa variedade compacta, orientável e sem bordo  $X^n$  de dimensão  $n$ . Mostre que sendo  $C$  e  $C'$  componentes adjacentes de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$ , vale a seguinte relação entre os winding numbers nas componentes  $C$  e  $C'$

$$W(f, C) = W(f, C') + \text{sgn}(C, C').$$

**Sugestão:** Suponha que  $s = [p_0, p_1]$ ,  $v = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|}$ , com  $p_0 \in C$ ,  $p_1 \in C'$  e  $f^{-1}(s) = \{x\}$ . Aplique então o corolário 12.2.1 (a), mostrando que  $\text{sgn}(C, C') = \text{sgn}(D\varphi_{f,p_0}(x))$ .

## Chapter 13

# Teorema de Gauss-Bonnet

O Teorema de Gauss-Bonnet versa sobre superfícies Riemannianas compactas e orientadas  $X$ , relacionando a curvatura total (integral da curvatura Gaussiana  $K$ ) com a característica de Euler-Poincaré  $\chi(X)$  dessa superfície:

$$\int_X K dA = 2\pi \chi(X).$$

### 13.1 Grau, volume e orientação em $\mathbb{R}^n$

Seja  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  a  $\sigma$ -álgebra dos Borelianos de  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{B}$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Uma *medida de Borel* em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  que além de ser  $\sigma$ -aditiva, i.e.,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

qualquer que seja a família numerável  $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{B}$  de conjuntos  $A_n$  disjuntos dois a dois, satisfaz  $\mu(K) < +\infty$  para todo o compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

Dizemos que uma medida de Borel  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  é *invariante por translações* se  $\mu(x + A) = \mu(A)$ , quaisquer que sejam  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \mathcal{B}$ .

A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ , que designaremos por  $\text{vol}_n$ , é um exemplo duma medida de Borel em  $\mathbb{R}^n$  invariante por translações. A menos dum factor positivo,  $\text{vol}_n$  é a única medida de Borel invariante por translações.

**Proposição 13.1.1.** Se  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  é uma medida de Borel invariante por translações então  $\mu = \mu([0, 1]^n) \text{vol}_n$ .

*Proof.* A prova desta proposição baseia-se no facto de qualquer Boreliano  $A \in \mathcal{B}$  poder ser aproximado por uma união (finita ou numerável) de cubos disjuntos dois a dois da forma  $x + [0, \frac{1}{p}]^n$  com  $p \in \mathbb{N}$ . Esta proposição é um caso particular do Teorema de Haar, sobre a existência e unicidade de medidas de Borel invariantes por translação em grupos topológicos localmente compactos [6, Chapter XI].  $\square$

Dada uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  definimos o *paralelepípedo*

$$P(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{j=1}^n t_j v_j : 0 \leq t_j \leq 1, \forall 1 \leq j \leq n \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Proposição 13.1.2.** A medida de Lebesgue  $\text{vol}_n$  satisfaz as seguintes propriedades sobre a classe dos paralelepípedos.

- (a)  $\text{vol}_n(P(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)) = |\lambda| \text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n))$ , qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_n)) = \text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n))$ , qualquer que seja  $h = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$  combinação linear dos vectores  $v_j$  com  $j \neq i$ .

*Proof.* Exercício 13.1. □

Fixada uma orientação  $\sigma: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \{-1, 1\}$  em  $\mathbb{R}^n$ , chamaremos *forma de volume orientado* à função  $V_\sigma: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V_\sigma(v_1, \dots, v_n) := \sigma(v_1, \dots, v_n) \text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_n)).$$

**Proposição 13.1.3.** Qualquer que seja a orientação  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^n$ , a forma de volume orientado  $V_\sigma: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma multilinear alternada. Em particular  $V_\sigma = \pm \det$ .

*Proof.* Exercício 13.2. □

Toda a matriz  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  determina uma aplicação linear  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A proposição seguinte identifica  $c(M) := |\det M|$  como factor pelo qual a acção de  $M$  multiplica os volumes. Chamaremos a este número  $c(M)$  o *coeficiente de dilatação volúmica* da matriz (aplicação linear)  $M$ .

**Proposição 13.1.4.** Dada  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , para todo o Boreliano  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$\text{vol}_n(MA) = |\det M| \text{vol}_n(A).$$

*Proof.* Se  $M$  não for invertível a imagem  $MA$  está contida num hiperplano, e ambos os lados da igualdade acima são iguais a 0.

Suponhamos agora que  $M \in \text{GL}_n$  é invertível. Pela proposição 13.1.3, qualquer que seja  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned} |\det M| &= |\det(M e_1, \dots, M e_n)| = \text{vol}_n(P(M e_1, \dots, M e_n)) \\ &= \text{vol}_n(M P(e_1, \dots, e_n)) = \text{vol}_n(M [0, 1]^n), \end{aligned}$$

onde  $(e_1, \dots, e_n)$  designa a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Consideremos em seguida a medida  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $\mu(A) := \text{vol}_n(MA)$ , que se verifica ser uma medida de Borel invariante por translações.



Pela proposição 13.1.1, temos

$$\mu = \mu([0, 1]^n) \text{vol}_n = \text{vol}_n(M [0, 1]^n) \text{vol}_n = |\det M| \text{vol}_n,$$

como queríamos concluir.  $\square$

**Proposição 13.1.5.** Seja  $V_\sigma$  uma forma de volume orientado associada a uma orientação  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ,

$$V_\sigma(M v_1, \dots, M v_n) = (\det M) V_\sigma(v_1, \dots, v_n).$$

*Proof.* A igualdade dos valores absolutos segue da proposição 13.1.4. Vimos no capítulo 6 que o sinal  $\text{sgn}(M)$  do automorfismo  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz, qualquer que seja a base  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\sigma(M v_1, \dots, M v_n) = \text{sgn}(M) \sigma(v_1, \dots, v_n).$$

A igualdade entre os sinais da relação enunciada segue desta última porque  $\text{sgn}(M) = \text{sgn}(\det M)$ .  $\square$

**Corolário 13.1.1.** Quaisquer que sejam  $M, M' \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\det(M' M) = (\det M') (\det M).$$

*Proof.* Segue da proposição 13.1.5.  $\square$

Enunciamos a seguir o Teorema de mudança de variável, cujo conteúdo é uma consequência natural da proposição 13.1.4.

**Teorema 13.1.1.** Sejam  $U$  e  $V$  abertos de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: U \rightarrow V$  um difeomorfismo. Então

(a) Para todo o Boreliano  $A \subset V$ ,

$$\text{vol}_n(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} |\det Df_x| dx$$

(b) Para toda a função  $h: V \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mensurável e limitada,

$$\int_V h(y) dy = \int_U h(\phi(x)) |\det Df_x| dx$$

*Proof.* Ver por exemplo [13].  $\square$

## 13.2 Volumes Euclidianos

Seja  $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \sigma)$  um espaço Euclidiano orientado de dimensão  $n$ .

Definimos  $\text{vol}_E: \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, +\infty]$  como a única medida de Borel, sobre a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(E)$  dos Borelianos de  $E$ , que é invariante por translação e satisfaz  $\text{vol}_E(P(v_1, \dots, v_n)) = 1$  qualquer que seja a base ortonormada  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E)$ . Definimos a *forma de volume orientado*  $V_E: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V_E(v_1, \dots, v_n) := \sigma(v_1, \dots, v_n) \text{vol}_E(P(v_1, \dots, v_n)).$$

Todo o espaço Euclidiano de dimensão  $n$  é isométrico a  $\mathbb{R}^n$ , pelo que as proposições 13.1.1, 13.1.3 e 13.1.4 permanecem válidas neste contexto.

Sejam agora  $E$  e  $E'$  espaços Euclidianos orientados de dimensão  $n$ .

Dada uma aplicação linear  $L: E \rightarrow E'$  definimos o seu coeficiente de dilatação volúmica como

$$c(L) := \frac{\text{vol}_{E'}(L(A))}{\text{vol}_E(A)}$$

qualquer que seja o Boreliano  $A \in \mathcal{B}(E)$ .

Dada uma aplicação linear  $L: E \rightarrow E'$ , chama-se *adjunta* de  $L$  à única aplicação linear  $L^*: E' \rightarrow E$  tal que quaisquer que sejam  $u \in E$  e  $v \in E'$ ,

$$\langle L(u), v \rangle' = \langle u, L^*(v) \rangle.$$

**Proposição 13.2.1.** Dada  $L: E \rightarrow E'$  linear,

$$c(L) = \sqrt{\det(L^* \circ L)}.$$

*Proof.* Vamos supor que  $L: E \rightarrow E'$  é um isomorfismo.

O operador  $L^* \circ L: E \rightarrow E$  é um automorfismo auto-adjunto e positivo, pelo que existe uma base ortonormada  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(E)$  tal que

$$(L^* \circ L)(v_i) = \lambda_i^2 v_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Esta relação implica que  $\lambda_i = \|L(v_i)\|$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Estes números são conhecidas como os *valores singulares* da aplicação  $L$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$  temos

$$(L \circ L^*)(L(v_i)) = L((L^* \circ L)(v_i)) = \lambda_i^2 L(v_i),$$

o que mostra que as imagens  $L(v_i)$  são vectores próprios do operador  $L \circ L^* \in \mathcal{L}(E')$ . Tal como  $L^* \circ L$ , este operador é também auto-adjunto, pelo que as imagens  $L(v_i)$  são ortogonais duas a duas. Logo definindo  $v_i^* = \frac{L(v_i)}{\|L(v_i)\|}$ ,  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  é uma base ortonormada dos espaço  $E'$  tal que

$$L(v_i) = \lambda_i v_i^*, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Estas relações implicam que

$$\begin{aligned} c(L) &= \text{vol}_{E'}(LP(v_1, \dots, v_n)) = \text{vol}_{E'}(P(L(v_1), \dots, L(v_n))) \\ &= \text{vol}_{E'}(P(\lambda_1 v_1^*, \dots, \lambda_n v_n^*)) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \text{vol}_{E'}(P(v_1^*, \dots, v_n^*)) \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2} = \sqrt{\det(L^* \circ L)}. \end{aligned}$$

Moral: o coeficiente de dilatação volúmica é o produto dos valores singulares de  $L$ , que por sua vez é capturado pelo determinante em causa.  $\square$

Dada uma aplicação linear  $L: E \rightarrow E'$  entre espaços Euclidianos orientados de dimensão  $n$ , definimos o seu *determinante* como sendo

$$\det L := \text{sgn}(L) c(L),$$

onde o isomorfismo  $L$  tem sinal  $\text{sgn}(L) = +1$  se  $L$  preserva a orientação, e tem sinal  $\text{sgn}(L) = -1$  se  $L$  inverte a orientação.

**Proposição 13.2.2.** Sejam  $E$  e  $E'$  espaços Euclidianos orientados de dimensão  $n$ . Dada uma aplicação linear  $L: E \rightarrow E'$  e vectores  $v_1, \dots, v_n \in E$ ,

$$V_{E'}(L(v_1), \dots, L(v_n)) = (\det L) V_E(v_1, \dots, v_n).$$

*Proof.* Como  $|\det L| = c(L)$ , a igualdade dos valores absolutos segue da própria definição de coeficiente de dilatação volúmica. Vimos no capítulo 6 que o sinal  $\text{sgn}(L)$  do isomorfismo  $L: E \rightarrow E'$  satisfaz, qualquer que seja a base  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\sigma'(L(v_1), \dots, L(v_n)) = \text{sgn}(L) \sigma(v_1, \dots, v_n),$$

onde  $\sigma$  e  $\sigma'$  representam as orientações de  $E$  e de  $E'$  respectivamente. A igualdade entre os sinais da relação enunciada segue desta última porque  $\text{sgn}(L)$  é, por definição, o sinal de  $\det L$ .  $\square$

**Corolário 13.2.1.** Sejam  $E, E', E''$  espaços Euclidianos orientados de dimensão  $n$ . Dadas aplicações lineares  $L: E \rightarrow E'$  e  $L': E' \rightarrow E''$ ,

$$\det(L' \circ L) = (\det L') (\det L).$$

*Proof.* Segue da proposição 13.2.2.  $\square$

### 13.3 Volume Riemanniano

Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade. Designamos por  $\mathcal{B}(X)$  a  $\sigma$ -álgebra dos Borelianos de  $X$ . Vamos agora introduzir o *volume Riemanniano* de  $X$  na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(X)$ .

Para cada parametrização  $\phi: U \rightarrow X$  da variedade  $X$  e cada Boreliano  $A \subset \phi(U)$  definimos

$$\text{vol}_X^\phi(A) := \int_{\phi^{-1}(A)} c(D\phi_x) dx.$$

Esta expressão determina uma medida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\phi(U))$ . A proposição seguinte mostra a consistência destas medidas.

**Proposição 13.3.1.** Dadas duas parametrizações  $\phi: U \rightarrow X$  e  $\psi: V \rightarrow X$  da variedade  $X$ , para todo o Boreliano  $A \subset \phi(U) \cap \psi(V)$ ,

$$\text{vol}_X^\phi(A) = \text{vol}_X^\psi(A).$$

*Proof.* Como  $A \subset \phi(U) \cap \psi(V)$ , o difeomorfismo de mudança de coordenadas  $\psi^{-1} \circ \phi: \phi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\phi(U))$  transforma  $\phi^{-1}(A)$  em  $\psi^{-1}(A)$ . Logo, efectuando a mudança de variável  $y = (\psi^{-1} \circ \phi)(x)$  obtemos pelo teorema 13.1.1

$$\begin{aligned} \text{vol}_X^\psi(A) &= \int_{\psi^{-1}(A)} c(D\psi_y) dy \\ &= \int_{\phi^{-1}(A)} c(D\psi_{(\psi^{-1} \circ \phi)(x)}) |\det D(\psi^{-1} \circ \phi)_x| dx \\ &= \int_{\phi^{-1}(A)} c(D\psi_{\psi^{-1}(\phi(x))}) c(D\psi_{\phi(x)}^{-1}) c(D\phi_x) dx \\ &= \int_{\phi^{-1}(A)} c(D\phi_x) dx = \text{vol}_X^\phi(A). \end{aligned}$$

Usámos acima a multiplicatividade do coeficiente de dilatação volúmica,

$$c(D\psi_{\psi^{-1}(\phi(x))}) c(D\psi_{\phi(x)}^{-1}) = c(D(\psi \circ \psi^{-1})_{\phi(x)}) = c(\text{id}_{T_{\phi(x)}X}) = 1,$$

que segue por exemplo da proposição 13.2.1. □

**Proposição 13.3.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade. Existe uma única medida de Borel  $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  tal que para toda a parametrização  $\phi: U \rightarrow X$  de  $X$  e para todo o Boreliano  $A \subset \phi(U)$ ,  $\mu(A) = \text{vol}_X^\phi(A)$ .

*Proof.* Seja  $\{\phi_n: U_n \rightarrow X\}_{n \geq 1}$  uma família de parametrizações da variedade  $X$  cujas imagens  $\phi_n(U_n)$  tenham volume finito, i.e.,  $\text{vol}_X^{\phi_n}(\phi_n(U_n)) < +\infty$  e cubram  $X$ , i.e.,  $X = \cup_{n \geq 1} \phi_n(U_n)$ .

Definindo  $X_1 := \phi_1(U_1)$  e recursivamente  $X_j := \phi_j(U_j) \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} X_i)$ , para  $j \geq 2$ , obtemos uma partição de  $X$  em Borelianos  $X_j \subset \phi_j(U_j)$  disjuntos dois a dois.

Vejam primeiro a unicidade. Sejam  $\mu, \nu: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  duas medidas satisfazendo a condição enunciada. Dado  $A \in \mathcal{B}(X)$ , como para cada  $j \geq 1$ ,  $\mu(A \cap X_j) = \text{vol}_X^{\phi_j}(A \cap X_j) = \nu(A \cap X_j)$ , temos

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap X_j) = \nu(A).$$

Para provar a existência definimos  $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_X^{\phi_j}(A \cap X_j).$$

Esta função é claramente uma medida. É uma medida de Borel porque todo o compacto  $K \subset X$  pode ser coberto por um número finito de imagens  $\phi_j(U_j)$ . Como todas estas imagens têm volume finito segue que  $\mu(K) < +\infty$ .

Sejam  $\phi: U \rightarrow X$  uma parametrização de  $X$ ,  $A \subset \phi(U)$  um Boreliano. Queremos ver que  $\mu(A) = \text{vol}_X^{\phi}(A)$ . Para cada  $i \geq 1$ , temos  $A \cap X_j \subset \phi(U) \cap \phi_j(U_j)$  e pela proposição 13.3.1,  $\text{vol}_X^{\phi_j}(A \cap X_j) = \text{vol}_X^{\phi}(A \cap X_j)$ . Logo

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_X^{\phi_j}(A \cap X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_X^{\phi}(A \cap X_j) = \text{vol}_X^{\phi}(A),$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

A única medida da proposição anterior diz-se o *volume Riemanniano* de  $X$  e é denotada por  $\text{vol}_X$ .

## 13.4 Fórmula integral para o grau

Nesta secção estabelecemos uma fórmula integral que descreve o grau dum mapa suave  $f: X \rightarrow Y$  como o número de vezes que  $f$  cobre a variedade  $Y$ . Por outras palavras, o volume orientado varrido por  $f$  é um múltiplo inteiro do volume de  $Y$ .

**Teorema 13.4.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas orientadas sem bordo da mesma dimensão, e  $f: X \rightarrow Y$  um mapa suave. Então

$$\int_X \det(Df) d\text{vol}_X = \deg(f) \text{vol}_Y(Y).$$

*Proof.* Seja  $V_f \subset Y$  o conjunto dos valores regulares do mapa  $f: X \rightarrow Y$ .

Vamos chamar aberto  $f$ -regular a um aberto  $U \subset Y$  tal que  $f^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_k$  seja uma união disjunta de abertos  $V_i \subset X$  onde  $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$  é um difeomorfismo para cada  $i = 1, \dots, k$ . Todo o aberto  $f$ -regular está contido no conjunto  $V_f$ .

Dado  $U \subset Y$  aberto  $f$ -regular e um Boreliano  $A \subset U$ , como  $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$  é um difeomorfismo temos (exercício 13.3) para cada  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\int_{(f|_{V_i})^{-1}(A)} \det(Df|_{V_i}) d\text{vol}_X = \text{vol}_Y(A).$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(A)} \det(Df) d\text{vol}_X &= \sum_{i=1}^k \int_{f^{-1}(A) \cap V_i} \det(Df) d\text{vol}_X \\ &= \sum_{i=1}^k \text{sgn}(Df|_{V_i}) \text{vol}_Y(A) \\ &= \text{deg}(f) \text{vol}_Y(A). \end{aligned}$$

Pelo exercício 2.9 para cada  $y \in V_f$  existe um aberto  $f$ -regular  $U_y \subset V_f$  que o contém. A família de abertos  $f$ -regulares  $\{U_y\}_{y \in V_f}$  forma assim uma cobertura de  $V_f$ .

O conjunto  $V_f$ , como toda a variedade, é um espaço de Lindelöf (exercício 13.4). Assim podemos cobrir  $V_f$  com uma família numerável  $\{U_j: j \geq 1\}$  de abertos  $f$ -regulares. A partir desta cobertura construímos uma partição de  $V_f$  em Borelianos disjuntos dois a dois, definindo  $A_1 := U_1$  e depois (recursivamente)  $A_j := U_j \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} A_i)$ , para todo  $j \geq 2$ .

Pelo Teorema 5.1.1 (Teorema de Sard),  $\text{vol}_Y(Y) = \text{vol}_Y(V_f)$ . Logo, como  $A_j \subset U_j$  temos

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(V_f)} \det(Df) d\text{vol}_X &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{f^{-1}(A_j)} \det(Df) d\text{vol}_X \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_Y(A_j) = \text{vol}_Y(V_f) = \text{vol}_Y(Y). \end{aligned}$$

Para concluir resta-nos justificar que

$$\int_{X \setminus f^{-1}(V_f)} \det(Df) d\text{vol}_X = 0.$$

Sejam  $C := \{x \in X: \det(Df_x) = 0\}$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , e  $\Sigma := f(C)$  o conjunto dos respectivos valores críticos. Temos  $V_f = Y \setminus \Sigma$  e

$$X \setminus f^{-1}(V_f) = f^{-1}(\Sigma) = C \cup ((X \setminus C) \cap f^{-1}(\Sigma)).$$

Por um lado a função integranda  $\det(Df)$  anula-se em  $C$ . Por outro o conjunto  $(X \setminus C) \cap f^{-1}(\Sigma)$  tem medida nula, i.e.,  $\text{vol}_X((X \setminus C) \cap f^{-1}(\Sigma)) = 0$ , porque  $\Sigma$  tem medida nula em  $Y$  e  $f|_{X \setminus C}: X \setminus C \rightarrow Y$  é um difeomorfismo local (exercício 5.5). Estes factos mostram que é nulo o integral acima.  $\square$

## 13.5 Mapa de Gauss e Operador de forma

Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma variedade compacta e sem bordo com dimensão  $n$ . Pelo Teorema de separação Jordan-Brouwer (12.0.1),  $X^n$  é o bordo uma variedade compacta  $Z^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Em particular  $X^n$  é uma variedade orientada com a orientação induzida por  $Z^{n+1}$  no bordo (exercício 12.5).

Consideremos de novo o *mapa de Gauss*  $N: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , introduzido na secção 11.2, definido por  $N(x) := \nu(x) \in \mathbb{S}^n$ , onde  $\nu \in \mathcal{X}_{\perp}^{\infty}(X^n)$  é o campo normal exterior de  $Z^{n+1}$ .

**Proposição 13.5.1.** Dado  $x \in X^n$ , a derivada  $DN_x: T_x X \rightarrow T_{N(x)} \mathbb{S}^n$  induz um operador auto-adjunto  $DN_x: T_x X \rightarrow T_x X$  no espaço Euclidiano  $T_x X$ .

*Proof.* A derivada do mapa de Gauss  $DN_x: T_x X \rightarrow T_{N(x)} \mathbb{S}^n$  transforma o espaço tangente  $T_x X$  em  $T_{N(x)} \mathbb{S}^n = N(x)^{\perp} = T_x X$ .

Dada uma parametrização  $\phi: U \rightarrow X^n$  da variedade  $X^n$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , temos

$$N(\phi(x)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = 0$$

para todo  $x \in U$ . Derivando esta relação em  $x_j$  obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \cdot DN_{\phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) + N(\phi(x)) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \cdot DN_{\phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) &= -N(\phi(x)) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \cdot DN_{\phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in U$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Como  $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x)\}$  é uma base de  $T_{\phi(x)} X$ , isto prova que o operador  $DN_{\phi(x)}$  é auto-adjunto.  $\square$

Chama-se *operador de forma* da hipersuperfície  $(X, x)$  ao operador auto-adjunto  $-DN_x: T_x X \rightarrow T_x X$ . Este nome resulta da seguinte relação entre a segunda forma fundamental (Definição 14.12.1) de  $(X, x)$  e o operador de forma (exercícios 13.8 e 13.9):

$$B_x(u, v) = -(u \cdot DN_x(v)) N(x) \quad u, v \in T_x X.$$

Dados  $x$  e  $v \in T_x X$  com  $\|v\| = 1$ , seja  $\Pi_x(v)$  o plano normal a  $(X, x)$

$$\Pi_x(v) := \{tN(x) + sv : t, s \in \mathbb{R}\},$$

e designemos por  $\kappa_x(v)$  a curvatura da curva plana  $X \cap \Pi_x(v)$  no ponto  $x$ , i.e., o produto interno do vector de curvatura de  $X \cap \Pi_x(v)$  no ponto  $x$  com o vector normal  $N(x)$ . Chamaremos a  $\kappa_x(v)$  a *curvatura normal* de  $(X, x)$  segundo a direcção  $v \in T_x X$ .

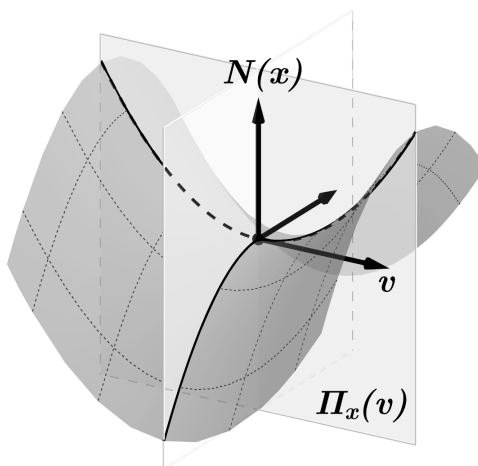


Figure 13.1: Curvatura normal  $\kappa_x(v)$  segundo uma direcção  $v$ .

As curvaturas normais de  $(X, x)$  são dadas pela forma quadrática associada ao operador de forma.

**Proposição 13.5.2.** Dados  $x \in X$  e  $v \in T_x X$  com  $\|v\| = 1$ ,

$$\kappa_x(v) = -v \cdot DN_x(v).$$

*Proof.* Seja  $\gamma(t)$  uma parametrização suave de  $X \cap \Pi_x(v)$  pelo comprimento de arco, i.e.,  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = v$ . Derivando a relação  $\gamma'(t) \cdot N(\gamma(t)) = 0$ , como  $\gamma''(0)$  é o vector curvatura de  $X \cap \Pi_x(v)$  no ponto  $x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \kappa_x(v) &= \gamma''(0) \cdot N(x) = \gamma''(0) \cdot N(\gamma(0)) \\ &= -\gamma'(0) \cdot DN_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = -v \cdot DN_x(v). \end{aligned}$$

□

Os valores próprios do operador de forma  $-DN_x$  dizem-se as *curvaturas principais* da hipersuperfície  $(X, x)$ .



Pelo exercício 3.18, as curvaturas principais são os pontos críticos da forma quadrática  $\kappa_x: \mathbb{S}_x \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto \kappa_x(v)$ , definida sobre a superfície esférica

$$\mathbb{S}_x := \{v \in T_x X : \|v\| = 1\}.$$

Em particular as curvaturas normais máxima e mínima

$$\kappa_{\max}(x) := \max_{v \in \mathbb{S}_x} \kappa_x(v) \quad \text{e} \quad \kappa_{\min}(x) := \min_{v \in \mathbb{S}_x} \kappa_x(v)$$

estão entre as curvaturas principais. Destas considerações resulta o facto seguinte.

**Proposição 13.5.3.** O determinante de operador de forma  $\det(-DN_x)$  é o produto das curvaturas principais de  $(X, x)$ .

Em dimensão dois,  $n = 2$ , o número  $K(x) := \det(DN_x)$  diz-se a *curvatura Gaussiana* de  $(X, x)$ . Neste caso,

$$K(x) = \kappa_{\max}(x) \kappa_{\min}(x)$$

é o produto das curvaturas normais máxima e mínima.

As curvaturas principais duma superfície  $X \subset \mathbb{R}^3$  descrevem o modo como ela se curva no ambiente  $\mathbb{R}^3$  sendo por isso conceitos de geometria extrínseca. Surpreendentemente a curvatura Gaussiana  $K$ , definida em termos das curvaturas principais, é um conceito de geometria intrínseca. Ela é preservada por isometrias entre superfícies, resultado provado por Carl Friedrich Gauss em 1825, conhecido como o seu *Teorema Egregium*.

Dada uma parametrização  $\phi: U \rightarrow X$  duma superfície  $X$  chama-se *matriz da métrica* de  $X$  (no sistema de coordenadas definido por  $\phi$ ) à função matricial  $G_\phi: U \rightarrow \text{Mat}_2^S$ ,

$$G_\phi(x) := \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$$

Esta matriz representa o produto interno no espaço tangente  $T_{\phi(x)}X$ . A derivada  $D\phi_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\phi(x)}X$  é uma isometria se considerarmos em  $\mathbb{R}^2$  o produto interno definido pela matriz  $G_\phi(x)$ . O Teorema Egregium segue do seguinte facto:

**Teorema 13.5.1** (Gauss). Sejam  $X \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $K: X \rightarrow \mathbb{R}$  a sua curvatura Gaussiana. Dada uma parametrização  $\phi: U \rightarrow X$  de  $X$ , é possível exprimir a curvatura Gaussiana  $(K \circ \phi)(x)$  em função das derivadas da matriz da métrica  $G_\phi: U \rightarrow \text{Mat}_2^S$ .

*Proof.* Ver [3, Secção 4-3]. □

### 13.6 Teorema de Gauss-Bonnet

**Teorema 13.6.1.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta, sem bordo de dimensão  $n$  par. Então  $X^n$  tem curvatura total

$$\int_X \det(DN) \operatorname{vol}_X = \frac{\chi(X)}{2} \operatorname{vol}(\mathbb{S}^n)$$

*Proof.* Basta aplicar o Teorema 13.4.1 ao mapa de Gauss  $N: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  e depois usar o Lemma 13.6.1.  $\square$

**Lema 13.6.1.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta, sem bordo de dimensão  $n$  par. Então

$$\deg(N) = \frac{\chi(X)}{2}.$$

*Proof.* Dado  $v \in \mathbb{S}^n$  seja  $\xi_v \in \mathcal{X}^\infty(X)$  o campo de vetores definido por

$$\xi_v(x) := P_{T_x X}(v) = v - (v \cdot N(x)) N(x).$$

Observemos que são equivalentes as afirmações  $x \in N^{-1}\{-v, v\}$ ,  $N(x) = \pm v$  e  $(\xi_v)_x = 0$ , pelo que  $N^{-1}\{-v, v\} = N^{-1}\{v\} \cup N^{-1}\{-v\}$  é o conjunto as singularidades do campo  $\xi_v$ .

Se  $N(x) = \pm v$ , dado um vector  $w \in T_x X$ , pela Proposição 13.5.1 temos  $v \cdot DN_x(w) = 0$  e então

$$\begin{aligned} (D\xi_v)_x(w) &= -v \cdot DN_x(w) N(x) - (x \cdot N(x)) DN_x(w) \\ &= -(x \cdot N(x)) DN_x(w) = \mp DN_x(w). \end{aligned}$$

Logo  $v$  é um valor regular dos mapas  $N$  e  $-N$  se e somente se todas as singularidades do campo  $\xi_v$  são não degeneradas, i.e.,  $\xi_v$  é um campo de Morse.

Pelo Teorema de Sard (5.1.1) existe um vector  $v \in \mathbb{S}^n$  que seja simultaneamente um valor regular dos mapas  $N$  e  $-N$ , e o campo  $\xi_v$  é de Morse. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf (11.2.1)

$$\begin{aligned} \chi(X^n) &= \sum_{x \in \xi_v^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det(D\xi_v)_x) = \sum_{x \in N^{-1}\{-v, v\}} \operatorname{sgn}(\det(\pm DN_x)) \\ &= \sum_{x \in N^{-1}\{-v\}} \operatorname{sgn}(\det(-DN_x)) + \sum_{x \in N^{-1}\{v\}} \operatorname{sgn}(\det(DN_x)) \\ &= \deg(N) + \deg(N) = 2 \deg(N). \end{aligned}$$

No último passo calculamos o grau de Brouwer do mapa  $N$ , usando que  $v$  e  $-v$  são valores regulares de  $N$ . Porque  $n$  é par temos  $\det(-DN_x) = \det DN_x$ .  $\square$

Em dimensão 2 o Teorema 13.6.1 é precisamente o Teorema de Gauss-Bonnet.

**Corolário 13.6.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície compacta, sem bordo. Então

$$\int_X K \, dA = 2\pi \chi(X).$$

Uma demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet usando um argumento de geometria intrínseca pode ser vista em [3].

## 13.7 Exercícios

**Ex 13.1.** Mostre que a medida de Lebesgue  $\text{vol}_n$  satisfaz as seguintes propriedades sobre a classe dos paralelepípedos. Quaisquer que sejam  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $h = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$  combinação linear dos vectores  $v_j$  com  $j \neq i$ ,

- (a)  $\text{vol}_n(P(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)) = |\lambda| \text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n))$ ,
- (b)  $\text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_n)) = \text{vol}_n(P(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n))$ .

**Ex 13.2.** Seja  $\sigma$  uma orientação em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que a função volume orientado  $V_\sigma: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma multilinear alternada, i.e., quaisquer que sejam  $i, j = 1, \dots, n$  ( $i < j$ ),  $v_1, \dots, v_n, u_i \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- (a)  $V_\sigma(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -V_\sigma(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$ ,
- (b)  $V_\sigma(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda V_\sigma(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ ,
- (c)  $V_\sigma(v_1, \dots, v_i + u_i, \dots, v_n) = V_\sigma(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + V_\sigma(v_1, \dots, u_i, \dots, v_n)$ ,
- (d)  $V_\sigma(v_1, \dots, v_n) = 0$  se  $v_1, \dots, v_n$  forem linearmente dependentes.

**Sugestão:** Use o exercício 13.1 (a) para provar a alínea (b) deste. Observe que (b) implica (c) no caso em que  $u_i$  e  $v_i$  são colineares. Use o exercício 13.1 (b) para reduzir a alínea (c) à (b).

**Ex 13.3.** Seja  $f: X \rightarrow Y$  um difeomorfismo. Mostre que todo o Boreliano  $A \in \mathcal{B}(Y)$ ,

$$\int_{f^{-1}(A)} |\det(Df)| \, d\text{vol}_X = \text{vol}_Y(A).$$

Um espaço topológico  $X$  diz-se um *espaço de Lindelöf* se toda a cobertura aberta de  $X$  admitir uma sub-cobertura numerável.

**Ex 13.4.** Mostre que toda a variedade é um espaço de Lindelöf.

**Sugestão:** Veja que para todo o aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  existe uma sucessão crescente de conjuntos compactos  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  tal que  $U = \cup_{j \geq 1} K_j$ . Conclua que  $U$  é um espaço de Lindelöf. Finalmente, toda a variedade de dimensão  $n$  é uma união numerável de conjuntos difeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ex 13.5.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade de dimensão 1 e  $f: [0, 1] \rightarrow X$  um difeomorfismo. Mostre que o volume Riemanniano da curva  $X$  coincide com o seu comprimento

$$\text{vol}_X(X) = \int_0^1 \|f'(t)\| dt.$$

**Ex 13.6.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $\phi: U \rightarrow X$  um difeomorfismo, definido num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Mostre que o volume Riemanniano da superfície  $X$  coincide com a sua área

$$\text{vol}_X(X) = \int_U \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right\| dx_1 dx_2.$$

**Sugestão:** Dados  $u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|u \times v\|$  é a área do paralelogramo  $P(u, v)$ .

**Ex 13.7.** Dada uma aplicação suave  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $X$  a superfície de revolução obtida rodando o gráfico  $G_f := \{(x, y, 0) : x \in [a, b], y = f(x)\}$  em torno do eixo dos  $xx$  em  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que a área (volume Riemanniano) de  $X$  é dada por

$$\text{vol}_X(X) = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Os dois exercícios seguinte justificam o nome dado ao *operador de forma*:

**Ex 13.8.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta sem bordo. Prove a seguinte relação entre a segunda forma fundamental e o operador de forma de  $X$  no ponto  $p \in X$ :

$$B_p(u, v) = -(u \cdot DN_p(v)) N(p) \quad u, v \in T_p X.$$

**Sugestão:** Dados  $u, v \in T_p X$  considere o campo  $\xi_u \in \mathcal{X}^\infty(X^n)$  definido por  $\xi_u(x) := u - (u \cdot N(x)) N(x)$ . Veja que  $\xi_u(p) = u$  e

$$(D\xi_u)_p(v) = -(u \cdot DN_p(v)) N(p).$$

**Ex 13.9.** O gráfico da forma quadrática  $\kappa_p: T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa_p(v) = -v \cdot DN_p(v)$ , descreve numa aproximação de segunda ordem a forma da hipersuperfície  $X$  no ponto  $p$ .

**Sugestão:** Use a Proposição 14.12.2.

**Ex 13.10.** Seja  $X^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a superfície duma esfera de raio  $R$ , e  $N: X^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  o seu mapa de Gauss. Mostre que  $\det DN$  é constante igual a  $\frac{1}{R^n}$ .

**Ex 13.11.** Dados  $0 < a < b$ , seja  $C$  a circunferência no plano  $z = 0$  de centro na origem e raio  $b$ , e  $X$  o 2-toro formado pelo bordo da vizinhança tubular  $V_a(C)$ . Descreva os conjuntos de pontos onde a curvatura Gaussiana de  $X$  é respectivamente, nula, positiva e negativa, e qual o comportamento do mapa de Gauss  $N: X \rightarrow \mathbb{S}^2$  em cada uma destas regiões.

Uma *superfície simplicial* é um complexo simplicial  $\mathcal{K}$  (ver definição no apêndice 14.11) de dimensão 2 tal que  $|\mathcal{K}|$  seja uma variedade topológica (sem bordo) de dimensão 2.

Dada uma superfície simplicial  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_0$  é um conjunto de pontos, os vértices de  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_1$  é um conjunto de segmentos de recta, as arestas de  $\mathcal{K}$ , e  $\mathcal{K}_2$  é um conjunto de triângulos, as faces de  $\mathcal{K}$ .

Dado  $v \in \mathcal{K}_0$ , designamos por  $V_{\mathcal{K}}(v)$  a união de todos os triângulos  $\Delta \in \mathcal{K}_2$  tais que  $v \in \Delta$ . O conjunto  $V_{\mathcal{K}}(v)$  é uma vizinhança do vértice  $v$  em  $|\mathcal{K}|$ . Designamos por  $S_{\mathcal{K}}(v)$  o bordo desta vizinhança, que é a união de todos os lados opostos a  $v$  nos triângulos  $\Delta \in \mathcal{K}_2$  com  $v \in \Delta$ .

**Ex 13.12.** Seja  $\mathcal{K}$  uma superfície simplicial. Mostre que

- (a) Para cada aresta  $\ell \in \mathcal{K}_1$  existem exactamente duas faces  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{K}_2$  tais que  $\ell = \Delta \cap \Delta'$ .
- (b) Para cada vértice  $v \in \mathcal{K}_0$ , o conjunto  $S_{\mathcal{K}}(v)$  é conexo.

**Sugestão:** Seja  $\ell \in \mathcal{K}_1$  uma aresta de  $\mathcal{K}$  e tome um ponto  $p \in |\mathcal{K}|$  interior a esta aresta. Supondo que  $\ell$  está contida no bordo de exactamente 0, 1 ou  $k \geq 3$  triângulos  $\Delta \in \mathcal{K}_2$ , encontre (em cada caso) uma propriedade topológica que permita diferenciar  $(|\mathcal{K}|, p)$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

Supondo que para um vértice  $v \in \mathcal{K}_0$ ,  $S_{\mathcal{K}}(v)$  é desconexo, mostre que  $V_{\mathcal{K}}(v) \setminus \{v\}$  é também desconexo. Conclua que  $(V_{\mathcal{K}}(v), v) \simeq (|\mathcal{K}|, v)$  não é localmente homeomorfo a  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

**Ex 13.13.** Seja  $\mathcal{K}$  um complexo simplicial de dimensão 2 simplicial satisfazendo as condições (a) e (b) do exercício 13.12. Mostre que  $\mathcal{K}$  é uma superfície simplicial.

**Sugestão:** Para cada  $v \in \mathcal{K}_0$ ,  $(V_{\mathcal{K}}(v), v)$  é localmente homeomorfo a  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

Dada uma superfície simplicial  $\mathcal{K}$  e um vértice  $v \in \mathcal{K}_0$  define-se a *curvatura*  $\kappa(v)$  de  $(|\mathcal{K}|, v)$  como sendo

$$\kappa(v) = 2\pi - \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{K}_2 \\ v \in \Delta}} \angle(\Delta, v),$$

onde  $\angle(\Delta, v)$  representa o ângulo do triângulo  $\Delta$  medido no vértice  $v$ . Nos pontos interiores às faces em  $\mathcal{K}_2$  é natural considerar que a curvatura é nula. Nas arestas em  $\mathcal{K}_1$  também (porquê?).

**Ex 13.14.** Seja  $\mathcal{K}$  uma superfície simplicial. Prove a seguinte versão discreta do Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\sum_{v \in \mathcal{K}_0} \kappa(v) = 2\pi \chi(|\mathcal{K}|).$$

**Sugestão:** Escrevendo  $V = \#\mathcal{K}_0$ ,  $A = \#\mathcal{K}_1$  e  $F = \#\mathcal{K}_2$ , pela fórmula de Euler (corolário 8.10.1) temos  $V - A + F = \chi(|\mathcal{K}|)$ . Use a conclusão (a) do exercício 13.12 para relacionar  $A$  com  $F$ .

Chama-se *poliedro* a qualquer intersecção finita de semi-espacos

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v \leq c\}.$$

Um poliedro compacto diz-se um *politopo*.

**Ex 13.15.** Mostre que para qualquer politopo  $P \subset \mathbb{R}^3$  com interior não vazio,

$$\sum_{v \text{ vértice de } P} \kappa(v) = 4\pi,$$

com  $\kappa(v)$  definido do mesmo modo que no exercício anterior.

**Sugestão:** Reduza o problema ao exercício 13.14.

# Chapter 14

## Apêndices

### 14.1 Derivadas Totais

Nesta secção propomos alguns problemas de cálculo diferencial sobre a manipulação algébrica de derivadas totais. Vamos considerar funções parciais  $f : V \rightarrow V'$  entre espaços vectoriais reais de dimensão finita  $V$  e  $V'$  cujos domínios serão sempre conjuntos abertos.

Uma aplicação  $f : U \subset V \rightarrow V'$  diz-se *diferenciável* se para cada  $p \in U$  existir uma aplicação linear  $Df_p \in \mathcal{L}(V, V')$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - Df_p(x - p)}{\|x - p\|} = 0.$$

Chama-se *derivada total* de  $f$  à aplicação  $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$ ,  $p \mapsto Df_p$ . A aplicação  $f : U \subset V \rightarrow V'$  diz-se de *classe  $C^1$*  se for diferenciável e  $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$  for contínua. Mais geralmente dizemos, recursivamente, que  $f$  é de *classe  $C^k$* , com  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , se  $f$  for de classe  $C^1$  e  $Df$  for de classe  $C^{k-1}$ . Finalmente,  $f$  diz-se de classe  $C^\infty$  se for de classe  $C^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 14.1.1** (Regra da Cadeia). Dadas aplicações  $f : U \subset V \rightarrow V'$  e  $g : U' \subset V' \rightarrow V''$  diferenciáveis tais que  $f(U) \subset U'$ , a aplicação  $g \circ f : U \rightarrow V''$  é diferenciável e  $\forall x \in U, v \in V$ ,

$$D(g \circ f)_x(v) = Dg_{f(x)}(Df_x(v)).$$

Usaremos a notação  $D[e(x)]_{x=p}(v)$  para designar a derivada total duma aplicação  $f$  definida pela expressão  $f(x) := e(x)$  sem ter de a nomear.

**Ex 14.1** (Derivadas Parciais). Dada uma aplicação  $f : U \subset V \times V' \rightarrow V''$  diferenciável mostre que  $\forall (a, b) \in U$ ,  $(u, v) \in V \times V'$ ,

$$Df_{(a,b)}(u, v) = D[f(x, b)]_{x=a}(u) + D[f(a, y)]_{y=b}(v).$$

As expressões  $D[f(x, b)]_{x=a}$  e  $D[f(a, y)]_{y=b}$  representam as derivadas parciais de  $f$ .

**Ex 14.2** (Regra de Leibnitz). Dada uma aplicação bilinear  $\beta : V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$  e  $f : U \subset V \rightarrow V_1$ ,  $g : U \subset V \rightarrow V_2$  aplicações diferenciáveis, a aplicação  $U \ni x \mapsto \beta(f_1(x), f_2(x)) \in V_3$  é diferenciável e

$$D[\beta(f_1(x), f_2(x))]_{x=p}(v) = \beta((Df_1)_p(v), f_2(p)) + \beta(f_1(p), (Df_2)_p(v)).$$

**Ex 14.3.** Considere a aplicação  $i : U \subset \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,  $i(A) := A^{-1}$  definida sobre o aberto  $U$  das matrizes invertíveis.  $\forall A \in U$ ,  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ,

$$Di_A(B) = -A^{-1} B A^{-1}.$$

**Sugestão:** A aplicação  $i$  é definida implicitamente pela relação  $i(A) A = I$ .

Seja  $f : U \subset V \rightarrow V'$  uma aplicação de classe  $C^2$ . Chama-se *segunda derivada total* de  $f$  no ponto  $x \in U$  à aplicação bilinear  $D^2 f_x : V \times V \rightarrow V'$ , definida por  $D^2 f_x(u, v) := D(Df)_x(u)(v)$ .

**Ex 14.4.** Se  $f : U \subset V \rightarrow V'$  for de classe  $C^2$ ,  $\forall x \in U$ ,  $u, v \in V$ ,

$$D(Df)_x(u)(v) = D(Df)_x(v)(u).$$

Em particular a aplicação bilinear  $D^2 f_x : V \times V \rightarrow V'$  é simétrica.

**Sugestão:** Defina  $\varphi(s, t) := f(x + su + tv)$  e mostre que as duas derivadas acima coincidem com  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(0, 0)$ .

**Ex 14.5** (Segunda derivada da composta). Dadas aplicações  $f : U \subset V \rightarrow V'$  e  $g : U' \subset V' \rightarrow V''$  de classe  $C^2$  tais que  $f(U) \subset U'$ , a aplicação  $g \circ f : U \rightarrow V''$  é de classe  $C^2$  e  $\forall x \in U$ ,  $u, v \in V$ ,

$$D^2(g \circ f)_x(u, v) = D^2 g_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)) + Dg_{f(x)}(D^2 f_x(u, v)).$$

## 14.2 Formas Normais de Jordan

Resumimos aqui alguns conceitos da teoria espectral das matrizes reais e complexas. A versão complexa desta teoria está muito bem resumida no livro de Álgebra Linear [10].

Dada uma matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , o polinómio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

diz-se o seu *polinómio característico*. As raízes deste polinómio dizem-se os *valores próprios* de  $A$ . A ordem de um valor próprio enquanto raiz do polinómio  $p_A(\lambda)$  diz-se a sua *multiplicidade algébrica*.

Chama-se *espectro* de  $A$  ao conjunto dos seus valores próprios

$$\text{spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$



Dado  $\lambda \in \text{spec}(A)$  o subespaço vectorial

$$\text{Nuc}(A - \lambda I) := \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)v = 0\} = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}$$

diz-se o *subespaço próprio* associado a  $\lambda$  e os vectores não nulos deste subespaço dizem-se *vectores próprios* de  $A$ .

Mais geralmente, a cadeia ascendente de subespaços vectoriais

$$\text{Nuc}[(A - \lambda I)] \subseteq \text{Nuc}[(A - \lambda I)^2] \subseteq \dots \subseteq \text{Nuc}[(A - \lambda I)^k] \subseteq \dots$$

estabiliza a partir da multiplicidade algébrica de  $\lambda$  num subespaço que denotaremos por  $E_\lambda(A)$  e se diz o *subespaço próprio generalizado* associado a  $\lambda$ . Os vectores não nulos deste subespaço dizem-se *vectores próprios generalizados* de  $A$ .

**Teorema 14.2.1.** Para qualquer matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , os subespaços complexos  $E_\lambda(A)$  são invariantes por  $A$  e vale a seguinte decomposição:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} E_\lambda(A)$$

*Proof.* Ver teorema A2.3 em [10]. □

Dados  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , uma matriz da forma

$$J_\lambda(k) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$$

diz-se um *bloco de Jordan* (complexo). Chama-se *forma normal de Jordan complexa* a qualquer matriz diagonal por blocos

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{bmatrix} \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$$

cujos elementos na diagonal,  $J_i$ , sejam blocos de Jordan.

Chama-se *cadeia de vectores próprios generalizados* de  $A$  a uma sequência de vectores  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset E_\lambda(A)$  tal que e

$$(A - \lambda I)v_1 = 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda I)v_{j+1} = v_j \quad \forall 1 \leq j < k.$$

Os elementos de uma cadeia de vectores próprios generalizados são sempre linearmente independentes formando por isso uma base do subespaço por eles gerado. A acção de  $A$  deixa este subespaço invariante sendo representada pela matriz, bloco de Jordan,  $J_\lambda(k)$ . Prova-se que o subespaço  $E_\lambda(A)$  admite uma base formada por cadeias de vectores próprios generalizados,

**Teorema 14.2.2.** Para qualquer matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , existe uma base na qual  $A$  é representada por uma forma normal de Jordan.

*Proof.* Ver teorema A2.5 em [10]. □

Este teorema mostra que toda a matriz em  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  é conjugada a uma forma normal de Jordan. As formas normais de Jordan são os representantes canónicos das classes de conjugação em  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ .

Dada uma matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  e um valor próprio  $\lambda \in \text{spec}(A)$ , seja

$$\tilde{E}_\lambda(A) := \text{Re}[E_\lambda(A)] + \text{Im}[E_\lambda(A)].$$

Quando  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{E}_\lambda(A) = \text{Re}[E_\lambda(A)] = \text{Im}[E_\lambda(A)]$  é um subespaço real invariante por  $A$ . Neste caso podemos tomar uma base formada por cadeias de vectores próprios generalizados em  $\tilde{E}_\lambda(A)$ . Relativamente a esta base, a acção de  $A$  neste subespaço é representada por uma forma normal de Jordan, constituída por blocos de Jordan reais associados a  $\lambda$ .

Caso contrário, se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , temos que

$$\tilde{E}_\lambda(A) = \text{Re}[E_\lambda(A)] \oplus \text{Im}[E_\lambda(A)] = \tilde{E}_{\bar{\lambda}}(A)$$

é um subespaço real invariante por  $A$ .

**Teorema 14.2.3.** Para qualquer matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , os subespaços reais  $\tilde{E}_\lambda(A)$  são invariantes por  $A$  e vale a seguinte decomposição:

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{spec}(A) \\ \text{Im}\lambda \geq 0}} \tilde{E}_\lambda(A)$$

Dado  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , definimos  $J_{\alpha,\beta}(2k) \in \text{Mat}_{2k}(\mathbb{R})$  como sendo a matriz obtida de  $J_\lambda(k)$  efectuando as seguintes substituições

$$0 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Chamam-se *blocos de Jordan reais* às matrizes  $J_\lambda(k)$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $J_{\alpha,\beta}(2k)$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Finalmente, chama-se *forma normal de Jordan real* a qualquer matriz diagonal por blocos em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  cujos elementos na diagonal sejam blocos de Jordan reais. indexmatriz!bloco de Jordan real indexmatriz!forma normal de Jordan real

Dado  $\lambda = \alpha + i\beta \in \text{spec}(A)$ ,  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , seja  $\{v_1 + iw_1, v_2 + iw_2, \dots, v_k + iw_k\}$  uma cadeia de vectores próprios generalizados em  $E_\lambda(A)$ . Então os vectores conjugados  $\{v_l - iw_l : 1 \leq l \leq k\}$  formam uma cadeia de vectores próprios generalizados em  $E_{\bar{\lambda}}(A)$ . A família de vectores  $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k\}$  gera um subespaço de  $\tilde{E}_\lambda(A)$  que é invariante por  $A$  e no qual a acção desta matriz é representada pelo bloco de Jordan real  $J_{\alpha,\beta}(2k)$ . Destas considerações e dos teoremas espectrais 14.2.1 e 14.2.2 obtemos o resultado seguinte:

**Teorema 14.2.4.** Para qualquer matriz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , existe uma base na qual  $A$  é representada por uma forma normal de Jordan real.

Este teorema mostra que toda a matriz em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  é conjugada a uma forma normal de Jordan real. Tal como no caso anterior, as formas normais de Jordan reais são os representantes canónicos das classes de conjugação em  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .

### 14.3 Teorema de Stone-Weierstrass

Dado um espaço topológico compacto  $X$ , o espaço  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  das funções contínuas  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma álgebra de Banach comutativa com a operação de multiplicação de funções usual e a norma do máximo

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Seja  $\mathcal{A}$  uma sub-álgebra de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  *separa pontos* se quaisquer que sejam  $p \neq q$  em  $X$ , existe uma função  $h \in \mathcal{A}$  tal que  $h(p) \neq h(q)$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  *se anula num ponto*  $p \in X$  se  $h(p) = 0$  para toda a função  $h \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 14.3.1** (Stone-Weierstrass). Toda sub-álgebra de  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  que separe pontos e não se anule em nenhum ponto é densa em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

*Proof.* Ver [20, Theorem 7.33].  $\square$

Consideremos o espaço  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$  dos mapas contínuos  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ . A multiplicação de aplicações componente a componente,

$$(fg)(x) := (f_1(x)g_1(x), \dots, f_N(x)g_N(x)),$$

faz deste espaço uma álgebra comutativa, cuja unidade multiplicativa é a função constante  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  com todas as componentes iguais a um. Consideremos neste espaço a norma do máximo

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq N} |f_i(x)|$$

que faz dele um espaço de Banach. Com a multiplicação introduzida acima o espaço  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$  é também uma álgebra de Banach comutativa, porque

$$\|\mathbf{1}\|_\infty = 1 \quad \text{e} \quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Existe um isomorfismo (isométrico) de álgebras de Banach

$$\Theta: \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{C}(X \times \{1, \dots, N\}, \mathbb{R})$$

que identifica o mapa  $f = (f_1, \dots, f_N): X \rightarrow \mathbb{R}^N$  com a função  $\tilde{f} = \Theta(f): X \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\tilde{f}(x, i) := f_i(x)$ .

Suponhamos que  $X$  é um subespaço compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$  a álgebra das funções polinomiais  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ , e  $\text{Pol}(X, \mathbb{R}^N)$  a sub-álgebra de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$  formada pelas restrições a  $X$  de funções em  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ . Esta sub-álgebra não se anula em nenhum ponto, porque contém a função constante  $\mathbf{1}$ , e separa pontos uma vez que contém as restrições a  $X$  das funções lineares  $\pi_i: x \mapsto x_i$ , com  $1 \leq i \leq N$ .

Aplicando o Teorema 14.3.1 à álgebra de Banach  $\mathcal{C}(X \times \{1, \dots, N\}, \mathbb{R})$  obtemos:

**Corolário 14.3.1.** A subálgebra  $\text{Pol}(X, \mathbb{R}^N)$  é densa em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ .

## 14.4 Categorias e Functores

Uma *categoria*  $\mathcal{C}$  consiste num conjunto de objectos  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  e num conjunto de morfismos  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , munidos de uma aplicação

$$\text{Mor}: \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow 2^{\mathcal{M}(\mathcal{C})}, \quad (X, Y) \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

que a cada par de objectos  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  associa um subconjunto  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$  de morfismos, e uma operação de composição

$$\circ: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

definida para cada triplo de objectos  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , satisfazendo os seguintes axiomas:

- (a) (Associatividade) Dados morfismos  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  e  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ ,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- (b) (Identidade) Para cada objecto  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  existe um morfismo  $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  que é o elemento neutro da composição, i.e., tal que

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Alguns exemplos:

- (a) Categoria dos Conjuntos:

- $\text{Obj} := \{X: X \text{ é um conjunto} \}$
- $\text{Mor}(X, Y) := Y^X = \{f: X \rightarrow Y: f \text{ é uma aplicação} \}$

- (b) Categoria dos Espaços Lineares:

- $\text{Obj} := \{E: E \text{ é um espaço linear} \}$
- $\text{Mor}(E, F) := \mathcal{L}(E, F) = \{L: E \rightarrow F: L \text{ é linear} \}$

- (c) Categoria dos Grupos:

- $\text{Obj} := \{G: G \text{ é um grupo} \}$
- $\text{Mor}(G, G') := \mathcal{H}om(G, G') = \{f: G \rightarrow G': f \text{ é um morfismo de grupos} \}$

- (d) Categoria Topológica:

- $\text{Obj} := \{X: X \text{ é um espaço topológico} \}$
- $\text{Mor}(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y: f \text{ é contínua} \}$

- (e) Categoria das Variedades:

- $\text{Obj} := \{X : X \text{ é uma variedade} \}$
- $\text{Mor}(X, Y) := C^\infty(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ é suave} \}$

(f) Categoria das Variedades Pontuadas:

- $\text{Obj} := \{(X, x) : X \text{ é uma variedade e } x \in X\}$
- $\text{Mor}((X, x), (Y, y)) = \{\text{germes de mapas } f : (X, x) \rightarrow (Y, y)\}$

Chama-se *germe* de um mapa suave  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  à sua classe de equivalência

$$[f] := \{g : (X, x) \rightarrow (Y, y) : g \equiv_x f\}$$

onde  $g \equiv_x f$  se existir um aberto  $U \subset X$  com  $x \in U$  tal que  $f|_U = g|_U$ .

(g) Categoria Homotópica:

- $\text{Obj} := \{X : X \text{ é um espaço topológico} \}$
- $\text{Mor}(X, Y) = \{\text{classes de homotopia de mapas } f : X \rightarrow Y\}$

(h) Categoria dos Fibrados Vectoriais:

- $\text{Obj} := \{E : E \text{ é um fibrado vectorial} \}$
- $\text{Mor}(E, F) = \{f : E \rightarrow F : f \text{ é morfismo de fibrados} \}$

Chama-se *grupóide* a uma categoria  $\mathcal{C}$  cujos morfismos sejam todos isomorfismos. Num grupóide o semigrupo  $G(X) := \text{Mor}(X, X)$  é um grupo, qualquer que seja o objecto  $X \in \text{Obj}$ . Além disso  $G(X) \simeq G(Y)$ , quaisquer que sejam  $X, Y \in \text{Obj}$ . De facto, escolhendo  $f \in \text{Mor}(X, Y)$ , temos  $G(Y) = \{f \circ h \circ f^{-1} : h \in G(X)\}$ , sendo a correspondência  $G(X) \ni h \mapsto f \circ h \circ f^{-1} \in G(Y)$  um isomorfismo de grupos.

Dadas duas categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  chama-se *functor* de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{C}'$  a um par de aplicações  $\mathfrak{F} : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C}')$  e  $\mathfrak{F} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}')$  satisfazendo as propriedades seguintes:

- (a)  $\mathfrak{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathfrak{F}(X)}$  para todo  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,
- (b)  $\mathfrak{F}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \subset \text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Y))$ , para quaisquer  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,
- (c)  $\mathfrak{F}(f \circ g) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g)$ , para quaisquer  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  e  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

A derivada é um exemplo de um functor entre a categoria das variedades pontuadas e a categoria dos espaços lineares, que a cada par  $(X, x)$  associa o espaço tangente  $T_x X$  e cada mapa  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  associa a sua derivada  $Df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$ . Este facto resulta da regra da cadeia (Proposição 1.1.4).

Como segundo exemplo, da Proposição 1.1.5 segue que a correspondência que a cada variedade  $X$  associa o fibrado tangente  $TX$  e a cada mapa suave  $f: X \rightarrow Y$  associa o morfismo de fibrados  $Tf: TX \rightarrow TY$ , é um functor da categoria das variedades na categoria dos fibrados vectoriais.

Finalmente existe um *functor projectivo* da categoria dos espaços lineares (e das aplicações lineares injectivas) na categoria das variedades que a cada espaço linear  $E$  associa o espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  e cada monomorfismo  $L: E \rightarrow F$  associa o mapa projectivo  $\mathbb{P}(L): \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F)$ .

Dados funtores  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorias  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ , chama-se *transformação natural* entre os funtores  $\mathfrak{F}$  e  $\mathfrak{F}'$  a uma correspondência  $\theta$  que a cada objecto  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  associa um morfismo  $\theta_X \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}'(X))$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(X) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)} & \mathfrak{F}(Y) \\ \theta_X \downarrow & & \downarrow \theta_Y \\ \mathfrak{F}'(X) & \xrightarrow{\mathfrak{F}'(f)} & \mathfrak{F}'(Y) \end{array}$$

quaisquer que sejam  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  e  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

As transformações naturais ocorrem abundantemente no âmbito da Topologia Algébrica. Vejamos um exemplo geométrico ilustrando o conceito. Consideremos a categoria  $\text{Lin}$  cujos objectos são os espaços lineares de dimensão finita e cujos morfismos são as aplicações lineares injectivas (monomorfismos). Consideremos por outro lado a categoria  $\text{Var}$  cujos objectos são as variedades (abstractas ou não) e cujos morfismos são as aplicações suaves.

Um functor trivial entre estas duas categorias associa a cada espaço linear  $E$  a variedade  $E \setminus \{0\}$  e cada aplicação linear injectiva  $L: E \rightarrow F$  a aplicação suave  $L: E \setminus \{0\} \rightarrow F \setminus \{0\}$ .

A projectivização dos espaços lineares e dos monomorfismos (secção 14.6) determina um segundo functor  $\mathbb{P}: \text{Lin} \rightarrow \text{Var}$ .

A relação (14.1) mostra que a correspondência que a cada espaço linear  $E$  associa o mapa quociente  $\pi_E: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  é uma transformação natural entre estes dois funtores.

## 14.5 Variedades Abstractas

Seja  $X$  um espaço topológico.

Recordemos duas definições do âmbito da Topologia geral: O espaço  $X$  diz-se *Hausdorff* se quaisquer que sejam  $x, y \in X$  com  $x \neq y$  existirem abertos  $U, V \subset X$  tais que  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . O espaço  $X$  diz-se *separável* se admitir uma base numerável de abertos.

**Definição 14.5.1.** *Chama-se variedade topológica de dimensão  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) a um espaço topológico Hausdorff e separável  $X$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $(X, x)$  seja localmente homeomorfo a  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , i.e., existem abertos  $V \subset X$  com  $x \in V$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  com  $0 \in U$ , e um homeomorfismo  $\phi: U \rightarrow V$  tal que  $\phi(0) = x$ .*

Um homeomorfismo  $\phi: U \rightarrow V$  entre um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  e um aberto  $V$  de  $X$  diz-se uma *parametrização* de  $X$ . Dadas duas parametrizações  $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$  e  $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$  de  $X$  tais que  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , o homeomorfismo  $(\phi_2)^{-1} \circ \phi_1: (\phi_1)^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow (\phi_2)^{-1}(V_1 \cap V_2)$  diz-se a *mudança de coordenadas* entre  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Duas parametrizações  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dizem-se  *$C^\infty$ -compatíveis* se a mudança de coordenadas  $(\phi_2)^{-1} \circ \phi_1$  for de classe  $C^\infty$ .

**Definição 14.5.2.** *Chama-se variedade abstracta de dimensão  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) a uma variedade topológica  $X$  de dimensão  $n$  munida dum família de parametrizações  $\{\phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ , definidas em abertos  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ , tal que*

- (a)  $X = \cup_{i \in I} V_i$ ,
- (b)  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são  $C^\infty$ -compatíveis, quaisquer que sejam  $i, j \in I$ .

A família  $\mathcal{A} = \{\phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$  de parametrizações na definição anterior diz-se uma estrutura diferenciável em  $X$ . Relativamente a esta estrutura diferenciável, uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *diferenciável* se o mapa  $f \circ \phi_i$  for diferenciável para todo  $i \in I$ .

**Proposição 14.5.1.** *Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade e  $f: Y \rightarrow X$  um homeomorfismo local sobrejectivo. Então  $X$  é uma variedade abstracta quando munida da estrutura diferenciável  $\mathcal{A} = \{f \circ \phi: \phi \in \mathcal{J}\}$ , onde  $\mathcal{J}$  é o conjunto das parametrizações suaves de  $Y$ ,  $\phi: U \rightarrow Y$  com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, tais que  $f|_{\phi(U)}: \phi(U) \rightarrow f(\phi(U))$  é um homeomorfismo.*

*Proof.* Dadas parametrizações  $\psi, \phi \in \mathcal{J}$ , como  $\phi$  e  $\psi$  são suaves, a mudança de coordenadas entre  $f \circ \psi$  e  $f \circ \phi$

$$(f \circ \psi)^{-1} \circ (f \circ \phi) = \psi^{-1} \circ \phi$$

é de classe  $C^\infty$ . □



Sejam  $X$  uma variedade e  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos de  $X$ . Dizemos que  $G$  é *propriamente descontínuo em  $X$*  se para cada  $x \in X$  existir um aberto  $U \subset X$  com  $x \in U$  tal que para todo  $g \in G$ ,  $g \neq \text{id}_X$ , se tem  $U \cap g(U) = \emptyset$ .

Todo o grupo finito  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  é propriamente descontínuo em  $X$ . Chama-se translação ao difeomorfismo  $\tau_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_k(x) := x + k$ . O grupo das translações  $G = \{\tau_k: k \in \mathbb{Z}^n\} \simeq \mathbb{Z}^n$  é um exemplo dum grupo infinito propriamente descontínuo em  $\mathbb{R}^n$ .

O grupo de difeomorfismos  $G$  determina uma relação de equivalência  $\sim$  em  $X$ . Dois elementos  $x, y \in X$  dizem-se equivalentes se existir um difeomorfismo  $g \in G$  tal que  $y = g(x)$ . A classe de equivalência de  $x \in X$ ,

$$G(x) := \{g(x): g \in G\},$$

diz-se a  $G$ -órbita de  $x$ . Designamos por  $X/G$  o *espaço quociente*

$$X/G := \{G(x): x \in X\}$$

e por  $p: X \rightarrow X/G$  a projecção associada  $p(x) := G(x)$ . O espaço  $X/G$  é munido da topologia final, a mais fina de todas as topologias que tornam contínua a projecção  $p: X \rightarrow X/G$ . Por definição, um conjunto  $U \subset X/G$  é aberto se  $p^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .

**Proposição 14.5.2.** Sejam  $X$  uma variedade de dimensão  $n$  e  $G \subset \text{Dif}^\infty(X)$  um grupo de difeomorfismos propriamente descontínuo em  $X$ . Então

- (a)  $p: X \rightarrow X/G$  é um homeomorfismo local,
- (b)  $X/G$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$ ,
- (c)  $X/G$  admite uma estrutura de variedade abstracta tal que  $f: X/G \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável sse  $f \circ p: X \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável.

*Proof.* Dado  $x \in X$ , seja  $U \subset X$  um aberto tal que  $x \in U$  e para todo  $g \in G$ ,  $g \neq \text{id}_X$ ,  $U \cap g(U) = \emptyset$ . Segue que  $g(U) \cap g'(U) = \emptyset$  quaisquer que sejam  $g, g' \in G$  com  $g \neq g'$ . Logo, definindo  $\bar{U} := p(U)$  temos que  $p^{-1}(\bar{U}) = \cup_{g \in G} g(U)$  é a união disjunta dos conjuntos abertos  $g(U)$ , e  $p|_{g(U)}: g(U) \rightarrow \bar{U}$  é um homeomorfismo para cada  $g \in G$ . Isto prova (a), que  $p: X \rightarrow X/G$  é um homeomorfismo local.

As alíneas (b) e (c) seguem da Proposição 14.5.1. □

## 14.6 Espaço Projectivo

Dado um espaço linear  $E$ , o *espaço projectivo*  $\mathbb{P}(E)$  é o quociente do conjunto  $E \setminus \{0\}$  pela seguinte relação de equivalência: dois vectores não nulos  $u, v \in E$  são equivalentes, e escrevemos  $u \equiv v$ , se  $u = \lambda v$  para algum escalar  $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Cada elemento  $\hat{v} \in \mathbb{P}(E)$  é a classe de equivalência de um vector não nulo  $v \in E$ ,  $\hat{v} := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ , que se identifica com a recta gerada por  $v$ . Logo  $\mathbb{P}(E)$  pode ser visto com o conjunto de todos os subespaços vectoriais de  $E$  com dimensão igual a 1.

Em cada espaço linear  $E$  há uma aplicação quociente natural

$$\pi_E: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$$

que a cada vector não nulo  $v \in E$  associa o ponto projectivo  $\pi_E(v) = \hat{v}$  determinado por  $v$ . A topologia quociente de  $\mathbb{P}(E)$  caracteriza-se pelos seus abertos: um subconjunto  $U \subset \mathbb{P}(E)$  diz-se aberto sempre que  $(\pi_E)^{-1}(U)$  seja aberto em  $E \setminus \{0\}$ .

Consideremos agora a esfera

$$\mathbb{S}(E) := \{v \in E : \|v\|^2 = 1\}$$

que é uma variedade compacta e conexa de dimensão  $n - 1$  onde  $n = \dim E$ . Por restrição a projecção  $\pi_E: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  induz uma aplicação sobrejectiva

$$\pi_E: \mathbb{S}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E).$$

Como cada ponto  $\hat{v} \in \mathbb{P}(E)$  tem exactamente duas pré-imagens na esfera,  $(\pi_E)^{-1}(\hat{v}) = \{v, -v\}$ , esta aplicação é localmente injectiva, e sendo contínua é um homeomorfismo local. Este argumento prova que o espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  é uma variedade topológica compacta e conexa de dimensão  $n - 1$ .

O espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  pode também ser obtido como quociente da esfera  $\mathbb{S}(E)$  pelo grupo  $G = \{\text{id}, A\}$  onde designamos por  $A: \mathbb{S}(E) \rightarrow \mathbb{S}(E)$  o mapa antípoda  $A(v) := -v$ . Como  $A$  é uma involução, i.e.,  $A^2 = \text{id}$ ,  $G$  é um grupo de ordem 2 propriamente descontínuo em  $\mathbb{S}(E)$ . Logo, pela Proposição 14.5.2, o espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  admite uma estrutura de variedade abstracta tal que  $f: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável sse  $f \circ \pi_E: \mathbb{S}(E) \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável.

Qualquer monomorfismo  $L: E \rightarrow F$  induz uma aplicação dita *projectiva*

$$\mathbb{P}(L): \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F), \quad \mathbb{P}(L)(\hat{v}) := \widehat{Lv}$$

que se caracteriza pela comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{L} & F \setminus \{0\} \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\mathbb{P}(L)} & \mathbb{P}(F) \end{array} \quad (14.1)$$

Quando  $L$  não é injectiva também se pode definir a sua projectivização  $\mathbb{P}(L)$ , mas apenas como uma aplicação parcial, i.e., cujo domínio não é todo o projectivo  $\mathbb{P}(E)$ .

O grupo  $\text{GL}(E)$  dos automorfismos lineares  $\Phi: E \rightarrow E$  tem uma acção natural no projectivo  $\mathbb{P}(E)$ , definida à custa das aplicações projectivas  $\mathbb{P}(\Phi)$ ,

$$\cdot: \text{GL}(E) \times \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E), \quad \Phi \cdot \hat{v} := \mathbb{P}(\Phi)\hat{v}.$$

O espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  é o mais simples modelo compacto onde o grupo  $\text{GL}(E)$ , bem como os seus subgrupos, actuam naturalmente. Estas acções são habitualmente usadas para analisar a estrutura geométrica destes grupos de Lie.

**Ex 14.6.** Os espaços projectivos de dimensão ímpar são sempre orientáveis. Os de dimensão par nunca são.

**Sugestão:** Use o exercício 6.24 cujo conteúdo permanece válido para variedades abstractas. O espaço projectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  é o quociente da esfera  $\mathbb{S}^n$  pelo mapa *antipodal*  $A: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $A(x) := -x$ . Veja que  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  é orientável sse  $A: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  preserva a orientação. Conclua, aplicando o exercício 6.20.

## 14.7 Fibrados

Seja  $X$  uma variedade. Vamos chamar de *pré-fibrado vectorial* sobre  $X$  qualquer conjunto  $E \subset X \times \mathbb{R}^N$  tal que, para todo  $x \in X$ , o conjunto

$$E(x) := \{v \in \mathbb{R}^N : (x, v) \in E\},$$

dito a *fibra* de  $E$  no ponto  $x$ , seja um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^N$ .

O conjunto  $X \times \mathbb{R}^n$  é um modelo de um pré-fibrado vectorial, que é referido como o *fibrado constante* de base  $X$  e fibra  $\mathbb{R}^n$ .

Dados pré-fibrados vectoriais  $E \subset X \times \mathbb{R}^N$  e  $F \subset Y \times \mathbb{R}^{N'}$ , onde  $X$  e  $Y$  são variedades, chama-se *morfismo de fibrados* a qualquer mapa suave  $\Phi: E \rightarrow F$  que transforme fibras de  $E$  em fibras de  $F$  de forma linear. Por outras palavras,  $\Phi$  é um morfismo de fibrados se existirem aplicações suaves  $f: X \rightarrow Y$  e  $A: X \rightarrow \text{Mat}_{N' \times N}(\mathbb{R})$  tais que  $A(x)E(x) \subseteq F(f(x))$  para todo  $x \in X$ , e  $\Phi(x, v) = (f(x), A(x)v)$  para todo  $(x, v) \in E$ .

Os pré-fibrados com esta noção de morfismo formam uma categoria. Um morfismo de fibrados é um isomorfismo se for bijectivo (como aplicação) e a sua inversa for também um morfismo de fibrados.

Um pré-fibrado que seja isomorfo a um fibrado constante diz-se *trivial*. Finalmente chama-se *fibrado vectorial* a um qualquer pré-fibrado  $E$  de base  $X$  que seja localmente trivial, no sentido seguinte: para cada ponto  $x \in X$  existe um aberto  $U \subset X$  com  $x \in U$  tal que a restrição de  $E$  a este aberto

$$E_U := \{(x, v) \in E : x \in U\}$$

seja um fibrado trivial.

Os fibrados vectoriais e os morfismos de fibrados formam uma categoria.

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^N$ , o fibrado tangente  $TX$  e o fibrado normal  $TX^\perp$  são exemplos de fibrados vectoriais.

Para cada mapa suave entre variedades  $f: X \rightarrow Y$ , o mapa tangente  $Tf: TX \rightarrow TY$ , definido por  $Tf(x, v) := (f(x), Df_x v)$ , é um morfismo de fibrados vectoriais.

## 14.8 Combinações Lineares Formais

Dado um conjunto (finito ou infinito)  $S$  e um corpo de números  $\mathbb{K}$ , vamos definir o espaço  $\mathbb{K}^{(S)}$  das *combinações lineares formais* de objectos em  $S$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$ , que corresponde à *soma directa* de  $S$  cópias do corpo  $\mathbb{K}$ , também denotada por  $\mathbb{K}^{(S)} = \bigoplus_S \mathbb{K}$ .

Consideremos primeiro o espaço vectorial produto

$$\mathbb{K}^S := \{f : S \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é uma função } \}.$$

O *suporte* duma função  $f \in \mathbb{K}^S$  é dado por

$$\text{supp}(f) := \{s \in S : f(s) \neq 0\}.$$

Definimos  $\mathbb{K}^{(S)}$  como o conjunto das funções com suporte finito

$$\mathbb{K}^{(S)} := \{f \in \mathbb{K}^S : \text{supp}(f) \text{ é finito } \}.$$

Verifica-se facilmente que  $\mathbb{K}^{(S)}$  é um subespaço vectorial de  $\mathbb{K}^S$ .

Para cada elemento  $s \in S$  seja  $e_s : S \rightarrow \mathbb{K}$  a função

$$e_s(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = s \\ 0 & \text{se } x \neq s \end{cases}$$

que satisfaz  $\text{supp}(e_s) = \{s\}$ .

**Proposição 14.8.1.** Para cada  $f \in \mathbb{K}^{(S)}$ ,

$$f = \sum_{s \in \text{supp}(f)} f(s) e_s.$$

Em particular,  $\{e_s\}_{s \in S}$  é uma base do espaço vectorial  $\mathbb{K}^{(S)}$ .

*Proof.* Exercício. □

Fazendo as identificações  $e_s \equiv s$ , cada função  $f \in \mathbb{K}^{(S)}$  representa uma combinação linear formal  $f = \sum_s \alpha_s s$  onde  $\alpha_s = f(s) \in \mathbb{K}$  e a soma está indexada no suporte de  $f$ .

## 14.9 Homologia Singular

A Homologia singular satisfaz os axiomas de Eilenberg-Steenrod. Neste apêndice esboçamos (de forma informal e incompleta) os argumentos que justificam esta satisfação. Uma abordagem rigorosa ao tema pode por ser encontrada em [19].

Dada uma família de espaços topológicos  $\{X_i\}_{i \in I}$ , chama-se *soma directa* à união disjunta  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  destes espaços munida da seguinte topologia final. Por definição, um conjunto  $U \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$  é aberto se para todo  $i \in I$ ,  $X_i \cap U$  for um aberto de  $X_i$ .

**Proposição 14.9.1.** Se  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  é uma soma directa de espaços topológicos então

$$H_n(X) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i), \quad \forall n \geq 0.$$

*Proof.* Por construção cada  $X_i$  é um subconjunto aberto e fechado do espaço  $X$ . Logo  $S_n(X)$  é a união disjunta dos conjuntos  $S_n(X_i)$ , com  $i \in I$ , o que implica que

$$C_n(X, \mathbb{K}) = \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i, \mathbb{K}).$$

A decomposição em soma directa ao nível da homologia segue de termos  $\partial_n C_n(X_i, \mathbb{K}) \subseteq C_{n-1}(X_i, \mathbb{K})$ , para todo  $i \in I$  e  $n \geq 0$ , o que por sua vez implica que  $Z_n(X, \mathbb{K}) = \bigoplus_{i \in I} Z_n(X_i, \mathbb{K})$ , etc.  $\square$

**Proposição 14.9.2.** Se  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são mapas contínuos homotópicos então as aplicações lineares

$$H_n(f), H_n(g): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

coincidem.

*Proof.* Vamos supor que  $A = B = \emptyset$ . Seja  $\lambda = \sum_i \sigma_i$  um  $n$ -ciclo, i.e., uma  $n$ -cadeia singular tal que  $\partial \lambda = 0$ . Queremos ver que os  $n$ -ciclos imagem  $f_* \lambda := \sum_i f \circ \sigma_i$  e  $g_* \lambda := \sum_i g \circ \sigma_i$  são homólogos. Seja  $h_t$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Para cada  $n$ -simplexo singular  $\sigma$  definimos  $h_* \sigma: [0, 1] \times \Delta^n \rightarrow Y$  por  $(h_* \sigma)(t, x) = h_t \circ \sigma(x)$ . Observemos que o prisma  $[0, 1] \times \Delta^n$  é um poliedro de dimensão  $n+1$  que se pode decompor numa união de vários simplexes de dimensão  $n+1$ . Identificamos  $h_* \sigma$  com a  $n+1$ -cadeia singular, soma dos  $n+1$ -simplexos singulares resultantes dessa decomposição. Designamos por  $h_*: C_n(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_{n+1}(Y, \mathbb{K})$  a extensão linear a  $C_n(X, \mathbb{K})$  da aplicação  $S_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y, \mathbb{K})$ ,  $\sigma \mapsto h_* \sigma$ . O bordo da cadeia  $h_* \sigma$  tem duas componentes que correspondem às restrições de  $\sigma$  à base  $\{0\} \times \Delta^n$  e ao topo  $\{1\} \times \Delta^n$  do prisma  $[0, 1] \times \Delta^n$ . Estas componentes identificam-se naturalmente com

$g \circ \sigma - f \circ \sigma$ . Além delas, o bordo da cadeia  $h_*\sigma$  tem também componentes correspondentes às restrições de  $\sigma$  às faces laterais do prisma, faces em  $[0, 1] \times \partial\Delta^n$ . A soma destas componentes de  $h_*\sigma$  corresponde exactamente à cadeia singular  $h_*\partial\sigma$ .

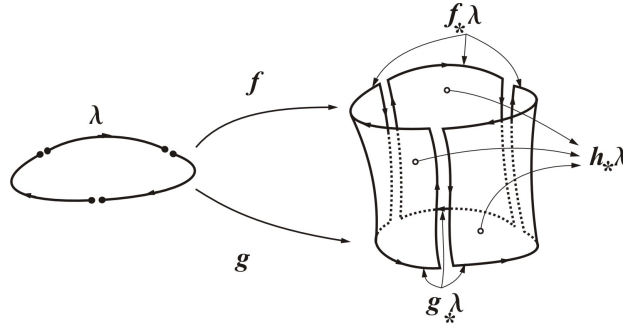


Figure 14.1: Invariância por homotopia

Resumindo, é válida a seguinte fórmula de homotopia

$$\partial h_*\sigma = g \circ \sigma - f \circ \sigma + h_*\partial\sigma .$$

Fazendo  $\sigma = \sigma_i$ , e somando em  $i$ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial h_*\lambda &= \sum_i \partial h_*\sigma_i \\ &= \sum_i g \circ \sigma_i - f \circ \sigma_i + \sum_i h_*\partial\sigma \\ &= g_*\lambda - f_*\lambda + h_*\partial\lambda \\ &= g_*\lambda - f_*\lambda , \end{aligned}$$

porque  $\partial\lambda = 0$ . Logo, os  $n$ -ciclos  $f_*\lambda$  e  $g_*\lambda$  são homólogos. □

Para cada par  $(X, A)$  de espaços topológicos, e cada inteiro  $n \geq 1$ , existe um *morfismo de bordo*

$$\delta_n = \delta_n^{(X,A)}: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

definido por  $\delta_n[\tau] := [\partial\tau] \in H_{n-1}(A)$ . Observamos que uma classe de homologia  $[\tau] \in H_n(X, A)$  é da forma  $[\tau] = \tau + B_n(X, A)$  com  $\tau \in Z_n(X, A)$ , o que implica que  $\partial\tau \in Z_{n-1}(A)$ .

Esta construção é uma transformação natural entre funtores homologia (ver Apêndice 14.4). Se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é contínua então

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, B) \\
\delta_n \downarrow & & \downarrow \delta_n \\
H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(B)
\end{array}$$

é um diagrama comutativo.

**Proposição 14.9.3.** Sejam  $(X, A)$  um par de espaços topológicos e  $i: A \rightarrow X$  e  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  as aplicações de inclusão. Então a sequência de espaços de homologia associada ao par  $(X, A)$

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

é exacta.

*Proof.* Os mapas contínuos  $(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$  induzem uma sequência exacta de morfismos de complexos (Apêndice 14.10)

$$0 \rightarrow C_*(A) \xrightarrow{C_*(i)} C_*(X) \xrightarrow{C_*(j)} C_*(X, A) \rightarrow 0.$$

A conclusão segue da Proposição 14.10.5, confirmando que a definição dada acima do morfismo de bordo  $\delta_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  coincide com a caracterização apresentada no Apêndice 14.10 a seguir à Proposição 14.10.5.  $\square$

**Proposição 14.9.4.** Seja  $U \subset X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ . Então a aplicação de inclusão  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo

$$H_n(i): H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$$

*Proof.* O simplexo singular  $\Delta^n$  pode ser ‘triangulado’ em sub-simplexos arbitrariamente pequenos. Usando este tipo de decomposição, cada simplexo singular  $\sigma \in S_n(X)$  é homólogo a uma soma  $\sum_j \sigma_j$  de simplexos singulares  $\sigma_j$  arbitrariamente pequenos. Aplicado componente a componente, este procedimento de subdivisão estende-se a cadeias singulares.

Suponhamos que  $X$  é um espaço métrico compacto. Como  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ , existe  $\delta > 0$  tal que todo o subconjunto  $C \subset X$  com diâmetro  $\text{diam}(C) < \delta$  que intersecte  $\bar{U}$  está contido em  $A$ .

■ Sobrejectividade de  $H_n(i)$ .

Dado  $[\lambda] \in H_n(X, A)$ , Seja  $\sum_j \lambda_j$  uma decomposição de  $\lambda$  em sub-simplexos singulares com diâmetro  $< \delta$ . Seja  $\varepsilon$  a cadeia singular obtida somando todos simplexos singulares  $\lambda_i$  que intersectam  $\bar{U}$ . Podemos decompor



$\lambda = \mu + \varepsilon$  com  $\mu \in C_n(X \setminus U)$  e  $\varepsilon \in C_n(A)$ . Como  $[\lambda] \in H_n(X, A)$  temos  $\partial\lambda \in Z_{n-1}(A)$ . Logo  $\partial\mu = \partial\lambda - \partial\varepsilon \in Z_n(A)$ . De facto, porque  $\mu \in C_n(X \setminus U)$  temos  $\partial\mu \in Z_n(A \setminus U)$ . Isto mostra que  $\mu$  define uma classe de homologia  $[\mu] \in H_n(X \setminus U, A \setminus U)$  que, via inclusão  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  se identifica com a classe de homologia  $i_*[\mu] = [\mu] = [\lambda] \in H_n(X, A)$ .

■ Injetividade de  $H_n(i)$ .

Seja  $[\lambda] \in H_n(X \setminus U, A \setminus U)$ , tal que  $i_*[\lambda] = 0$  em  $H_n(X, A)$ . Então  $\lambda \in C_n(X \setminus U)$ ,  $\partial\lambda \in Z_{n-1}(A \setminus U)$ . Além disso, porque  $i_*[\lambda] = 0$  em  $H_n(X, A)$  temos  $\lambda = \partial\beta + \mu$  com  $\beta \in C_{n+1}(X)$  e  $\mu \in Z_n(A)$ . Subdividindo podemos decompor  $\beta = \beta' + \varepsilon$  com  $\varepsilon \in C_{n+1}(A)$  e  $\beta' \in C_{n+1}(X \setminus U)$ . Logo  $\lambda = \partial\beta' + \partial\varepsilon + \mu$  com  $\partial\varepsilon + \mu \in Z_n(A)$ . Por outro lado, como  $\partial\varepsilon + \mu = \lambda - \partial\beta' \in C_n(X \setminus U)$ , temos  $\partial\varepsilon + \mu \in Z_n(A \setminus U)$ . Isto prova que  $[\lambda] = 0$  em  $H_n(X \setminus U, A \setminus U)$ .  $\square$

**Proposição 14.9.5.** Se  $X = \{p\}$  é um espaço singular,  
 $H_0(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$  e  $H_n(X, \mathbb{K}) = 0$ ,  $\forall n > 0$ .

*Proof.* Os 0-simplexos singulares em  $X$  identificam-se naturalmente com os pontos de  $X$ , e toda a 0-cadeia singular é um 0-ciclo. Dados pontos  $p, q \in X$ , a 0-cadeia  $p - q$  é o bordo duma 1-cadeia sse existir um caminho contínuo  $\gamma$  ligando  $q$  a  $p$ , ou seja tal que  $p - q = \partial\gamma$ . Logo, a classe de homologia  $[p]$  dum ponto  $p \in X$  identifica-se naturalmente com a componente conexa (por caminhos) de  $p$  na variedade  $X$ .

Quando  $X = \{p\}$  a classe de homologia  $[p] \in H_0(X, \mathbb{K})$  é uma base deste espaço. Por outro lado,  $S_n(X)$  é o conjunto singular formado pelo simplexo singular constante. Logo  $C_n(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$  para todo  $n \geq 0$ . Como o simplexo canónico  $\Delta^n$  tem  $n+1$  faces, o operador de bordo  $\partial_n: C_n(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_{n-1}(X, \mathbb{K})$  anula-se quando  $n+1$  é par, sendo um isomorfismo entre espaços de dimensão 1 quando  $n+1$  é ímpar. Destes factos resulta facilmente que  $H_n(X, \mathbb{K}) = \{0\}$ , para todo  $n > 0$ .  $\square$

## 14.10 Álgebra Homológica

Chama-se *complexo de cadeias*, ou simplesmente *complexo*, a um par  $(C_*, \partial_*)$  onde  $C_* = \{C_n\}_{n \geq 0}$  é uma família de espaços vectoriais e  $\partial_* = \{\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \geq 1}$  uma família de aplicações lineares tais que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Dados dois complexos de cadeias  $(C_*, \partial_*)$  e  $(D_*, \partial_*)$  chama-se *morfismo de complexos* a uma família  $f_* = \{f_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \geq 0}$  de aplicações lineares tais que  $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$  para todo  $n \geq 1$ . Por outras palavras devem ser comutativos os diagramas seguintes

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

Dado um espaço topológico  $X$  e fixado um corpo  $\mathbb{K}$ , a sequência de espaços de cadeias singulares  $C_*(X, \mathbb{K}) := \{C_n(X, \mathbb{K})\}_{n \geq 0}$  e os respectivos operadores de bordo  $\partial_n: C_n(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_{n-1}(X, \mathbb{K})$  formam um complexo de cadeias. Mais geralmente, dado um par de espaços topológicos  $(X, A)$  a sequência de espaços  $\{C_n(X, A, \mathbb{K})\}_{n \geq 0}$  de cadeias singulares relativas e os respectivos operadores de bordo  $\partial_n: C_n(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow C_{n-1}(X, A, \mathbb{K})$  formam também um complexo de cadeias.

Cada mapa contínuo  $f: X \rightarrow Y$  determina um morfismo de complexos  $C_*(f) := \{C_n(f): C_n(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_n(Y, \mathbb{K})\}_{n \geq 0}$ . Além disso se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um mapa contínuo, i.e., se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua tal que  $f(A) \subset B$ , então o morfismo  $C_*(f): C_*(X, \mathbb{K}) \rightarrow C_*(Y, \mathbb{K})$  induz um morfismo de complexos, igualmente denotado por  $C_*(f)$ , entre os espaços quociente  $C_n(X, A, \mathbb{K}) := C_n(X, \mathbb{K})/C_n(A, \mathbb{K})$  e  $C_n(Y, B, \mathbb{K}) := C_n(Y, \mathbb{K})/C_n(B, \mathbb{K})$ .

**Proposição 14.10.1.** A correspondência que a cada par  $(X, A)$  de espaços topológicos associa o complexo das cadeias singulares  $C_*(X, A, \mathbb{K})$ , e a cada mapa contínuo  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  associa o morfismo de complexos de cadeias  $C_*(f): C_*(X, A, \mathbb{K}) \rightarrow C_*(Y, B, \mathbb{K})$ , é um functor da categoria  $\mathfrak{Top}_2$ , dos pares de espaços topológicos, na categoria dos complexos de cadeias.

*Proof.* Exercício. □

Dado um complexo de cadeias  $(C_*, \partial_*)$  definem-se os subespaços de *n-ciclos* e *n-bordos*

$$\begin{aligned} Z_n(C_*) &:= \text{Nuc}(\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}), \\ B_n(C_*) &:= \text{Im}(\partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n). \end{aligned}$$

Chama-se  $n$ -ésimo *espaço de homologia* de um complexo de cadeias  $C_*$  ao quociente

$$H_n(C_*) := \frac{Z_n(C_*)}{B_n(C_*)}.$$

Todo o morfismo de complexos  $f_*: C_* \rightarrow D_*$  transforma  $Z_n(C_*)$  em  $Z_n(D_*)$ , e transforma  $B_n(C_*)$  em  $B_n(D_*)$ . Assim, o morfismo de complexos  $f_*$  induz para cada  $n \in \mathbb{N}$  uma aplicação linear quociente entre os espaços de homologia

$$H_n(f_*): H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*).$$

**Proposição 14.10.2.** Fixado um inteiro  $n \geq 0$ , a correspondência que a cada complexo de cadeias  $(C_*, \partial_*)$  associa o  $n$ -ésimo espaço de homologia  $H_n(C_*)$ , e a cada morfismo de complexos  $f_*: C_* \rightarrow D_*$  associa a aplicação linear  $H_n(f_*): H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$ , é um functor da categoria dos complexos de cadeias na categoria dos espaços vectoriais.

*Proof.* Exercício. □

Chama-se *sequência exacta longa* a uma sequência de aplicações lineares entre espaços vectoriais

$$\cdots \longrightarrow E_n \xrightarrow{\delta_n} E_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} E_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\delta_1} E_0 \xrightarrow{\delta_0} 0$$

tal que  $\text{Im}(\delta_n) = \text{Nuc}(\delta_{n-1})$  para todo  $n \geq 1$ .

**Proposição 14.10.3.** A sequência de aplicações lineares

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$$

é exacta sse  $f: E \rightarrow F$  é um isomorfismo.

*Proof.* Exercício. □

**Proposição 14.10.4.** Seja

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

uma sequência de aplicações lineares tal que  $g \circ f = 0$ . Esta sequência é exacta sse  $\dim F = \dim E + \dim G$ .

*Proof.* Exercício. □

Chama-se *sequência exacta curta* de morfismos de complexos a uma sequência

$$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{f_*} D_* \xrightarrow{g_*} E_* \rightarrow 0$$

constituída por um par de morfismos de complexos tal que para cada  $n \geq 0$

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \rightarrow 0$$

seja uma sequência exacta de aplicações lineares.

**Proposição 14.10.5.** Dada uma sequência exacta curta

$$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{f_*} D_* \xrightarrow{g_*} E_* \rightarrow 0$$

de morfismos de complexos existe para cada  $n \geq 1$  uma aplicação linear  $\delta_n: H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*)$  tal que

$$\cdots \rightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D_*) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C_*) \rightarrow \cdots$$

seja uma sequência exacta de aplicações lineares.

Além disso, se

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_* & \xrightarrow{f_*} & D_* & \xrightarrow{g_*} & E_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha_* \downarrow & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_* & \xrightarrow{f'_*} & D'_* & \xrightarrow{g'_*} & E'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

for um diagrama comutativo de complexos em que as linhas são sequências exactas curtas então

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \rightarrow & H_n(C_*) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(D_*) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(E_*) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(C_*) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow H_n(\alpha) & & \downarrow H_n(\beta) & & \downarrow H_n(\gamma) & & \downarrow H_{n-1}(\alpha) & \\ \cdots \rightarrow & H_n(C'_*) & \xrightarrow{H_n(f')} & H_n(D'_*) & \xrightarrow{H_n(g')} & H_n(E'_*) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(C'_*) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

é um diagrama comutativo de complexos em que as linhas são sequências exactas longas.

*Proof.* Ver [15]. □

A aplicação linear  $\delta_n: H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*)$  é definida usando a exactidão das linhas do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (14.2)$$

Dado  $[x] := x + B_n(E_*) \in H_n(E_*)$  com  $x \in Z_n(E_*)$ , porque  $g_n$  é sobrejectiva existe  $y \in D_n$  tal que  $g_n(y) = x$ . Como  $g_{n-1}(\partial_n y) = \partial_n(g_n(y)) = \partial_n x = 0$  por exactidão de (14.2) existe  $z \in C_{n-1}$  tal que  $f_{n-1}(z) = \partial_n y$ .

A aplicação  $\delta_n: H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*)$  é definida por

$$\delta_n[x] := z + B_{n-1}(C_*) \in H_{n-1}(C_*), \quad (14.3)$$

onde  $z \in Z_{n-1}(C_*)$  porque  $f_{n-2}$  é injectiva e

$$f_{n-2}(\partial_{n-1} z) = \partial_{n-1} f_{n-1}(z) = \partial_{n-1} \partial_n y = 0.$$

## 14.11 Complexos Simpliciais

Chama-se *simplexo* de dimensão  $n$  ao invólucro convexo

$$\Delta := \left\{ \sum_{j=0}^n t_j p_j : t_j \geq 0, \sum_{j=0}^n t_j = 1 \right\}$$

dum conjunto de  $n + 1$  pontos  $\{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^N$  que sejam independentes do ponto vista afim, i.e., tal que  $\{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^N$  não esteja contido em nenhum subespaço afim de dimensão  $< n$ . As combinações convexas de qualquer subconjunto  $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\} \subset \{p_0, \dots, p_n\}$  com  $k + 1$  elementos determinam um simplexo de dimensão  $k + 1$  que se diz uma *face* de  $\Delta$ .

Chama-se *complexo simplicial* a uma família  $\mathcal{K}$  de simplexos num espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^N$  tal que toda a face dum simplexo em  $\mathcal{K}$  está em  $\mathcal{K}$ , e a intersecção de dois simplexos em  $\mathcal{K}$  é uma face comum a ambos. Designa-se por  $|\mathcal{K}|$  o subespaço topológico de  $\mathbb{R}^N$  formado pela união de todos os simplexos em  $\mathcal{K}$ . A maior dimensão de um simplexo em  $\mathcal{K}$  diz-se a dimensão de  $\mathcal{K}$  e denota-se por  $\dim(\mathcal{K})$ . Definindo

$$\mathcal{K}_i := \{\Delta \in \mathcal{K} : \dim(\Delta) = i\}, \quad 0 \leq i \leq \dim(\mathcal{K})$$

os elementos de  $\mathcal{K}_0$  dizem-se os *vértices* de  $\mathcal{K}$ , enquanto os elementos de  $\mathcal{K}_1$  se dizem as *arestas* de  $\mathcal{K}$ .

O  $n$ -simplexo canónico  $\Delta^n$  é um exemplo dum simplexo. Se lhe juntarmos todas as suas faces obtemos um exemplo dum complexo simplicial, que continuaremos a denotar por  $\Delta^n$ .

Dados dois complexos simpliciais  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}'$ , chama-se *mapa simplicial* a uma aplicação contínua  $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{K}'|$  tal que para todo o simplexo  $\Delta \in |\mathcal{K}|$ ,  $f(\Delta)$  é um simplexo de  $\mathcal{K}'$  e  $f|_{\Delta}: \Delta \rightarrow f(\Delta)$  é a restrição duma aplicação afim. Os complexos e os mapas simpliciais formam uma categoria.

Dado um complexo simplicial  $\mathcal{K}$  e um inteiro  $k \geq 0$ , designamos por  $S_k(\mathcal{K})$  o conjunto de todos os mapas simpliciais  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathcal{K}$ . Chama-se *k-cadeia* de  $\mathcal{K}$  com coeficientes num corpo  $\mathbb{K}$  a uma combinação linear formal  $\sum_{j=1}^l \alpha_j \sigma_j$  onde  $\sigma_j \in S_k(\mathcal{K})$  e  $\alpha_j \in \mathbb{K}$  para todo  $j = 1, \dots, l$ . Designa-se por  $C_k(\mathcal{K}, \mathbb{K})$  o espaço de todas as  $k$ -cadeias do complexo  $\mathcal{K}$ . Como um mapa simplicial  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathcal{K}$  é em particular um mapa contínuo  $\sigma: \Delta^k \rightarrow |\mathcal{K}|$ , toda a  $k$ -cadeia de  $\mathcal{K}$  é uma  $k$ -cadeia singular de  $|\mathcal{K}|$ . Logo para todo o inteiro  $k \geq 0$  temos

$$C_k(\mathcal{K}, \mathbb{K}) \subset C_k(|\mathcal{K}|, \mathbb{K}).$$

Facilmente se verifica que os espaços de cadeias  $C_k(\mathcal{K}, \mathbb{K})$  ficam invariantes pelo operador de bordo  $\partial_*$  do complexo de cadeias singulares  $C_*(|\mathcal{K}|, \mathbb{K})$ . A família  $C_*(\mathcal{K}, \mathbb{K}) = \{C_n(\mathcal{K}, \mathbb{K})\}_{n \geq 0}$  com o operador de bordo induzido forma assim um complexo de cadeias abstracto.

**Proposição 14.11.1.** Os complexos de cadeias simpliciais  $C_*(\mathcal{K}, \mathbb{K})$  e singulares  $C_*(|\mathcal{K}|, \mathbb{K})$  determinam a mesma homologia.

*Proof.* Ver [19, Teorema 34.3].  $\square$

Um complexo simplicial  $\mathcal{K}$  com  $\dim(\mathcal{K}) = n$  diz-se uma *variedade simplicial* (sem bordo) se o espaço  $|\mathcal{K}|$  for uma variedade topológica (sem bordo), i.e., se para cada ponto  $p \in |\mathcal{K}|$  existir uma vizinhança aberta de  $p$  em  $|\mathcal{K}|$  que seja homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Toda a variedade simplicial  $\mathcal{K}$  com  $\dim(\mathcal{K}) = n$  satisfaz a seguinte propriedade: Para cada simplexo  $\sigma \in \mathcal{K}$  com  $\dim(\sigma) = n - 1$  existem exactamente dois simplexos  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{K}$  com  $\dim(\Delta) = \dim(\Delta') = n$  tais que  $\sigma$  é uma face comum de  $\Delta$  e  $\Delta'$ .

Seja  $X$  uma variedade. Chama-se *triângulação* de  $X$  a um par  $(\mathcal{K}, f)$  formado por uma variedade simplicial sem bordo  $\mathcal{K}$  e um homeomorfismo  $f: |\mathcal{K}| \rightarrow X$ .

**Teorema 14.11.1.** Toda a variedade sem bordo  $X$  admite uma triângulação  $(\mathcal{K}, f)$ . Se  $X$  for compacto a variedade simplicial  $\mathcal{K}$  é finita.

*Proof.* Ver por exemplo [2].  $\square$

Seja  $\mathcal{K}$  uma variedade simplicial finita de dimensão  $n$ . Designamos por  $\mathcal{K}_n$  o conjunto dos simplexos  $n$ -dimensionais de  $\mathcal{K}$ . Para cada simplexo  $\Delta \in \mathcal{K}_n$  seja  $\sigma_\Delta: \Delta^n \rightarrow \Delta$  um isomorfismo simplicial arbitrariamente escolhido. Da propriedade mencionada das variedades simpliciais resulta que a cadeia

$$\lambda_{\mathcal{K}} := \sum_{\Delta \in \mathcal{K}_n} \sigma_\Delta$$

é um ciclo em  $C_n(\mathcal{K}, \mathbb{Z}_2)$ . Os bordos cancelam-se dois a dois porque  $2 = 0$  em  $\mathbb{Z}_2$ . Este ciclo determina uma classe de homologia não nula  $[\lambda_{\mathcal{K}}] \in H_n(\mathcal{K}, \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{Z}_2)$ .

Numa variedade compacta, conexa e sem bordo  $X$ , com  $\dim(X) = n$ , o espaço de homologia  $H_n(X, \mathbb{Z}_2)$  tem dimensão 1 e via triângulação admite um gerador canónico denotado por  $[\lambda_X]$ .

Dizemos que dois simplexos  $\Delta$  e  $\Delta'$  de dimensão  $n$  são *adjacentes* se a sua intersecção for uma face comum de dimensão  $n - 1$ . Fixadas orientações em dois simplexos adjacentes  $\Delta$  e  $\Delta'$ , dizemos que elas são *compatíveis* se os simplexos orientados  $\Delta$  e  $\Delta'$  induzirem orientações opostas na face comum.

Seja agora  $\mathcal{K}$  uma variedade simplicial de dimensão  $n$ . Vamos chamar *orientação* de  $\mathcal{K}$  à escolha de uma orientação em cada simplexo  $\Delta \in \mathcal{K}_n$  de modo que as orientações em simplexos adjacentes de dimensão  $n$  sejam sempre compatíveis. Chamamos *variedade simplicial orientada* a uma variedade simplicial  $\mathcal{K}$  munida duma orientação.

Do Teorema 14.11.1 resulta:

**Corolário 14.11.1.** Toda a variedade orientada sem bordo  $X$  admite uma triângulação  $(\mathcal{K}, f)$ , onde  $\mathcal{K}$  é uma variedade simplicial orientada.

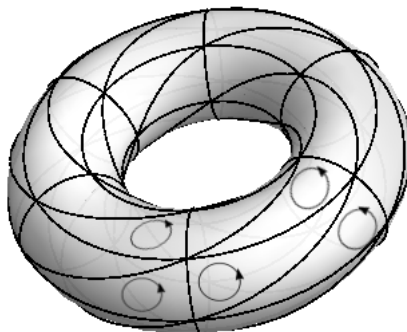


Figure 14.2: Triângulação orientada do 2-toro

Seja  $\mathcal{K}$  uma variedade simplicial orientada e finita de dimensão  $n$ . Para cada simplexo  $\Delta \in \mathcal{K}_n$  seja  $\sigma_\Delta: \Delta^n \rightarrow \Delta$  um isomorfismo simplicial que preserve a orientação, mas de resto arbitrário. Da propriedade mencionada das variedades simpliciais resulta que a cadeia

$$\lambda_{\mathcal{K}} := \sum_{\Delta \in \mathcal{K}_n} \sigma_\Delta$$

é um ciclo em  $C_n(\mathcal{K}, \mathbb{K})$ , qualquer que seja o corpo  $\mathbb{K}$ . Pela compatibilidade das orientações em simplexos adjacentes de dimensão  $n$ , os bordos cancelam-se dois a dois. Este ciclo determina uma classe de homologia não nula  $[\lambda_{\mathcal{K}}] \in H_n(\mathcal{K}, \mathbb{K}) \simeq H_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{K})$ .

Numa variedade compacta, conexa e sem bordo  $X$ , com  $\dim(X) = n$ , o espaço de homologia  $H_n(X, \mathbb{K})$  tem dimensão 1 e via triangulação admite um gerador canónico denotado por  $[\lambda_X]$ .



## 14.12 Geometria Diferencial

Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade. Neste apêndice introduzimos alguns conceitos de Geometria Diferencial que descrevem a forma de  $X$  enquanto subvariedade do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^N$ .

A estrutura Euclidiana do espaço ambiente  $\mathbb{R}^N$  determina em  $X$  uma estrutura Riemanniana definida pelos produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  induzidos no espaço tangente  $T_x X$  pela estrutura Euclidiana de  $\mathbb{R}^N$ . A forma quadrática associada  $I_x: T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_x(x, v) := \langle v, v \rangle_x = \|v\|_x^2$ , é conhecida como a *primeira forma fundamental* de  $(X, x)$ . Comprimentos, ângulos e distâncias em  $X$  são exemplos de conceitos Riemannianos, que podem ser medidos usando da primeira forma fundamental. O gradiente dum função (definição 3.5.1) é outro exemplo dum conceito Riemanniano.

A *segunda forma fundamental* de  $(X, x)$  é uma aplicação bilinear simétrica  $B_x: T_x X \times T_x X \rightarrow T_x X^\perp$  que numa aproximação de segunda ordem descreve a forma de  $(X, x)$  no seu ambiente Euclidiano (ver proposição 14.12.2).

Dados  $x \in X$  e  $u, v \in T_x X$  definimos

$$\Pi_x(u, v) := \{w \in \mathbb{R}^N : (v, w) \in T_{(x,u)} TX\}.$$

**Proposição 14.12.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade. Dados  $x \in X$  e  $u, v \in T_x X$ ,  $\Pi_x(u, v)$  é um subespaço afim de  $\mathbb{R}^N$  paralelo a  $T_x X$ , ou seja um elemento do espaço quociente  $\mathbb{R}^N/T_x X$ . Além disso a aplicação  $\Pi_x: T_x X \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}^N/T_x X$  é bilinear e simétrica.

*Proof.* Pelo teorema 2.1.1 para cada ponto  $p \in X$  existem uma função suave  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $p$ , e um valor regular  $b \in \mathbb{R}^{n-k}$  de  $f$  tais que  $X \cap U = f^{-1}(b)$ .

Pelo exercício 1.23 temos para todo  $x \in X \cap U$  que

$$\Pi_x(u, v) = \{w \in \mathbb{R}^N : Df_x(w) + D^2f_x(u, v) = 0\},$$

e este é um subespaço afim paralelo a

$$T_x X = \{w \in \mathbb{R}^N : Df_x(w) = 0\}.$$

A bilinearidade e simetria de  $\Pi_x$  seguem das correspondentes propriedades de  $D^2f_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .  $\square$

**Definição 14.12.1.** A *segunda forma fundamental* de  $(X, x)$  é a aplicação bilinear simétrica  $B_x: T_x X \times T_x X \rightarrow T_x X^\perp$  onde  $B_x(u, v)$  é o único ponto na intersecção  $\Pi_x(u, v) \cap T_x X^\perp$ , quaisquer que sejam  $u, v \in T_x X$ .

**Proposição 14.12.2.** Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{R}^N$  e um ponto  $x \in X$  existem uma função suave  $g_x: V \subset T_x X \rightarrow T_x X^\perp$  definida numa vizinhança de 0 em  $T_x X$  tal que

- (a) O gráfico  $\{x + u + g_x(u) : u \in V\}$  é uma vizinhança aberta de  $x$  em  $X$ .
- (b)  $g_x(0) = 0, D(g_x)_0 = 0$ .
- (c)  $B_x = D^2(g_x)_0$ .

*Proof.* Suponhamos que existe uma função suave  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo o ponto  $x$ , com um valor regular  $b \in \mathbb{R}^{n-k}$  tal que  $X \cap U = f^{-1}(b)$ . Pelo Teorema 1.2.1 (Função implícita) existe uma aplicação suave  $g_x: V \subset T_x X \rightarrow T_x X^\perp$ , definida numa vizinhança  $V \subset T_x X$  de  $u = 0$ , tal que para todo  $u \in T_x X$

$$f(x + u + g_x(u)) = b. \quad (14.4)$$

Derivando (14.4) em  $u$ , na direcção dum vector  $v \in T_x X$  obtemos para todo  $v \in T_x X$

$$Df_{x+u+g_x(u)}(v + D(g_x)_u(v)) = 0. \quad (14.5)$$

Fazendo  $u = 0$  nesta relação, como  $Df_x(v) = 0$  obtemos  $Df_x(D(g_x)_0(v)) = 0$ . Logo porque  $Df_x|_{T_x X^\perp}: T_x X^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é um isomorfismo segue que  $D(g_x)_0(v) = 0$  para todo  $v \in T_x X$ , o que prova (b).

Derivando (14.5) em  $u$  no ponto  $u = 0$ , na direcção de  $v' \in T_x X$  obtemos

$$D^2 f_x(v, v') + Df_x(D^2(g_x)_0(v, v')) = 0$$

o que implica que  $D^2(g_x)_0(v, v') \in \Pi_x(v, v')$ . Como  $g_x$  toma valores em  $T_x X^\perp$ ,  $D^2(g_x)_0(v, v') \in T_x X^\perp$  e pela Definição 14.12.1 podemos concluir que  $D^2(g_x)_0(v, v') = B_x(v, v')$ .  $\square$

**Proposição 14.12.3.** Seja  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um campo tal que  $\xi(p) = v$ . Para todo  $u \in T_p X$ ,

$$B_p(v, u) = (D\xi_p(u))^N.$$

*Proof.* Dado  $u \in T_p X$ , como  $(x, \xi(x)) \in TX$  para todo  $x \in X$ , derivando temos  $(u, D\xi_p(u)) \in T_{(p,v)}(TX)$ . Por outro lado temos  $(0, (D\xi_p(u))^T) \in T_{(p,v)}(TX)$ , pelo que

$$(u, (D\xi_p(u))^N) = (u, D\xi_p(u)) - (0, (D\xi_p(u))^T) \in T_{(p,v)}(TX).$$

Logo  $B_p(v, u) = (D\xi_p(u))^N$ , porque  $(D\xi_p(u))^N \in T_p X^\perp$ .  $\square$

**Definição 14.12.2.** Chama-se segunda derivada de  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $p \in X$  à aplicação bilinear simétrica  $\nabla^2 f_p: T_p X \times T_p X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\nabla^2 f_p(u, v) := D^2 \tilde{f}_p(u, v) + D\tilde{f}_p(B_p(u, v)),$$

onde  $\tilde{f}$  é uma extensão local de  $f$  a uma vizinhança aberta de  $p$  em  $\mathbb{R}^N$ .

**Proposição 14.12.4.** Na definição anterior  $\nabla^2 f_p(u, v)$  não depende da extensão local  $\tilde{f}$ .

*Proof.* Use o Exercício 1.24.  $\square$

Na Proposição 14.12.14 mostramos que a derivada  $\nabla^2 f$  é um conceito intrínseco, i.e., de Geometria Riemanniana.

Dados  $x \in X$  e  $\eta \in T_x X^\perp$  e  $u \in T_x X$  definimos

$$\Pi_x^\perp(\eta, u) := \{w \in \mathbb{R}^N : (u, w) \in T_{(x, \eta)}(TX^\perp)\}.$$

**Proposição 14.12.5.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade. Dados  $x \in X$ ,  $\eta \in T_x X^\perp$  e  $u \in T_x X$ ,  $\Pi_x^\perp(\eta, u)$  é um subespaço afim de  $\mathbb{R}^N$  paralelo a  $T_x X^\perp$ , ou seja um elemento do espaço quociente  $\mathbb{R}^N/T_x X^\perp$ . Além disso a aplicação  $\Pi_x^\perp : T_x X^\perp \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}^N/T_x X^\perp$  é bilinear.

*Proof.* Pelo teorema 2.1.1 para cada ponto  $p \in X$  existem uma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $p$ , e um valor regular  $b \in \mathbb{R}^{n-k}$  de  $f$  tais que  $X \cap U = f^{-1}(b)$ .

Usando a notação e os campos introduzidos na sugestão do Exercício 3.7 temos para todo  $(x, \eta) \in T(X \cap U)^\perp$  e  $u \in T_x X$ ,

$$\Pi_x^\perp(\eta, u) = \{w \in \mathbb{R}^N : \xi_j(x) \cdot w + (D\xi_j)_x(u) \cdot \eta = 0, \forall 1 \leq j \leq n - k\},$$

e este é um subespaço afim paralelo a

$$T_x X^\perp = \{w \in \mathbb{R}^N : \xi_j(x) \cdot w = 0, \forall 1 \leq j \leq n - k\}.$$

A bilinearidade de  $\Pi_x^\perp$  resulta de serem bilineares as aplicações  $(\eta, u) \mapsto (D\xi_j)_x(u) \cdot \eta$ , para  $1 \leq j \leq n - k$ .  $\square$

**Definição 14.12.3.** A segunda forma fundamental de  $TX^\perp$  no ponto  $x$  é a aplicação bilinear simétrica  $B_x^\perp : T_x X^\perp \times T_x X \rightarrow T_x X$  onde  $B_x^\perp(\eta, u)$  é o único ponto na intersecção  $\Pi_x^\perp(u, v) \cap T_x X$ , quaisquer que sejam  $\eta \in T_x X^\perp$  e  $u \in T_x X$ .

**Proposição 14.12.6.** Seja  $\eta \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$  um campo tal que  $\eta(p) = v$ . Para todo  $u \in T_p X$ ,

$$B_p^\perp(v, u) = (D\eta_p(u))^T.$$

*Proof.* Dado  $u \in T_p X$ , como  $(x, \eta(x)) \in TX^\perp$  para todo  $x \in X$ , derivando temos  $(u, D\eta_p(u)) \in T_{(p, v)}(TX^\perp)$ . Por outro lado temos  $(0, (D\eta_p(u))^N) \in T_{(p, v)}(TX^\perp)$ , pelo que

$$(u, (D\eta_p(u))^T) = (u, D\eta_p(u)) - (0, (D\eta_p(u))^N) \in T_{(p, v)}(TX).$$

Logo  $B_p^\perp(v, u) = (D\eta_p(u))^T$  porque  $(D\eta_p(u))^T \in T_p X$ .  $\square$

Sejam  $X$  uma variedade e  $E \subset X \times \mathbb{R}^N$  um fibrado vectorial de base  $X$ .

Chama-se *secção suave* de  $E$  a uma aplicação suave  $\xi: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\xi(x) \in E(x)$  para todo  $x \in X$ . Designamos por  $\Gamma^\infty(E)$  o espaço das secções suaves do fibrado  $E$ .

O espaço das secções do fibrado tangente  $TX$  coincide com o espaço dos campos de vectores tangentes a  $X$ , i.e.,  $\Gamma^\infty(TX) = \mathcal{X}^\infty(X)$ . Analogamente o espaço das secções do fibrado normal  $TX^\perp$  coincide com o espaço dos campos de vectores normais a  $X$ , i.e.,  $\Gamma^\infty(TX^\perp) = \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ .

**Definição 14.12.4.** *Chama-se derivada covariante do fibrado  $E$  a uma aplicação*

$$\nabla: \mathcal{X}^\infty(X) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E), \quad (\xi, \eta) \mapsto \nabla_\xi \eta,$$

que satisfaça as propriedades seguintes:

- (a)  $\nabla_\xi(\eta_1 + \eta_2) = \nabla_\xi \eta_1 + \nabla_\xi \eta_2$ ,
- (b)  $\nabla_\xi(f\eta) = f\nabla_\xi \eta + (Df(\xi))\eta$ ,
- (c)  $\nabla_{\xi_1 + \xi_2} \eta = \nabla_{\xi_1} \eta + \nabla_{\xi_2} \eta$ ,
- (d)  $\nabla_{f\xi} \eta = f\nabla_\xi \eta$ ,

quaisquer que sejam  $f \in C^\infty(X)$ ,  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma^\infty(E)$ .

**Proposição 14.12.7.** *Seja  $\nabla$  uma derivada covariante no fibrado  $E$ . Dados  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \Gamma^\infty(E)$  e  $p \in X$ .*

*Se  $\xi(p) = \hat{\xi}(p)$  então  $(\nabla_\xi \eta)(p) = (\nabla_{\hat{\xi}} \eta)(p)$ .*

*Proof.* Se  $\xi = \hat{\xi}$  numa vizinhança  $U$  de  $p$ , escolhendo uma função  $f \in C^\infty(X)$  com suporte compacto contido em  $U$  e tal que  $f(p) = 1$  temos  $f\xi = f\hat{\xi}$  e por (d)

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi \eta)(p) &= f(p) (\nabla_\xi \eta)(p) = (\nabla_{f\xi} \eta)(p) = (\nabla_{f\hat{\xi}} \eta)(p) \\ &= f(p) (\nabla_{\hat{\xi}} \eta)(p) = (\nabla_{\hat{\xi}} \eta)(p). \end{aligned}$$

Este argumento mostra que  $(\nabla_\xi \eta)(p)$  depende apenas do comportamento do campo  $\xi$  numa vizinhança de  $p$ .

Seja agora  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \mathcal{X}^\infty(X)$  uma família de campos tal que para todo o  $x$  numa vizinhança  $U$  de  $p$ ,  $\{\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)\}$  é uma base de  $T_x X$ . Dado um campo  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  existem funções suaves  $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(X)$  tais que  $\xi = f_1 \xi_1 + \dots + f_n \xi_n$  em  $U$ . Pelo caso anterior temos

$$(\nabla_\xi \eta)(p) = \sum_{j=1}^n (\nabla_{f_j \xi_j} \eta)(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p) (\nabla_{\xi_j} \eta)(p).$$

Esta fórmula mostra que a derivada  $(\nabla_{\xi}\eta)(p)$  depende apenas das coordenadas  $f_j(p)$  do vector  $\xi(p)$  na base  $\{\xi_1(p), \dots, \xi_n(p)\}$  de  $T_pX$ . Seja  $\hat{\xi} \in \mathcal{X}^\infty(X)$  um segundo campo tal que  $\hat{\xi}(p) = \xi(p)$  e consideremos funções  $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(X)$  tais que  $\hat{\xi} = g_1 \xi_1 + \dots + g_n \xi_n$  sobre o aberto  $U$ . Como

$$\sum_{j=1}^n g_j(p) \xi_j(p) = \hat{\xi}(p) = \xi(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p) \xi_j(p),$$

temos  $g_j(p) = f_j(p)$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , o que implica que

$$(\nabla_{\hat{\xi}}\eta)(p) = \sum_{j=1}^n g_j(p) (\nabla_{\xi_j}\eta)(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p) (\nabla_{\xi_j}\eta)(p) = (\nabla_{\xi}\eta)(p).$$

□

A proposição anterior permite, dados  $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ ,  $p \in X$  e  $v \in T_pX$  definir o vector  $(\nabla_v\eta)(p) \in E(p)$ . A derivada covariante determina assim, para cada  $p \in X$ , uma aplicação linear  $(\nabla \cdot \eta)(p): T_pX \rightarrow E(p)$ .

A proposição seguinte mostra que a derivada  $(\nabla_v\eta)(p)$  fica determinada pelo comportamento do campo  $\eta$  ao longo de qualquer curva que passe no ponto  $p$  com velocidade  $v$ .

**Proposição 14.12.8.** Seja  $\nabla$  uma derivada covariante no fibrado  $E$ . Consideremos uma curva suave  $c: I \rightarrow X$  e duas secções  $\eta, \hat{\eta} \in \Gamma^\infty(E)$ .

Se que  $\eta(c(t)) = \hat{\eta}(c(t))$ , para todo  $t \in I$ , então

$$(\nabla_{c'(t)}\eta)(c(t)) = (\nabla_{c'(t)}\hat{\eta})(c(t)) \quad \forall t \in I.$$

*Proof.* Se  $\eta = \hat{\eta}$  num aberto  $U$  então para todo  $p \in U$  e  $v \in T_pX$  temos  $(\nabla_v\eta)(p) = (\nabla_v\hat{\eta})(p)$ . De facto, escolhendo uma função  $f \in C^\infty(X)$  com suporte compacto contido em  $U$  tal que  $f = 1$  numa vizinhança de  $p$  temos  $f\eta = f\hat{\eta}$ , pelo que usando o item (b) da Definição 14.12.4,

$$\begin{aligned} (\nabla_v\eta)(p) &= f(p) (\nabla_v\eta)(p) = (\nabla_v f \eta)(p) - Df_p(v) \eta(p) \\ &= (\nabla_v f \hat{\eta})(p) - Df_p(v) \hat{\eta}(p) = f(p) (\nabla_v\hat{\eta})(p) = (\nabla_v\hat{\eta})(p). \end{aligned}$$

Seja agora  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\} \subset \Gamma^\infty(E)$  uma família de secções suaves tal que numa vizinhança  $U \subset X$  de  $p = c(0)$  se tem que  $\{\eta_1(x), \dots, \eta_m(x)\}$  é uma base de  $E(x)$  para todo  $x \in U$ . Vamos supor que  $c(t) \in U$  para todo  $t \in I$ .

Dado uma secção  $\eta \in \Gamma^\infty(E)$  existem funções suaves  $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(X)$  tais que  $\eta = f_1 \eta_1 + \dots + f_m \eta_m$  em  $U$ . Pela observação inicial, dados  $p \in U$  e  $v \in T_pX$  temos

$$(\nabla_v\eta)(p) = \sum_{j=1}^m (\nabla_v f_j \eta_j)(p) = \sum_{j=1}^m f_j(p) (\nabla_v \eta_j)(p) + (Df_j)_p(v) \eta_j(p).$$

Esta fórmula mostra que a derivada  $(\nabla_v \eta)(p)$  depende apenas das coordenadas  $f_j(p)$ , e derivadas  $(Df_j)_p(v)$ , do vector  $\eta(p)$  na base  $\{\eta_1(p), \dots, \eta_m(p)\}$  de  $E(p)$ .

Seja  $\hat{\eta} \in \Gamma^\infty(E)$  uma segunda secção tal que  $\hat{\eta}(c(t)) = \eta(c(t))$  para todo  $t \in I$ , e consideremos funções  $g_1, \dots, g_m \in C^\infty(X)$  tais que  $\hat{\eta} = g_1 \eta_1 + \dots + g_m \eta_m$  sobre o aberto  $U$ . Como

$$\sum_{j=1}^m g_j(c(t)) \eta_j(c(t)) = \hat{\eta}(c(t)) = \eta(c(t)) = \sum_{j=1}^m f_j(c(t)) \eta_j(c(t)),$$

temos  $g_j(c(t)) = f_j(c(t))$  e derivando esta relação

$$(Dg_j)_{c(t)}(c'(t)) = (Df_j)_{c(t)}(c'(t)), \quad \forall t \in I, \forall j = 1, \dots, m.$$

Logo, usando os items (a) e (b) da Definição 14.12.4,

$$\begin{aligned} (\nabla_{c'(t)} \hat{\eta})(c(t)) &= \sum_{j=1}^m (\nabla_{c'(t)} g_j \eta_j)(c(t)) \\ &= \sum_{j=1}^m g_j(c(t)) (\nabla_{c'(t)} \eta_j)(c(t)) + (Dg_j)_{c(t)}(c'(t)) \eta_j(c(t)) \\ &= \sum_{j=1}^m f_j(c(t)) (\nabla_{c'(t)} \eta_j)(c(t)) + (Df_j)_{c(t)}(c'(t)) \eta_j(c(t)) \\ &= \sum_{j=1}^m (\nabla_{c'(t)} f_j \eta_j)(c(t)) = (\nabla_{c'(t)} \eta)(c(t)). \end{aligned}$$

□

Se  $X \subset \mathbb{R}^N$ , os fibrados tangente  $TX$  e normal  $TX^\perp$  admitem derivadas covariantes naturais determinadas pela estrutura Euclideana de  $\mathbb{R}^N$ .

Dados campos  $\xi, \eta \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , usando a notação introduzida na secção 3.1 definimos

$$\nabla_\xi \eta := D\eta(\xi)^T,$$

onde  $D\eta(\xi): X \rightarrow \mathbb{R}^N$  representa o campo de vectores  $x \mapsto D\eta_x(\xi(x))$ . Analgamente, dados  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\eta \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ , definimos

$$\nabla_\xi^\perp \eta := D\eta(\xi)^N,$$

onde  $D\eta(\xi): X \rightarrow \mathbb{R}^N$  representa o campo  $x \mapsto D\eta_x(\xi(x))$ .

**Proposição 14.12.9.** As aplicações acima definidas  $\nabla: \mathcal{X}^\infty(X) \times \mathcal{X}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\nabla^\perp: \mathcal{X}^\infty(X) \times \mathcal{X}_\perp^\infty(X) \rightarrow \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$  são derivadas covariantes nos fibrados  $TX$  e  $TX^\perp$  respectivamente.

*Proof.* Exercício. □

**Proposição 14.12.10.** Dados campos  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}^\infty(X)$ ,  $x \in X$  e  $v \in T_x X$ ,

$$D(\xi_1 \cdot \xi_2)_x(v) = (\nabla_v \xi_1)(x) \cdot \xi_2(x) + \xi_1(x) \cdot (\nabla_v \xi_2)(x).$$

Dados campos  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ ,  $x \in X$  e  $v \in T_x X$ ,

$$D(\eta_1 \cdot \eta_2)_x(v) = (\nabla_v \eta_1)(x) \cdot \eta_2(x) + \eta_1(x) \cdot (\nabla_v \eta_2)(x).$$

*Proof.* Exercício. □

**Proposição 14.12.11.** Dado  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ ,  $x \in X$  e  $v \in T_x X$ ,

$$(\nabla_v \xi)(x) = D\xi_x(v) - B_x(\xi(x), v).$$

Dado  $\eta \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$ ,  $x \in X$  e  $v \in T_x X$ ,

$$(\nabla_v^\perp \eta)(x) = D\eta_x(v) - B_x^\perp(\eta(x), v).$$

*Proof.* Segue das proposições 14.12.3 e 14.12.6. □

**Proposição 14.12.12.** A derivada covariante  $\nabla: \mathcal{X}^\infty(X) \times \mathcal{X}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{X}^\infty(X)$  é um conceito Riemanniano, i.e., pode ser caracterizada em termos da primeira forma fundamental  $g: TX \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, v) := \|v\|^2$ .

*Proof.* Pela Proposição 14.12.1

$$(u, w) \in T_{(x,v)}(TX) \iff (v, w) \in T_{(x,u)}(TX).$$

Além disso

$$(0, w) \in T_{(x,v)}(TX) \iff w \in T_x X.$$

Vamos dizer que são *verticais* os vectores de  $T_{(x,v)}(TX)$  da forma  $(0, w)$  com  $w \in T_x X$ . Designamos por  $V_{(x,v)}(X)$  o subespaço dos vectores verticais em  $T_{(x,v)}(TX)$ , que é naturalmente isomorfo a  $T_x X$ .

Um vector  $(u, w) \in T_{(x,v)}(TX)$  diz-se *horizontal* se  $Dg_{(x,u)}(v, w) = 0$  para todo  $u \in T_x X$ . A derivada  $Dg_{(x,u)}(v, w)$  está bem definida porque  $(u, w) \in T_{(x,v)}(TX)$  implica que  $(v, w) \in T_{(x,u)}(TX)$ . Como  $Dg_{(x,u)}(v, w) = 2(u \cdot w)$ , temos que  $w = B_x(u, v)$  é o único vector no espaço ambiente de  $X$  tal que  $(u, w)$  é um vector horizontal de  $T_{(x,v)}(TX)$ . Designamos por  $H_{(x,v)}(X)$  o subespaço dos vectores horizontais em  $T_{(x,v)}(TX)$ .

Obtida a partir da primeira forma fundamental  $g: TX \rightarrow \mathbb{R}$  temos assim uma decomposição em soma directa

$$T_{(x,v)}(TX) = H_{(x,v)}(X) \oplus V_{(x,v)}(X).$$

Dado um campo de vectores  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$ , para todo  $(x, v) \in TX$  temos que o vector  $(v, D\xi_x(v)) \in T_{x, \xi(x)} TX$  que se projecta (via decomposição anterior) no vector vertical  $(0, (\nabla_v \xi)(x))$ . Este argumento mostra que a derivada covariante  $\nabla_v \xi$  se exprime em termos da primeira forma fundamental. □

**Proposição 14.12.13.** Dados  $x \in X$ ,  $u, v \in T_x X$  e  $\eta \in T_x X^\perp$ ,

$$B_x(u, v) \cdot \eta = -u \cdot B_x^\perp(\eta, v).$$

*Proof.* Sejam  $\xi \in \mathcal{X}^\infty(X)$  e  $\tilde{\eta} \in \mathcal{X}_\perp^\infty(X)$  campos tais que  $\xi(x) = u$  e  $\tilde{\eta}(x) = \eta$ . Derivando a relação  $\xi \cdot \tilde{\eta} = 0$  segundo um vector  $v \in T_x X$  e usando as proposições 14.12.3 e 14.12.6 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= D\xi_x(v) \cdot \eta + \xi(x) \cdot D\tilde{\eta}_x(v) \\ &= (D\xi_x(v))^N \cdot \eta + \xi(x) \cdot (D\tilde{\eta}_x(v))^T \\ &= B_x(u, v) \cdot \eta + u \cdot B_x^\perp(\eta, v). \end{aligned}$$

□

**Proposição 14.12.14.** Dada uma função  $f \in C^\infty(X)$ , designando por  $\xi = \nabla f$  o campo gradiente de  $f$ , temos para todo  $u \in T_p X$ ,

$$\nabla^2 f_p(u, v) = u \cdot (\nabla_v \xi)(p).$$

*Proof.* Sejam  $X \subset \mathbb{R}^N$  uma variedade,  $f \in C^\infty(X)$  e  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma extensão local de  $f$  a uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^N$  do ponto  $p \in X$ .

Seja  $P: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  uma aplicação suave tal que para cada  $x \in U$ ,  $P_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma aplicação linear auto-adjunta, e para cada  $x \in U \cap X$ ,  $P_x: \mathbb{R}^N \rightarrow T_x X$  é a projecção ortogonal sobre o espaço tangente  $T_x X$ .

O campo  $\xi = \nabla f \in \mathcal{X}^\infty(X)$  admite a seguinte extensão  $\tilde{\xi} \in \mathcal{X}^\infty(U)$ , definida por  $\tilde{\xi}(x) := P_x(\nabla \tilde{f}(x))$ .

Pela Proposição 14.12.11, e porque  $DP_x(v)$  é auto-adjunta para todo  $x \in U$  e  $v \in \mathbb{R}^N$  temos

$$\begin{aligned} u \cdot (\nabla_v \xi)(x) &= u \cdot \left( D\tilde{\xi}_x(v) - B_x(\xi(x), v) \right) = u \cdot D\tilde{\xi}_x(v) \\ &= u \cdot \left( P_x(D(\nabla \tilde{f})_x(v)) + DP_x(v)(\tilde{\xi}(x)) \right) \\ &= u \cdot D(\nabla \tilde{f})_x(v) + u \cdot DP_x(v)(\tilde{\xi}(x)) \\ &= D(u \cdot \nabla \tilde{f})_x(v) + DP_x(v)(u) \cdot \nabla \tilde{f}(x) \\ &= D^2 \tilde{f}_x(u, v) + D\tilde{f}_x(DP_x(v)(u)). \end{aligned}$$

Para terminar, tendo em conta a Definição 14.12.2, basta-nos provar que

$$B_x(u, v) = DP_x(v)(u)$$

quaisquer que sejam  $u, v \in T_x X$ , o que por sua vez se resume a mostrar que  $DP_x(v)(u) \in \Pi_x(u, v) \cap T_x X^\perp$ .

Como  $(x, P_x(u)) \in TX$  para todo  $x \in U \cap X$ , derivando segundo  $v \in T_x X$  obtemos  $(v, DP_x(v)(u)) \in T_{(x,u)}TX$ , o que implica  $DP_x(v)(u) \in \Pi_x(u, v)$ .



Por outro lado, como  $P_x = P_x \circ P_x$  para todo  $x \in U \cap X$ , derivando esta relação segundo o vector  $v \in T_x X$  obtemos

$$DP_x(v)(u) = DP_x(v)(P_x(u)) + P_x(DP_x(v)(u)).$$

Logo, como  $u \in T_x X$  temos  $P_x(u) = u$ , o que implica  $P_x(DP_x(v)(u)) = 0$  e, portanto,  $DP_x(v)(u) \in T_x X^\perp$ .  $\square$



# Index

- aplicação
  - derivada, 6
  - suave, 1
- bloco de Jordan, 57
- campo de vectores, 35
  - órbita, 41
  - completo, 41
  - conjugação, 42
  - conjugação local, 43
  - espaço de fases, 41
  - estabilidade estrutural, 43
  - fluxo, 41
  - linear, 45
  - normal, 35
  - ponto regular, 43
  - push-forward, 42
  - singularidade, 44
  - suporte, 41
  - tangente, 35
- derivada, 6
- difeomorfismo, 1
- difeomorfismo local, 2, 24
- espaço
  - localmente compacto, 29
- espaço tangente, 4
- estabilidade estrutural, 43
- exponencial duma matriz, 46
- fibrado normal, 39
- fibrado tangente, 3
- fluxo
  - conjugação, 43
- fluxo máximo, 41
- forma normal de Jordan, 57
- grupo a um parâmetro de difeomorfismos, 41
- imersão, 24
- método
  - Gram-Schmidt, 36
- mapa
  - equivalência entre, 21
  - equivalência local entre, 22
  - estável, 21
  - próprio, 28
- mapa tangente, 6
- matriz
  - cadeia de de vectores próprios generalizados, 57
  - espectro, 56
  - hiperbólica, 46
  - polinómio característico, 56
  - subespaço próprio generalizado, 56
  - valor próprio, 56
  - vector próprio, 56
  - vector próprio generalizado, 56
- matriz hiperbólica
  - índice de estabilidade, 48
- mergulho, 25
- regra da cadeia, 6
- singularidade, 44
  - hiperbólica, 48
  - isolada, 49
  - linearização, 48
  - matriz Jacobiana, 44

- não degenerada, 49
- suave, 1
- submersão, 24
- teorema
  - função implícita, 11
  - função inversa, 16
  - Hartman-Grobman, 49
  - homomorfismo, 14
  - níveis regulares, 15
  - Poincaré-Sternberg, 49
  - variedade estável, 49
  - Whitney, 27
- variedade, 2
  - atlas, 2
  - carta, 2
  - dimensão, 3
  - espaço tangente, 4
  - parametrização, 2
  - vector tangente, 4
- vector tangente, 4

# Bibliografia

- [1] Riccardo Benedetti and Jean-Jacques Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990. MR 1070358
- [2] Stewart S. Cairns, *On the triangulation of regular loci*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 3, 579–587. MR 1503181
- [3] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, Translated from the Portuguese. MR 0394451
- [4] Samuel Eilenberg and Norman E. Steenrod, *Axiomatic approach to homology theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **31** (1945), 117–120. MR 0012228
- [5] Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010, Reprint of the 1974 original. MR 2680546 (2011e:58001)
- [6] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950. MR 0033869
- [7] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1976 original. MR 1336822 (96c:57001)
- [8] Brian R. Hunt, Tim Sauer, and James A. Yorke, *Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 2, 217–238.
- [9] J.P. Júnior and W. de Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [10] E.L. Lima and Instituto de Matematica Pura e Aplicada (Brasil), *Álgebra linear*, Matematica universitaria, IMPA, 2009.

- [11] E.L. Lima and Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brazil), *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq., 1977.
- [12] Elon Lages Lima, *Introdução à topologia diferencial*, nd ed., Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001. MR 2116845 (2005h:57001)
- [13] L Loomis and S. Sternberg, *Advanced calculus*, Addison Wesley.
- [14] A. Machado, *Geometria diferencial, uma introdução à o fundamental*, Textos de Matemática, DM-FCUL, 1997.
- [15] Charles Richard Francis Maunder, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. MR 694843
- [16] J. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. MR 0163331 (29 #634)
- [17] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes by David W. Weaver, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965. MR 0226651 (37 #2239)
- [18] Marston Morse, *Pits, peaks and passes*, MAA Video, 1995.
- [19] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984. MR 755006
- [20] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953. MR 0055409
- [21] ———, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR 1157815
- [22] Jorge Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. MR 651910
- [23] Charles A. Weibel, *History of homological algebra*, History of topology, North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 797–836. MR 1721123