

# Invariance in Physics: Tensors, Differential forms & Exterior calculus with applications to Electro-magnetism and Special and General Relativity.

Aulas teoricas

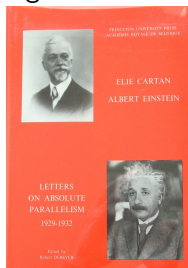
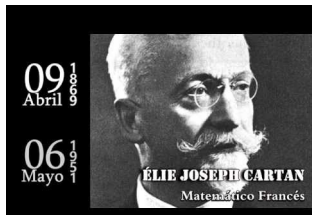
Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,  
Sala 6.2.20.

July 31, 2023

## Objectivos do curso

1. PARTE A: Cálculo tensorial e exterior, invariância tensorial.
  - ▶ Cálculo tensorial, invariância tensorial
  - ▶ Cálculo exterior
  - ▶  $m$ -formas diferenciais
  - ▶ Teorema de Stokes
  - ▶ Equações de Helmholtz
2. PARTE B: Introdução a relatividade restrita
3. PARTE C  
: Introdução a relatividade geral



## Conteúdo das aulas teoricas

- ▶ Aula 1: Introdução. **Part A: Noções de invariância em Física-Matemática:** mudança de coordenadas e bases ortogonais Cartesianas; cálculo indicial (20/9) [pp. 7-23]
- ▶ Aula 2: Bases curvilíneas, métrica, tensores (afins) (22/9) [pp. 24-33]
- ▶ Aula 3: Cálculo tensorial (geral); gradiente curvilínea; operadores duais (27/9) [pp. 34-46]
- ▶ Aula 4 & 5: Definição invariante do gradiente; gradiente de um vetor; conexão, derivação covariante; transporte paralelo, geodésicas (29/9 & 4/10) [pp. 47-72]
- ▶ Aula 6 : Curvatura de Riemann & Campos de Jacobi (6/10) [pp. 73-86]
- ▶ Aula 7: Aproximação da métrica pela curvatura; Rotor e divergência, expressões curvilíneas; (grandeza objetiva). Algebra de Grassman dos  $m$ -vetores (11/10) [pp. 87-101]

## Conteúdo das aulas teoricas

- ▶ Aula 8: Formas diferenciais, Cálculo exterior; produto interno; Formas exatas e fechadas; Lema de Poincaré. (13/10) [pp. 102-114]
- ▶ Aula 9: Recíproca do lema de Poincaré. Operador dual de Hodge (18/10) [pp. 115-128]
- ▶ Aula 10: Operador dual de Hodge. Rotor e divergência: definição invariante. Co-diferencial. Laplaciano. Operador "pull back". (20/10) [pp. 129-143]
- ▶ Aula 11: Integração. Teorema de Stokes e aplicações. (25/10) [pp. 144-161]
- ▶ Aula 12: Variação de um integral de superfície (27/10) [pp. 162-165]
- ▶ Aula 13: Derivada de Lie. Mapa "push forward" (03/11) [pp. 166-173]

## Conteúdo das aulas teoricas

- ▶ Aula 14 & 15: Introdução as equações de Maxwell; equações em forma invariante (8-10/11) [pp. 167-195]
- ▶ Aula 16 & 17: **PART B. Relatividade restrita:** noções preliminares, Gedankenexperimenten e equivalência de massa e energia (15 & 17/11) [pp. 196-218]
- ▶ Aula 18 & 19: Equações do eletro-magnetismo post-relativístico: Maxwell e leis de conservação (22 & 24/11) [pp. 219-232]
- ▶ Aula 20: Transformação de Lorentz & Invariança da velocidade da luz (29/11) [pp. 233-244]
- ▶ Aula 21 & 22: **PART C. Relatividade geral:** Introdução. Equações de Einstein. Funcional de Einstein-Hilbert.(6 & 13/12) [pp. 245-270]
- ▶ Aula 23: Aplicação a Cosmologia e aos buracos negros (15/12) [pp. 271-288]

## Avaliação

- ▶ Exame de teoria oral em duas partes; parte a (1h): apresentação de um tema a escolha : o tema corresponde a uma das partições abaixo (40%); parte b (30min): dúvidas sobre as partes restantes do curso (20%)
- ▶ Trabalhos de casa/participação nas aulas (40%)

## Partição do curso para efeito de avaliação

- ▶ **Part 1.** Cálculo tensorial; gradiente curvilínea, expressões invariantes de grad, curl, div; conexão, geodésicas e curvatura de Riemman; aproximação da métrica pela curvatura. (pp. 7-89)
- ▶ **Part 2.** Vetores e covetores, formas diferenciais e cálculo exterior; Poincaré, Hodge, Stokes, Lie; pull-back e push forward; Maxwell 3d (pp. 93-195)
- ▶ **Part 3.** Relatividade restrita e geral (pp. 196-288 )

## Referências bibliograficas

- ▶ **A practical introduction to differential forms** by William and Alexia Schulz
- ▶ **Geometric Integration Theory** by Steven Kranz and Harold Parks
- ▶ **Differential Forms and Applications** by Manfredo P. Do Carmo
- ▶ **Modern Geometry - Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields** by B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov
- ▶ **Introduction to General Relativity, Black Holes, and Cosmology** by Yvonne Choquet-Bruhat

## Introdução/Motivação ao curso:

- ♣ Cada domínio da física tem seu campo de aplicação:
  - ▶ Física nuclear: núcleos; física das partículas: as partículas
  - ▶ Termodinâmica: sistemas que trocam calor
  - ▶ Ótica: propagação da luz
  - ▶ Relatividade restrita: **a tudo!**
  
- ♣ A Relatividade restrita é uma meta-teoria, uma teoria de nível superior, sem campo de aplicação privilegiado; é uma sintaxe capaz de descrever as teorias físicas; permite de eliminar as teorias sem sentido físico, i.e. arbitrárias.
  
- ♣ Preliminares de Mecânica Racional:
  1. **Postulato/Definição:** existem referenciais galileanos nos quais o movimento livre (= sem forças) dos corpos é efetuado com velocidade constante.
  2. **Princípio de Aristóteles:** o estado natural de um corpo é o repouso.



- Princípio de Newton, ou de inércia:** o estado natural dos corpos é de continuar a fazer o que estavam a fazer.  
*Exemplos:* deitar uma pedra em cima do mastro de um veleiro com velocidade horizontal constante; saltar verticalmente no comboio em movimento constante; movimento das moscas num avião em voo; movimento de recuo quando o comboio arranca, etc.
- Princípio de relatividade galileana:** as leis da física são as mesmas em todos os referenciais galileanos; **é a condição para ter uma teoria física, permite fazer física:** senão uma lei dependeria de um referencial particular dentro de uma família de referenciais equivalentes (i.e. indistinguíveis), já não seria uma lei.
- Acrescento de Einstein:** hipótese: (existência de uma velocidade limite e insuperável) a luz propaga-se com velocidade constante e finita,  $c$  (hipótese não necessária: existência de uma velocidade limite pode ser demonstrado).

## Galileo-Newton-Einstein *in a nutshell* -1-

As ideias e paradigmos principais são os seguintes:

- A. **Galileo-Newton:** Existem espaço e tempo como objetos distintos. O Espaço+Tempo é um contentor de eventos; existe um tempo absoluto; existem eventos simultâneos.
- B. **Newton:** A movimento não uniforme dos corpos provêm da noção de força, em particular gravitacional: corpos massivos atraem-se mutualmente; temos a lei  $F = m_I a$ , onde  $m_I$  é a massa inercial do corpo; a força gravitacional provocada por um corpo de massa  $m'_G$  é  $F = -\frac{m'_G m_I}{r^2}$ ; pelo princípio de ação/reação  $m_I$  e  $m_G$  são proporcionais:  $m_G = G_N m_I$ .
- C. **Einstein (relatividade restrita):** a noção certa é o Espaço-tempo pois espaço e tempo não são noções distintas; só existe o tempo próprio de cada observador; não existe tempo universal; não existe simultaneidade de eventos; um evento e a sua estória passada e futura são linhas do Espaço-tempo.

## Galileo-Newton-Einstein *in a nutshell* -2-

- D. **Einstein (relatividade restrita):** por 4 e 5 acima, há de considerar que a propagação de luz é uma lei:  $c$  é igual em todos os referenciais (este facto pode ser demonstrado); a velocidade da luz não é uma propriedade, é uma lei.
- E. **Einstein (relatividade restrita):** a relação  $E = mc^2$ : massa é equivalente (indistinguível concetualmente) com a energia, apesar de os dois lados serem de natureza diferente:  $E$  é uma propriedade contingente (pode variar sem que o corpo varie) mas a massa é um dado do corpo, faz parte da sua natureza, é invariável; é a diferença entre "ter" e "ser", adquirido/ inato, accidental/essencial; mudar uma propriedade em existência (energia em massa); num acelerador de partículas: trocar velocidade em massa, criação de partículas elementares provindo da energia cinética das partículas incidentes; consequência: **criar matéria a partir do movimento** .

## Galileo-Newton-Einstein *in a nutshell* -3-

- F. **Galileo/Einstein:** O movimento de um corpo não depende da sua massa (no vazio, i.e., apenas considerando a gravidade).
- G. **Einstein (relatividade geral):** Como consequência, a noção de força não é boa, pois no final das contas é tudo uma questão de aceleração:  $m_I a = F = m_G g \implies a \sim g$ ; experiência do pensamento: cair sobre a terra fixa é como ficar imóvel com a terra que accelera por cima; logo o que conta são os referenciais acelerados, i.e. não Galileanos.
- H. **Einstein (relatividade geral):** O Espaço-tempo já não é um contentor fixo, é uma propriedade dinâmica como as outras, i.e., tem a sua lei de evolução baseada na descoberta de que: a massa dos corpos cria curvatura do Espaço-tempo. Ora um corpo livre segue como trajetórias as geodésicas do Espaço-tempo curvo, i.e., uma variedade Lorentziana de dimensão 4.

## Cálculo indicial -1-

♣ Trata-se de um formalismo introduzido e popularizado por A. Einstein que permite de operar com tensores de modo agil e compacto, sendo os mesmos identificados com uma serie de indices (co-ou contravariantes). Existem 1 operação e 2 símbolos fundamentais neste formalismo:

- O produto diadico (ou tensorial):  $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$ .
- O símbolo de Kronecker, chamado tambem "Kronecker's delta":

$$\delta_{ij} := 0 \text{ se } i \neq j, \delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j, \text{ ou } \delta_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j.$$

- O símbolo de Levi-Civita (valido apenas em dimensão 3):

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{se a permutação de } ijk \text{ for par} \\ -1 & \text{se for impar} \\ 0 & \text{senão} \end{cases},$$

$$\varepsilon_{ijk} := \det(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k) = \underline{e}_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k).$$

## Cálculo indicial -2-

### ♣ Princípio de base 1:

2 índices repetidos significa soma:  $u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u \cdot v$   
 (produto escalar de 2 vetores),  $A_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk} = (AB)_{ik}$   
 (produto matricial de 2 matrizes), e  
 $A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij} = A \cdot B$  (produto escalar de 2 matrizes).

### ♣ Princípio de base 2:

uma vez que são repetidos, os índices são mutos, ou seja

$$u_i v_i = u_k v_k, \quad A_{ij} B_{ij} = A_{ji} B_{ji}, \quad A_{ijkl} B_{klmn} = A_{ijpq} B_{pqmn}.$$

### ♣ Princípio de base 3:

um determinado índice só pode aparecer no máximo duas vezes, e se for repetido, há soma neste índice, e portanto já não se pode utilizá-lo uma terceira vez.

## Cálculo indicial -3-

♣ Princípio de base 4:

a posição do somante é indiferente:

$$C_{ij} = a_i b_j + A_{ijk} c_k = b_j a_i + c_k A_{ijk} \quad (C = a \otimes b + Ac).$$

♣ Notação: um índice não repetido vem sublinhado.

EX:  $a_{\underline{i}k} b_{\underline{i}l}$  não tem soma em  $i$  ( $i$  é fixado).

♣ O produto escalar de 2 vetores é expressido com o símbolo de Kronecker:

$$u \cdot v = (u_i \underline{e}_i) \cdot (v_j \underline{e}_j) = u_i v_j \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i.$$

♣ O produto vetorial é expressido com o símbolo de Levi-Civita:

$$u \times v = \det \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_i u_j v_k$$

$$(u \times v)_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k. \quad (1)$$

## Conceito de Observador Galileano

### Sistema de referência

Definido como um corpo rígido em movimento ao qual é legado uma base ortonormal  $\{\underline{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  e uma origem  $O$ . Uma outra base  $\{\underline{e}'_j\}_{1 \leq j \leq 3}$  neste mesmo sistema de referência tem origem  $O'$  e verifica:  $\underline{e}'_i(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_j$ , onde  $A = [a_{ij}]_{ij}$  (ou  $Q$ ) é uma matriz ortogonal, dita de mudança de base. Temos também  $\underline{e}_i = a_{ij}^{-1}\underline{e}'_j = a_{ji}\underline{e}'_j$  (efetua-se uma soma no índice  $i$  caso for repetido, vê mais a frente). Portanto,  $x = \overrightarrow{OP} = x_j\underline{e}_j = \overrightarrow{OO'} + x'_j\underline{e}'_j$ , com  $b := \overrightarrow{OO'} = b_j\underline{e}_j$ . Logo,  $x'_i := (x - b) \cdot \underline{e}'_i = a_{ij}(x_j - b_j)$ .

### Sistema de referência inercial ou de Galileo

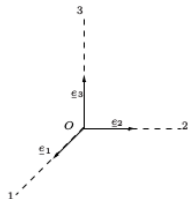
Definido como um sistema de referência em translação uniforme com respeito a um referencial estelar escolhido (considerado fixo em primeira aproximação e cuja existência está postulada).



## └ PARTE A

## └ A.1. Referencial Cartesiano e mudança de base

## Referencial ortonormal

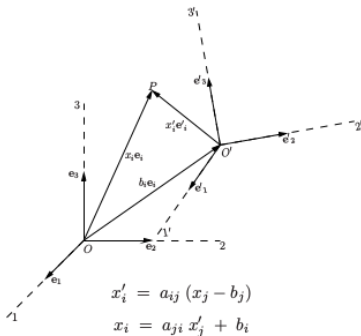


$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{ortonormalidade}$$

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad \text{orientação directa}$$

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i \quad \text{vector posição}$$

## Mudança de referencial ortonormal (rotação+translação)



$$\underline{e}'_i = a_{ij} \underline{e}_j$$

$$\underline{e}_i = a_{ji} \underline{e}'_j$$

Matriz de mudança de base

$$a_{ij} = \cos(\underline{e}'_i, \underline{e}_j) = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$$

ortonormalidade

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

## Transformação Galileana

♣ Seja um referencial com base  $\{g_i\}_i$  e origem 0. Seja  $X$  o vetor posição de um ponto. Uma transformação Galileana é uma roto-translação da forma

$$X^* = QX + v,$$

onde  $Q$  é um operador de rotação e  $v$  um vetor de translação.

Especificamente temos  $QX = Q_{ki}X^k g_i$ , ou seja a componente  $i$  de  $QX$  na base  $\{g_i\}_i$  é  $Q_{ki}X^k$  (com soma nos índices  $k$  e  $i$ ).

- A componente  $j$  de  $X^*$  na base  $\{g_i\}_i$  é obtida multiplicando  $X^*$  por  $g_j$ , i.e.,  $X^{*j} := X^* \cdot g_j = Q_{ki}X^k g_i \cdot g_j + v^j = Q_{ki}X^k \delta_{ij} + v^j = Q_{kj}X^k + v^j$ .

- Podemos também interpretar a transformação dizendo que a base  $\{g_i\}_i$  é rodada por  $Q$  e o vetor  $X^*$  tem componentes na nova base iguais as de  $X$  na base original, mediante uma translação por  $v$ . Com efeito, seja a nova base com elementos  $g'_l := Qg_l$ . Logo,  $g'_l \cdot g_j = Qg_l \cdot g_j = Q_{li}g_i \cdot g_j = Q_{lj}$ , e  $X'^l := X^* \cdot g'_l = Q_{kj}X^k g_j \cdot g'_l + v'^l = Q_{kj}X^k Q_{lj} + v'^l = X^k \delta_{lk} + v'^l = X^l + v'^l$ .

## Base e coordenadas curvilíneas -1- bases ortonormadas

♣ Seja  $\{\underline{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  a base Cartesiana fixa de origem  $O$ , e  $\{\underline{g}_j\}_{1 \leq j \leq 3}$  uma base orthonormal movél (ou "curvilínea", ou seja, fixada em cada ponto  $x$ ) tal que  $\underline{g}_i(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_j$ , onde  $a_{ij}$  são os componentes da matriz de mudança de base.

• EX: Base cilíndrica:  $a_{ij}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

♣ No caso de uma mudança de base orthogonal temos uma matriz de mudança de base orthogonal, i.e.  $a^{-1} = a^T$ , ou seja

$a_{ik}a_{jk} = a_{ik}a_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$ ; logo  $\underline{e}_i = a_{ji}(x)\underline{g}_j(x)$ .

♣ No caso de uma base ortonormada temos  $g_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j = \delta_{ij}$

♣ As componentes Cartesianas de um vetor  $v$ :  $v^i$  tal que  $v = v^i \underline{e}_i$

♣ Geralmente, as componentes contravariantes de um vetor  $v$ :  $\tilde{v}^j$  tal que  $v = \tilde{v}^j \underline{g}_j$ . Logo, a invariância de  $v$  impõe que  $v^i = a_{ji} \tilde{v}^j$  (com soma no índice  $j$ ) e  $\tilde{v}^j = a_{ji} v^i$ .

## Expressão indicial do determinante

♣ Algumas identidades com o  $\epsilon$  a  $3d$  ( $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ ):

$$(1) \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad (2) \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

DEM. (1) Se  $k \neq l$  temos necessariamente repetição nos índices  $i$  e  $j$  num dos símbolos e portanto  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 0$  se  $k \neq l$ . Tome  $k = l$ .

Logo  $i$  e  $j$  podem tomar apenas 2 valores diferentes ( $i \neq j$  e  $i, j \neq k = l$ ) de maneira que  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} + \epsilon_{jik}\epsilon_{jil} = 1^2 + (-1)^2$ .

Logo  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ . (2) segue de  $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ . QED ■

♣ Seja uma matriz  $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ . Demonstrar que  $\det M = M_{1i}\epsilon_{ijk}M_{2j}M_{3k} = \epsilon_{ijk}\frac{1}{6}\epsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$ .

DEM. Temos  $\det M = (M_{2\star} \times M_{3\star}) \cdot M_{1\star} = M_{1i}\epsilon_{ijk}M_{2j}M_{3k}$ .

Invertindo duas linhas, muda o sinal, logo escrito em índices:

$\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{ijk}M_{pi}M_{qj}M_{rk}$ . Invertindo linhas e colunas e multiplicando por  $\epsilon_{pqr}$ ,  $\epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$   
 $\Rightarrow \det M = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$ . QED ■

## Diferenciação do determinante

### Lema

Seja  $t \mapsto A(t)$  uma matriz. Temos  $\frac{d}{dt} \det A = \text{tr} \left( \text{adj} A \frac{dA}{dt} \right)$ .

DEM: (i) Demonstremos primeiro que  $\det'(I) = \text{tr}$ . Com efeito  $\det'(I)[T] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \epsilon T) - \det I}{\epsilon}$ ; pelo resultado anterior o termo constante de  $\det(I + \epsilon T)$  é 1 e o em  $\epsilon$  é  $\text{tr} T$ , logo a tese.

(ii) Demonstremos agora que para uma matriz invertível  $A$  vale  $\det'(A)[T] = \det A \text{tr} (A^{-1}T)$ . Com efeito,  $\det X = \det(A^{-1}AX) = \det(A) \det(A^{-1}X)$ .

Portanto,  $\det'(X)[T] = \det A \frac{d}{dX} \det(A^{-1}X)[T] = \det A \det'(A^{-1}X)A^{-1}[T] = \det A \det'(A^{-1}X)[A^{-1}T]$ . Logo, em  $X = A$  vem por (i):  $\det'(A)[T] = \det(A) \text{tr} (A^{-1}T)$ .

(iii) Tomemos agora  $T = \frac{dA}{dt}$ , logo  $\frac{d}{dt} \det A = \det'(A)\left[\frac{dA}{dt}\right] = \det(A) \text{tr} \left( A^{-1} \frac{dA}{dt} \right) = \text{tr} \left( \det(A) A^{-1} \frac{dA}{dt} \right) = \text{tr} \left( \text{adj} A \frac{dA}{dt} \right)$ . QED ■

## Lembrete: diferencial de Fréchet

### Diferencial de Fréchet

Sejam  $X, Y$  dois espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita) e seja  $\Omega \subset X$  um aberto. Um mapa  $f : \Omega \rightarrow Y$  é diferenciável em  $a \in \Omega$  se existe um elemento  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  (o espaço dos mapas lineares entre  $X$  e  $Y$ ) tal que

$$f(a + h) = f(a) + L[h] + \|h\|_X \delta(h)$$

com  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$  em  $Y$ .

O mapa linear  $L$  é chamado diferencial de Fréchet (em  $a$  e na direção  $h$ ). Se existir diferencial de Fréchet então vale

$$L[h] := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{\|h\|_X}.$$

O limite a direita é chamado derivada de Gâteaux.

## Os matemáticos do dia



**Figure:** Leopold Kronecker:  
Matemático alemão (1823 – 1891).  
Teoria dos números: "Die ganzen  
Zahlen hat der liebe Gott gemacht,  
alles andere ist Menschenwerk"  
("God made the integers, all else is  
the work of man").



**Figure:** Tullio Levi-Civita:  
Matemático italiano (1873 –  
1941). Deu origem ao cálculo  
tensorial: "Méthodes de calcul  
différentiel absolu et leurs  
applications".

## Base e coordenadas curvilíneas -2- caso geral

■ Fica entendido que se trabalha sempre no sentido das superfícies imersas ou localmente em variedades diferenciáveis.

♣ Seja  $s = (s^1, \dots, s^n)$  um sistema de coordenadas não Cartesiano, i.e., curvilínea (ex: cilíndricas, esféricas). No caso de uma geometria imersa, definimos:

- o vetor posição em Cartesiano:  $x = \hat{x}(s) = x^i(s)e_i$

- o vetor de base curvilínea (ou movél):  $\hat{g}_i(x) := \frac{\partial \hat{x}}{\partial s^i}$

♣ com vista as variedades podemos tambem escrever  $\hat{g}_i = \frac{\partial}{\partial s^i}$ .

- sendo que  $x = x^i e_i$ , a componente  $i$  de  $\hat{g}_j$  é  $(\hat{g}_j(x))^i := \frac{\partial x^i}{\partial s^j}$ .

Logo, a matriz  $(\frac{\partial x^i}{\partial s^j})_{ij}$  é chamada matriz de **transformação covariante** ou matriz de mudança de base. EX: Base cilíndrica:

$x = x^i(r, \theta, z)e_i = r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2 + z e_3$ , logo

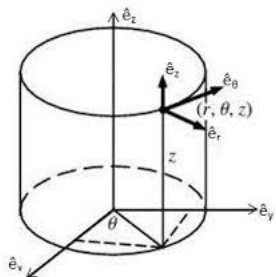
$\hat{g}_r = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ ,  $\hat{g}_\theta = -r \sin \theta e_1 + r \cos \theta e_2$ ,  $\hat{g}_z = e_3$ .

Definimos a base normalizada:  $\underline{g}_r = \hat{g}_r$ ,  $\underline{g}_\theta = 1/r \hat{g}_\theta$ ,  $\underline{g}_z = \hat{g}_z$ .



## Componentes e coordenadas polares cilíndricas

Rotação em torno de  $\underline{e}_3 = \underline{g}_z$ ,  $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



♣ Posição:

$$x = x_i \underline{e}_i = r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3$$

♣ vetores de base:

$$\underline{\hat{g}}_r := \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$$

$$\underline{\hat{g}}_\theta := \frac{\partial x}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y)$$

♣ vetores de base normalizados:

$$(h^1 = h_3 = 1, h^2 = \|\frac{\partial x}{\partial \theta}\| = r)$$

$$\underline{g}_r = 1/h^1 \underline{\hat{g}}_r = \underline{\hat{g}}_r$$

$$\underline{g}_\theta := \frac{\partial x}{\partial \theta} / \|\frac{\partial x}{\partial \theta}\| = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$$

♣ Posição:  $x = r \underline{g}_r + z \underline{g}_z$

## Base e coordenadas curvilíneas -3- caso geral

♣ **Nota 1:** a base curvilínea (ou movél):  $\{\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_n\}$  assim gerada pode ser ortogonal, ou não, ortogonal. Neste último caso a matriz de mudança de base não é ortogonal. Além disto, a mesma pode ser ortogonal sem ser ortonormal (= de norma unitária).

♣ **Nota 2:** A partir de agora, já ão se usa o – por baixo de um vetor para designar o seu caracter vetorial

♣ Sendo  $x$  invariante (i.e. independente da escolha da base e do sistema de coordenadas), as componentes do mesmo tem que satisfazer uma determinada lei de transformação que vamos agora identificar: o vetor posição  $x$  verifica  $x = x^i e_i = \hat{x}^j \hat{g}_j = \hat{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial s^j} e_i$  e portanto as suas componentes na base curvilínea são  $\hat{x}^j = \left(\frac{\partial x^i}{\partial s^j}\right)^{-1}_{ji} x^i = \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^i}\right)_{ji} x^i$  (i.e., é uma transformação contravariante)

♣ **Nota 3:** iremos chamar a coordenada  $\hat{x}$  ou  $\tilde{x}$  em vez de  $s$  quando temos um difeomorfismo "mudança de coordenadas" geral.

## Métrica e coeficientes metricos, métrica inversa

### Trabalho de casa 1

Escrever o vetor posição e os vetores de base num sistema de base/coordenadas esféricas.

♣ A métrica induzida  $g_{ij} = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j$  (induzida:  $\cdot$  é o produto escalar de  $\mathbb{R}^N$ ) e a métrica inversa  $g^{ij} := g_{ij}^{-1} = (g_{ij})^{-1}$

- o Jacobiano  $g = \det(g_{ij})_{ij}$

- o produto scalar induzido da métrica  $g(u, v) = u \cdot v = g_{ij} \hat{u}^i \hat{v}^j$

- ♣ a norma induzida pelo produto escalar:  $\|u\| = \sqrt{g(u, u)}$

- o vetor de base curvilínea normalizado:  $g_i = \frac{\hat{g}_i}{\|\hat{g}_i\|}$

- coeficientes metricos  $h_i$  do sistema de coordenadas ortogonal:

$g_{ij} = (h_i)^2 \delta_{ij}$  e  $g^{ij} = (h_i)^{-2} \delta_{ij}$ . Logo  $g_i = \frac{\hat{g}_i}{h_i}$ . Portanto as

componentes do vetor posição na base normalizada são  $h_i \hat{x}^i$  pois que  $x = \hat{x}^i \hat{g}_i = h_i \hat{x}^i g_i$ . Os mesmos tem dimensão de comprimento.

- Exemplo em cilíndrico:  $r$  e  $z$  têm dimensão de comprimento,  $\theta$  não, portanto  $h_2 = h_\theta = r$ ,  $h_1 = h_r = 1 = h_3 = h_z$ .

## Vetores and co-vetores

Seja  $\{x^i\}_i$  e  $\{\tilde{x}^j\}_j$  2 sistemas de coordenadas associados a 2 bases  $\{g_i\}$  e  $\{\tilde{g}_i\}$ . Em regra geral, um vetor  $v^j$  transforma-se como

$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j$  (i.e., tem componentes **contravariantes**), enquanto

um co-vetor  $u_j$  como  $\tilde{u}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} u_j$  (tem componentes **covariantes**)

♣ Exemplo de vetor: a velocidade  $v = \frac{dx}{dt}$  transforma-se na nova base como a posição  $x$ , logo  $\tilde{v}^i = \frac{d}{dt} \tilde{x}^i(x^j(t)) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j$

♣ Exemplo de co-vetor: o gradiente Cartesiano  $\nabla f$ , transforma-se na nova base co-vetor tangente  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , i.e.  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$

♣ Já vimos que os elementos da base  $g_i$  transformam-se como co-vetores

## Caso particular das bases ortogonais

Neste caso um vetor e um co-vetor verifiquem a mesma lei de transformação, pois que  $\tilde{x}^i = a_{ij} x^j$  e  $x^j = a_{ij} \tilde{x}^i$ , logo

$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = a_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$ . Neste caso, na prática, a posição do índice é indiferente (cima ou baixo), uma vez que  $u_i = g_{ij} u^j = \delta_{ij} u^j$ .

## Base de co-vetores

■ Seja  $\{dx^i\}_{1 \leq i \leq N}$  uma base dual de  $\{\hat{g}_j\}_{1 \leq j \leq N}$  definida tal que, para  $v = v^j \hat{g}_j$ ,  $dx^i[v] = v^i = v^j dx^i[\hat{g}_j]$ , i.e.,  $dx^i[\hat{g}_j] = \delta_j^i (= \delta_{ij})$ .

♣ Pelo teorema de Riesz (enunciado e demonstrado mais a frente):  $\exists \hat{g}^i \in \mathbb{R}^N$  tal que  $dx^i[v] = \hat{g}^i \cdot v$ . Em particular  $\hat{g}^i \cdot \hat{g}_j = \delta_j^i$ . Por isto, muitas vezes se escreve  $g_i \cdot g^j$  ou  $g^j \cdot g_i$  (produto interno) intendo  $g^j[g_i]$  (dualidade).

### Nomenclatura

$dx^i$  é chamado (para qualquer sistema de coordenadas)

- ▶ componente  $i$  de um vetor: entende-se  $dx^i[v] = v^i$
- ▶ elemento  $i$  da base de co-vetores:  $\omega = \sum_k \omega_k dx^k$

$\frac{\partial}{\partial x^i}$  é chamado:

- ▶ componente  $i$  de um co-vetor: entende se  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$
- ▶ elemento  $i$  da base de vetores:  $u = u^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

## Construção de uma base de ordem superior: caso de uma base ortogonal

♣ Consideremos primeiro bases ortonormais e portanto com as componentes covariantes e contravariantes que coincidem.

♣ Definimos  $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$  como uma base de elementos de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  igual a  $(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , ou seja com 8 entradas nulas excepto a entrada  $ij$ . Desta forma definimos os 9 elementos da base Cartesiana de ordem 2.

♣ Temos então  $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l$ , e, invertindo a matriz de mudança de base,  $\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ . Desta forma, definimos os 9 elementos da base móvel de ordem 2,

$$\{\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l\}_{kl}.$$

♣ Por uma construção parecida, definimos também os elementos da base de ordem 3,  $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k\}_{1 \leq i, j, k \leq 3}$  (26 entradas nulas excepto a  $ijk$  igual a 1) e  $\{\underline{g}_m \otimes \underline{g}_n \otimes \underline{g}_p\}_{1 \leq m, n, p \leq 3}$ , e todos os ordens superiores.

## Tensor de ordem $k$

♣ Uma propriedade física (ou um campo) é dada por um tensor de ordem 0 (um escalar), 1 (um vetor:  $v(1)$ ), 2, 3, 4 ou mais.

### Tensor de ordem 2: $T(2)$

Um campo  $T$  é um tensor de ordem 2 se for dado, numa base Cartesiana, por um conjunto de 9 escalares  $x \mapsto T_{ij}(x)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  t.q.  $T = T_{ij}(x)e_i \otimes e_j$  (soma em  $i$  e  $j$ ). O mesmo campo é também dado na base movél por 9 escalares  $x \mapsto T'_{ij}(x)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  t.q.  $T = T'_{kl}(x)g_k \otimes g_l$  (soma em  $k$  e  $l$ ).

Portanto, o tensor verifica a seguinte propriedade por mudança de base:

$$T'_{kl} = a_{ki}a_{lj}T_{ij}.$$

Esta relação define um tensor de ordem 2 (em sistemas de coordenadas ortogonais por enquanto)

## Operações com tensores -1-

### Tensor de ordem $k$ : $T(k)$

Um campo  $U$  é representado por um tensor de ordem  $k$  se for dado por  $3^k$  componentes numa base tensorial de ordem  $k$ , do tipo  $\{g_m \otimes \cdots \otimes g_p\}_{1 \leq m, \dots, p \leq 3}$  (efetua-se  $k$  vezes o produto tensorial da base de ordem 1). A relação por mudança de base é:

$$U'_{m \dots p} = a_{mi} \cdots a_{pj} U_{i \dots j}.$$

### Propriedades de tensores

- ▶ soma de  $P(m)$  com  $Q(m)$  (mesma ordem), componente por componente:  $P_{ijkl\dots} + Q_{ijkl\dots}$
- ▶ Produto tensorial de  $u(1)$  com  $v(1)=w(2)$ :  $w_{ij} = u_i v_j$ .
- ▶ Produto tensorial de  $U(m)$  com  $V(n)=W(n+m)$ : tensor de ordem  $n+m$ .



## Operações com tensores -2-

- ▶ Contração: traço de  $U(2)$  = escalar  $s = U_{ij}\delta_{ij} = U_{ii}$ .
- ▶ O transposto de  $U = U_{ij}g_i \otimes g_j$  é  $U^T = U_{ji}g_i \otimes g_j$ .

### Símbolos $\neq$ tensores

Os símbolos de Kronecker  $\delta_{ij}$  e de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  a partir não são tensores pois são definidos independentemente da escolha de uma base: dependem apenas dos valores dos índices.

### Tensor de ordem 0 = escalar

Um escalar  $\rho$  (exemplo: a massa volumica, densidade, temperatura, ou a pressão) é um numero real que representa uma medição de uma grandeza física, independente da base escolhida. Esse tipo de grandezas são dadas por escalares, ou seja tensores de ordem 0 (i.e., sem índice).

## Definição de um tensor de ordem $k$ : caso geral -1-

- ♣ Seja um difeomorfismo mudança de coordenadas  $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x_j)$ , em toda a generalidade não linear.
- Um tensor  $U(m; n)$  é de ordem  $(m, n)$  e de rank  $m + n$  se tiver  $m$  índices contravariantes e  $n$  índices covariantes. Escreve se como  $U = U_{i \dots l}^{\delta \dots \psi} dx^i \otimes \dots \otimes dx^l \otimes g_\delta \otimes \dots \otimes g_\psi$  com  $i \dots l$  os  $m$  índices contravariantes e  $\delta \dots \psi$  os  $n$  índices covariantes.
- A matriz de mudança de base **contravariante** é dada por

$$a_j^i := \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j},$$

enquanto a matriz de mudança de base **covariante** por

$$b_j^i := (a^{-1})_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}.$$

## Definição de um tensor de ordem $k$ : caso geral -2-

- Um tensor misto tem  $m$  índices contra- e  $n$  índices covariantes e portanto o mesmo transforma-se por mudança de base por multiplicação com a matriz  $b = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_{ij}$  caso o índice for covariante, e com  $a = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_{ij}$  caso o índice for contravariante, i.e.:

$$\tilde{U}_{m \dots p}^{\alpha \dots \eta} = b_m^i \dots b_p^l a_\delta^\alpha \dots a_\psi^\eta U_{i \dots l}^{\delta \dots \psi}.$$

- ♣ Esta lei de transformação garante que  $U$  **se mantenha invariante por mudança de base**: é a natureza de um tensor.

- ♣ REGRA: um índice, quando aparecer duas vezes, aparece uma vez como covariante (em baixo), outra como contravariante (em cima).

## Operações com tensores

### ♣ Algumas propriedades:

- ▶ soma de  $P(m; n)$  com  $Q(m; n)$  (mesma ordem), componente por componente:  $P_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots} + Q_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots}$ .

- ▶ Produto tensorial de  $U(m; n)$  com

$$V(p; q) = W((m+p); (n+q)): W_{ij\dots mn\dots}^{\alpha\beta\dots\eta\psi\dots} = U_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots} V_{mn\dots}^{\eta\psi\dots}$$

- ▶ Levantar o índice:  $U^i = g^{ij}U_j$ . Baixar o índice:  $U_i = g_{ij}U^j$ .

- ▶ Produto escalar (ou, interno) entre tensores de mesmo ordem:

$$(U, V)_g := U \cdot V = \left( U_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots} g_\alpha \otimes g_\beta \cdots \otimes dx^i \otimes dx^j \cdots \right) \cdot$$

$$\left( V_{mn\dots}^{\eta\psi\dots} g_\eta \otimes g_\psi \cdots \otimes dx^m \otimes dx^n \cdots \right) =$$

$$U_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots} V_{mn\dots}^{\eta\psi\dots} g_{\alpha\eta} g_{\beta\psi} \cdots g^{im} g^{jn} = U_{ij\dots}^{\alpha\beta\dots} V_{\alpha\beta\dots}^{\eta\psi\dots} = U_{\eta\psi\dots}^{mn\dots} V_{mn\dots}^{\eta\psi\dots}$$

- ▶ **Exemplo:**  $U_{ij} dx^i \otimes dx^j \cdot V_{kl} dx^k \otimes dx^l = U_{ij} g^{ik} g^{jl} V_{kl} = U_{ij} V^{ij}$ , daí:  $U \cdot V = U_{ij} V^{ij} =: (U, V)_g$  (há sempre uma métrica atrás).

## Tensor de Kronecker

♣ O símbolo de Kronecker (ou de substituição) é definido como  $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$  na base Cartesiana. Num outro sistema de coordenadas  $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(x_j)$  o símbolo de Kronecker  $\tilde{\delta}_{kl}$  toma os mesmos valores, sendo definido sem referência a alguma base, mas apenas com referência aos índices, pelo que  $\tilde{\delta}_{kl} = \delta_{kl}$ . Vejamos como o mesmo se comporta por transformação tensorial covariante. Portanto calculamos:

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}_l} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}_l}.$$

Logo  $\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}_l} = \delta_{kl}$  se e somente se  $\tilde{x}_k(x_j)$  é uma roto-translação (mudança de base ortonormal), i.e.,  $\tilde{x}^k = a_i^k x_i + b^k$  com  $a_i^k a_i^l = \delta_{kl}$ .

♣ **Observação:** Na expressão anterior os índices no  $\delta_{kl}$  estão em baixo, embora os  $k, l$  no membro a esquerda sejam contravariantes: é legítimo, porquê?

## O tensor métrica induzida

♣ A métrica induzida é definida como  $g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial x^j}$ . Na nova base teremos  $\tilde{g}_{kl} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^k} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^l}$ . Verifiquemos que métrica assim definida é um tensor covariante. Portanto deve verificar a lei de transformação dos tensores covariantes de ordem 2.

Verifiquemos esta propriedade:

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial x^j} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^k} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^l} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}.$$

### Trabalho de casa 2 - parte a

♣ Verifique que  $g = \det(g_{ij})_{ij}$  não é um (tensor) escalar pois por mudança de base temos  $\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij})_{ij} = J^2 g$ ,  $J := \det(\partial_{\tilde{x}^j} x^i)_{ij}$ .

### Resposta

Seja  $b = (b_j^i)_{ij} = (\partial_{\tilde{x}^j} x^i)_{ij}$  e  $a = b^T$ . Sendo  $g_{ij}$  um tensor 2-covariante, vale  $\tilde{g} = b^T g b$ , logo  $\det \tilde{g} = (\det b)^2 \det g = J^2 \det g$ .

## (Pseudo-) tensor de Levi-Civita

♣ O símbolo de Levi-Civita (ou, de permutação) é definido apenas com base o valor dos índices  $i, j, k$ , sem referência a alguma base:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se a permutação de } ijk \text{ for par} \\ -1 & \text{se for impar,} \end{cases},$$

e 0 senão. Portanto num outro sistema de coordenadas,

$\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(x_j)$ , temos a mesma,  $\tilde{\varepsilon}_{mnp} = \varepsilon_{mnp}$ .

♣ Não se transforma como um 3-tensor covariante, pois que:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^p} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right) \varepsilon_{mnp},$$

sendo que o membro a direita da equação não é o símbolo definido acima, exceto para uma transformação ortonormal com orientação directa.

### Trabalho de casa 2 - parte b

♣ Verifique que  $e_{ijk} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk}$  é um tensor covariante, chamado tensor de Levi-Civita (mediante mudanças de orientação directa).

## └ PARTE A

## └ A.4. Cálculo vetorial em bases moveis e coordenadas curvilíneas

## Acréscimo de caminho em cilíndrico

$$\begin{aligned} \text{Calcula-se } dx &= d(r g_r + z g_z) = dr g_r + dz g_z + r dg_r + z dg_z \\ &= dr g_r + r d\theta g_\theta + dz g_z = h_i ds^i \hat{g}_i = ds^i \hat{g}_i, \quad (s^i = r, \theta, z). \end{aligned}$$

♣ Temos  $ds^i[v] = \hat{v}^i$ , com o vetor  $v = \hat{v}^i \hat{g}_i$ .

## Co-vetor gradiente em cilíndrico

Co-vetor gradiente ("dual") de  $f$  = diferencial de  $f$ :

$df = f_{,r} dr + f_{,\theta} d\theta + f_{,z} dz$ , sendo as componentes "covariantes" do gradiente:  $[\nabla f]_i := f_{,i}$ , ( $i \in \{r, \theta, z\}$ ).

## Operador gradiente em curvilínea

O vetor gradiente  $\nabla f$  é definido pelas suas componentes contravariantes  $[\nabla f]^i$ , i.e.,  $\nabla f = [\nabla f]^i \hat{g}_i = [\nabla f]^i h_{ij} \hat{g}_j$ , definidas tais que se verifique  $df[v] = dx[v] \cdot \nabla f$ ,  $\forall v \in V$ , ou seja,  $df[v] = ds^i[v] \hat{g}_i \cdot [\nabla f]^j \hat{g}_j = ds^i[v] g_{ij} [\nabla f]^j$ : logo  $[\nabla f]_i = g_{ij} [\nabla f]^j$ .



## Diferencial e vetor gradiente

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } df[v] &= ds^i[v] h_i g_i \cdot [\nabla f]^j h^j g_j \Rightarrow [\nabla f]^i h_i h^j \delta_{ij} \\ &= [\nabla f]^i h_i^2 = f_{,i} \Rightarrow \nabla f = [\nabla f]^i \hat{g}_i = \frac{f_{,i}}{(h_i)^2} \hat{g}_i = \frac{f_{,i}}{h_i} g_i. \end{aligned}$$

### Resumo

- Temos o diferencial (ou co-vetor gradiente)

$$df = f_{,r} dr + f_{,\theta} d\theta + f_{,z} dz = [\nabla f]_i ds^i \text{ com suas componentes covariantes } [\nabla f]_i := \partial_i f = f_{,i}.$$

- Definimos o vetor gradiente  $\nabla f := [\nabla f]^i \hat{g}_i$  com suas componentes contravariantes  $[\nabla f]^i = g^{ij} f_{,j} = g^{ij} [\nabla f]_j$  na base curvilínea, com  $[\nabla f]_i = g_{ij} [\nabla f]^j$  e  $g^{ij} := g_{ij}^{-1}$ .

- Na base curvilínea normalizada  $\{g_j\}_j$  temos

$$\nabla f = [\nabla f]^i h_i g_i = \frac{f_{,i}}{h_i} g_i.$$

- ♣ Em particular, em cilíndrico, obtemos

$$\nabla f = [\nabla f]^i h_i g_i = (h^i g^{ij}) f_{,j} g_i = f_{,r} g_r + \frac{1}{r} f_{,\theta} g_\theta + f_{,z} g_z.$$

## Natureza tensorial do gradiente de um escalar

♣ Observação: A expressão  $[\nabla f]_i = g_{ij}[\nabla f]^j$  é obtida por identificação de termos (slide anterior) e não é a operação de baixar/levantar o índice com a métrica. Isto porquê ainda não demonstramos que  $[\nabla f]^j$  é um tensor contravariante de rank 1.

### Trabalho de casa 3

Seja  $x^i = x^i(s^j)$  um difeomorfismo de mudança de base Cartesiano-cilíndrico. Verificar que  $[\nabla f]^j$  são as componentes contravariantes do vetor  $\nabla f$ , i.e. que verifiquem a lei de transformação de um tensor 1-covariante.

HINT. Partir da expressão  $[\nabla f]^i = g^{ij} f_{,j}$ .

### Resposta

Seja  $c^j := g^{ij} \partial_{x_i} f$  e  $\tilde{c}^n := \tilde{g}^{mn} \partial_{\tilde{x}_m} f$ . Há de verificar que  $c^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \tilde{c}^n$ . Com efeito,  $c^j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \tilde{g}^{mn} \partial_{x_i} f = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \tilde{g}^{mn} \partial_{\tilde{x}_m} f$ .

## Grad, Div, Curl, $\Delta$

### Trabalho de casa 4

Seja o vetor  $v = v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z$ . calcular em componentes e coordenadas cilíndricas, com ajuda do operador  $\nabla$  cilíndrico,

- ▶ A divergência  $\nabla \cdot v$  e o rotor  $\nabla \times v$  de  $v$
- ▶ O Laplaciano  $\Delta u := \nabla \cdot \nabla u$  do escalar  $u$ .

### Trabalho de casa 5

calcular o gradiente em coordenadas esféricas (seguir os passos do slide anterior).

### HINT.

Calcula-se formalmente o produto interno:

$(\underline{g}_r \partial_r + \frac{g_\theta}{r} \partial_\theta + \underline{g}_z \partial_z) \cdot (v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z)$ , tendo em conta que

(por exemplo)  $\frac{g_\theta}{r} \partial_\theta \cdot v_r \underline{g}_r = \frac{g_\theta}{r} \cdot v_r \partial_\theta \underline{g}_r = v_r / r$ .

Tomando  $v = \nabla u$ , obtemos o Laplaciano:

$$\Delta u = 1/r \partial_r (r \partial_r u) + 1/r^2 \partial_\theta^2 u + \partial_z^2 u.$$

## Noção de grandeza invariante

♣ Em física, é primordial trabalhar com grandezas invariantes. Das varias noções de invariância, salientamos aqui "invariança com respeito as coordenadas". Chameremos "coordinate-free" a propriedade de independência com respeito as coordenadas.

♣ Seja um difeomorfismo mudança de coordenadas  $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x_j)$ . Temos, por definição do diferencial de  $\tilde{x}^i$ :  $d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} dx^k$ , ou seja  $dx^i$  é um vetor ou um tensor  $1 - 0$  (i.e., com 1 componente contravariante). D'outro lado vimos que  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ . Logo,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k,$$

pelo que  $df$  é independente da escolha de coordenadas.

♣ Definição do gradiente:  $\nabla f = [\nabla f]^j \hat{g}_j = \Phi^{-1}(df)$  com  $\Phi$  um operador entre o espaço vetorial  $V$  e seu dual  $V^*$ .

## Espaço dual $V^*$

♣ Seja um espaço vetorial  $V$  e  $v = \hat{v}^i \hat{g}_i$ . O diferencial  $ds^i : V \rightarrow \mathbb{R}$  é definido como a mapa linear:  $ds^i[v] = \hat{v}^i$  (componente contravariante de  $v$  na base curvilínea)

♣ Seja  $V^*$  o espaço vetorial das mapas lineares em  $V$ . O mesmo tem base  $\{ds^i\}$  (sendo o sistema de coordenadas escolhido  $\{s^i\}_i$ ), isto é, um elemento  $\omega$  de  $V^*$  escreve-se sempre como:

$$\omega = \omega_i ds^i, \omega_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

● DEM:

$$\forall v \in V, \omega[v] = \hat{v}^i \omega[\hat{g}_i] = \hat{v}^j \omega[\hat{g}_i] \delta_{ij} = \hat{v}^j \omega[\hat{g}_i] ds^i[\hat{g}_j] = \omega[\hat{g}_i] ds^i[v].$$



♣ Definição (formalizado mais a frente):  $\omega$  é uma 1-forma diferencial, i.e. pertence á  $\Lambda^1(V^*)$ .

## Operadores entre $V$ e $V^*$

### Produto interno de $V^*$

Seja  $\omega := \omega_i ds^i \in V^*$  e  $\lambda := \lambda_i ds^i \in V^*$ . Definimos

$$(\omega, \lambda)_* = g^{ij} \omega_i \lambda_j.$$

- Comparar com o p.i. de  $V$ :  $u \cdot v = \hat{u}^i \hat{g}_i \cdot \hat{v}^j \hat{g}_j = g_{ij} \hat{u}^i \hat{v}^j$ .

### Operador "dual recíproco" $\Phi^{-1}$

$$\Phi^{-1} : V^* \rightarrow V; \omega = \omega_i ds^i \mapsto \omega_i g^{ij} \hat{g}_j.$$

Portanto o operador  $\Phi$  será definido de tal maneira que  $\Phi(\Phi^{-1}) = \text{Id}$ .  $\Phi$  é o operador (um isomorfismo) que transforma um vetor numa forma diferencial.

### Operador $\Phi$

$$\Phi : V \rightarrow V^*; v = \hat{v}^j \hat{g}_j \mapsto \hat{v}^j g_{kj} ds^k$$

## Invariança do operador $\Phi$

### Lema: Representação de um funcional linear (Riesz)

Seja  $V$  um espaço vetorial com um produto interno

$\langle \cdot | \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)_g$ . Seja um mapa linear  $\omega \in V^*$ ,  $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Então existe um único vetor  $u = u_\omega \in V$  tal que  $\omega[v] = \langle u | v \rangle, \forall v \in V$ .

DEM:  $\forall v \in V, \omega[v] = \omega_k ds^k[v] = \omega_k \hat{v}^k = \delta_{kj} \omega_j \hat{v}^k = g_{ik} g^{ij} \omega_j \hat{v}^k = g_{ik} \hat{u}^i \hat{v}^k = \langle u | v \rangle$ , com as definições  $\hat{u}^i := g^{ij} \omega_j$  e  $\omega_j := \omega(e_j)$ .

QED ■

### Bracket notation—notação de Dirac

Sendo que  $\omega[v] = \langle u_\omega | v \rangle$  a notação de Dirac é a seguinte:

$\langle u_\omega | := \Phi(u_\omega)$  ("bra") representa a forma linear  $\omega$  enquanto  $|v \rangle$  ("ket") é o vetor  $v$ .

♣ Falta ainda demonstrar que  $\Phi$  (como  $df$ ) é "coordinate-free".

## Definição invariante de $\Phi$ e de $\Phi^{-1}$

Seja  $l \in V^*$  e  $u = u_1 \in V$  tal que, pelo teorema de Riesz,

$$l[v] = \langle u_1 | v \rangle.$$

O operador  $\phi$  é definido como:  $\phi : V^* \rightarrow V : l \mapsto \phi(l) = u_1$ .

Logo  $\Phi := \phi^{-1}$  e  $\Phi^{-1} := \phi$  são independentes das coordenadas uma vez que  $\Phi(u_1)[v] = l[v] = \langle u_1 | v \rangle$ , sendo o produto interno independente das coordenadas.

## Definição "coordinate-free" do gradiente

Seja uma função  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . O gradiente de  $f$  é definido como:

$$\nabla f = \text{grad} f := \Phi^{-1}(df).$$



## Aplicação em coordenadas curvilíneas

♣ Seja uma superfície regular  $\Gamma$  parametrizada por um sistema de coordenadas  $\{s^R\}_{1 \leq R \leq N}$ . A mesma tem como vetores tangentes os vetores de base (não normalizados)  $\tau_R := \hat{g}_R = \frac{\partial x}{\partial s^R}$ . Definimos a derivada direcional curvilínea

$$\partial_R := \tau_R \cdot \nabla = \tau_R \cdot e_i \partial_{x_i} = \frac{\partial x^i}{\partial s^R} \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial s^R}$$

♣ Seja  $f$  um campo escalar diferenciável, logo  $\partial_R f = \tau_R \cdot \nabla f$ , portanto:  $\nabla f = \partial_R f \tau_R$  ( $= \sum_R \partial_R f \tau_R$ ), caso a base for ortonormal. No caso geral temos

$$\partial_R f = \tau_R \cdot \nabla f = \tau_R \cdot ([\nabla f]^S \tau_S) = [\nabla f]^S \tau_R \cdot \tau_S = [\nabla f]^S g_{RS}.$$

Daí

$$\nabla f = [\nabla f]^S \tau_S = g^{SR} \partial_R f \tau_S.$$

Mas, também, uma vez que  $g^{SR} \tau_S = \tau^R$ , a base dual de  $\tau_S$ ,

$$\nabla f = \tau^R \partial_R.$$

## Aplicação em coordenadas curvilíneas

### "Invalidade" do lema de Schwarz em coordenadas curvilíneas

Sendo que  $\partial_A \partial_B f = \partial_A (\nabla f \cdot \tau_B) = \partial_A (\nabla f) \cdot \tau_B + \nabla f \cdot \partial_A \tau_B$ .

Sendo que  $\partial_A (\nabla f) = (\tau_A \cdot \nabla) (\nabla f) = (\nabla^2 f) \tau_A$ , logo

$\partial_A \partial_B f = (\nabla^2 f) \tau_A \cdot \tau_B + \nabla f \cdot \partial_A \tau_B$ .

Temos também  $\partial_B \partial_A f = (\nabla^2 f) \tau_B \cdot \tau_A + \nabla f \cdot \partial_B \tau_A$ .

Portanto, pelo Lema de Schwarz em Cartesiano (i.e., simetria da Hessiana  $\nabla^2 f := \nabla \nabla f$ ):

$$\partial_B \partial_A f - \partial_A \partial_B f = \nabla f \cdot (\partial_B \tau_A - \partial_A \tau_B), \quad (\circ)$$

que será  $\neq 0$  devido a curvatura (e a torção) de  $\Gamma$ ; logo num espaço afim (por exemplo, em  $\mathbb{R}^N$ ), curvatura = torção = 0 e a comutação das derivadas segundas é lícita).

## Tensor "gradiente de um vetor"

♣ Seja  $u = \hat{u}^i \hat{g}_i$  um vetor com componentes contravariante  $u^i$  na base  $\{\hat{g}_k\}_k$  (não necessariamente normalizada). O tensor gradiente de  $u$  é  $T^{ij} = (\nabla u)^{ij}$  tal que  $\nabla u = T^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = (\nabla u)^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$ . Sendo que  $\forall v \in V$ ,  $du[v] = d(\hat{u}^i \hat{g}_i)[v] = \hat{g}_i \otimes d\hat{u}^i[v] + \hat{u}^i d\hat{g}_i[v] = (\hat{g}_i \otimes \nabla \hat{u}^i) dx[v] + (\hat{u}^i \nabla \hat{g}_i) dx[v] =: (\nabla u) dx[v]$ , a expressão de  $\nabla u$  é dada por  $\nabla u = \hat{g}_i \otimes \nabla \hat{u}^i + \hat{u}^i \nabla \hat{g}_i = \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j [\nabla \hat{u}^i]^j + \hat{u}^n \nabla \hat{g}_n$ , sendo  $\nabla$  o operador gradiente expressado na base curvilínea.

♣ Falta expressar  $\nabla \hat{g}_n$  na base curvilínea covariante:

$\nabla \hat{g}_n = [\nabla \hat{g}_n]^j \hat{g}_j = [\nabla \hat{g}_n]^j \cdot \hat{g}_i \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \Lambda_n^{ji} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$ . Portanto

$$(\nabla u)^{ij} = [\nabla \hat{u}^i]^j + \hat{u}^n \Lambda_n^{ji}.$$

♣ Logo as componentes (1 – 1) do gradiente são definidas como:

$$(\nabla \hat{u})_k^i := (\nabla u)^{ij} g_{jk} = [\nabla \hat{u}^i]_k + \hat{u}^n \Lambda_n^{ji} g_{jk},$$

sendo  $\Gamma_{nk}^i := \Lambda_n^{ji} g_{jk}$  chamado segundo símbolo de Christoffel (veremos que não é um tensor!). Lembra-se que  $[\nabla \hat{u}^i]_k = \partial_k \hat{u}^i$ .

## Caráter tensorial da derivada covariante

♣ Não demonstramos ainda o carácter tensorial de  $(\nabla u)_k^i \dots$

♣ Na base Cartesiana temos  $(\nabla_{\text{Cart.}} u)_k^i := \partial_k u^i$  com  $u = u^i e_i$

♣ Sob uma transformação linear  $\hat{x}^i = a^i_j x^j$  com

$$a^i_j = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} = \text{constante, temos } \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial (\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^l}) u^l}{\partial x^j} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial u^l}{\partial x^j}.$$

♣ A mesma lei deve ser válida quando houver mudança de base geral, i.e., sob o difeomorfismo (não linear)  $s^k = s^k(x^i)$ . Assim, o gradiente na base curvilínea  $\{\frac{\partial}{\partial s_i}\}_i$  será um tensor, i.e., verifica uma determinada lei de transformação por mudança de base.

♣ Na base curvilínea temos  $(\nabla u)^{ij} = g^{jk} (\nabla u)_k^i$  com  $\hat{u}_{;k}^i := (\nabla u)_k^i$  o tensor  $(1 - 1)$  chamado derivada covariante do vetor  $u = \hat{u}^i \hat{g}_i$ .

## Componentes de $(\nabla u)_k^i$

♣ É esta condição de ser um tensor que irá determinar a expressão do mesmo na base curvilínea, i.e., temos que ter

$\hat{u}_{;k}^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^l}{\partial s^k}$  ( $\star$ ) (aqui, com  $x^j$  Cartesiano, e, com um abuso de notação,  $u = u^l e_l$  na base Cartesiana).

♣ Pela natureza tensorial  $(1 - 0)$  de  $u^i$  temos  $\hat{u}^i = u^l \frac{\partial s^i}{\partial x^l}$

♣ Pela natureza tensorial ( $\star$ )  $(1 - 1)$  de  $\hat{u}_{;k}^i := (\nabla u)_k^i$  temos

$$\hat{u}_{;k}^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^l}{\partial s^k} = \frac{\partial(u^l \frac{\partial s^i}{\partial x^l})}{\partial s^k} - u^l \frac{\partial}{\partial s^k} \left( \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - u^l \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k},$$

logo, já que  $u^l = \hat{u}^n \frac{\partial x^l}{\partial s^n}$ ,

$$\hat{u}_{;k}^i = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - \hat{u}^n \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} + \hat{u}^n \Gamma_{nk}^i.$$

♣ Os símbolos de Christoffel ou conexão diferencial são definidos mediante estas mudanças de coordenadas. Aparecem devido a derivação dos elementos da base curvilínea:

### Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{nk}^i := -\frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}.$$

### Derivada covariante (curvilínea) de um vetor

A derivada covariante do vetor  $u = \hat{u}^i \hat{g}_i$  é o tensor de rank 2 e ordem 1 – 1,

$$\nabla^\Gamma u = \nabla_k^\Gamma u ds^k,$$

com  $\nabla_k^\Gamma u = (\nabla^\Gamma u)_k^i \hat{g}_i$  e

$$(\nabla^\Gamma u)_k^i := \hat{u}_{;k}^i = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} + \hat{u}^n \Gamma_{nk}^i. \quad (\text{DevCov -1-})$$

## Componentes de $(\nabla u)_{ik}$

- ♣ Consideremos agora o co-vetor  $\omega = \omega_i dx^i = \hat{\omega}_j ds^j$ . Pela natureza tensorial  $(0 - 1)$  de  $\omega_i$  temos  $\hat{\omega}_j = \omega_l \frac{\partial x^j}{\partial s^l}$
- ♣ Pela natureza tensorial  $(0 - 2)$  de  $\hat{\omega}_{i;k} := (\nabla \omega)_{ik}$  temos

$$\hat{\omega}_{i;k} = \frac{\partial x^i}{\partial s^l} \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial \omega_l}{\partial x^j} \quad (**),$$

logo, após computações similares:

### Derivada covariante (curvilínea) de um co-vetor

A derivada covariante do co-vetor  $\omega = \hat{\omega}_i ds^i$  é o tensor de rank 2 e ordem  $0 - 2$ ,  $\nabla^\Gamma \omega = \nabla_k^\Gamma \omega ds^k$  com  $\nabla_k^\Gamma \omega = (\nabla^\Gamma \omega)_{ik} ds^i$  e

$$(\nabla^\Gamma \omega)_{ik} := \hat{\omega}_{i;k} = \frac{\partial \hat{\omega}^i}{\partial s^k} - \hat{\omega}_n \Gamma_{ik}^n. \quad (\text{DevCov -2-})$$

## Símbolos de Christoffel -1-

### Invariança

Nos 2 casos temos um gradiente independente das coordenadas uma vez que:

$$\nabla^\Gamma u := \hat{u}^i_{;k} \hat{g}_i \otimes ds^k = \partial_m u^n e_n \otimes dx^m = e_n \otimes du^n = du \text{ e}$$

$$\nabla^\Gamma \omega := \hat{\omega}_i{}_{;k} ds^i \otimes ds^k = \partial_m \omega_n dx^m \otimes dx^n = d\omega_n \otimes dx^n = d\omega.$$

### Símbolos de Christoffel: definição alternativa

Toma  $u = \hat{g}_i = (\hat{g}_i)^j \hat{g}_j = \delta_i^j \hat{g}_j$  com  $\delta_i^j = \delta_{ij}$  componente por componente. Portanto

$$\nabla_k^\Gamma \hat{g}_i = (\nabla^\Gamma \hat{g}_i)_k^j \hat{g}_j = (\delta_i^j)_{;k} \hat{g}_j = \delta_i^n \Gamma_{nk}^j \hat{g}_j = \Gamma_{ik}^j \hat{g}_j \quad (\blacksquare).$$

Logo,  $\nabla_k^\Gamma \hat{g}_i \cdot \hat{g}_l = \Gamma_{ik}^l g_{jl}$  e também, uma vez que  $\hat{g}_i \cdot \hat{g}^l = \delta_{il}$ ,

$$\Gamma_{ik}^l := \nabla_k^\Gamma \hat{g}_i \cdot \hat{g}^l.$$



♣ Toma  $\omega = ds^i = (ds^i)_j ds^j = \delta_j^i ds^j$ . Logo,

$$\begin{aligned}\nabla_k^\Gamma ds^i &= (\nabla^\Gamma ds^i)_{jk} ds^j = (\delta_j^i)_{;k} ds^j = \\ &= -\delta_n^i \Gamma_{jk}^n ds^j = -\Gamma_{jk}^i ds^j \quad (\blacksquare\blacksquare).\end{aligned}$$

## Conexão geométrica

Os símbolos  $\Gamma_{pq}^k$  não se transformam como um tensor, pois que após mudança de base  $\{x_k\}_k \rightarrow \{\hat{x}_l\}_l$  verifica-se facilmente que

$$\hat{\Gamma}_{mn}^l = \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^k} \left( \Gamma_{pq}^k \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^m} \frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^n} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} \right) \quad (**).$$

♣ Definição: Uma conexão geométrica é uma família de funções  $\Gamma_{pq}^k$  que se transformam conforme a lei (\*\*), sob qualquer mudança de base geral (sob difeomorfismos). A mesma é independente da métrica escolhida.

## Símbolos de Christoffel: definição alternativa -2-

Sendo que

$$0 = \frac{\partial}{\partial s^n} \left( \frac{\partial s^i}{\partial s^k} \right) = \frac{\partial}{\partial s^n} \left( \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^k} \right) = \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^n} \frac{\partial x^l}{\partial s^k},$$

temos (permutando os índices)

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} = - \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^m \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} = - \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} = \Gamma_{nk}^i.$$

Mas

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} dx^l \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial s^n \partial s^k} \right] = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} dx^l [\partial_n \hat{g}_k].$$

♣ Então podemos definir  $\Gamma_{nk}^i$  como

$$\Gamma_{nk}^i := ds^i [\partial_n \hat{g}_k].$$

(as vezes escrito na forma " $\hat{g}^i \cdot \partial_n \hat{g}_k$ ": é a definição original em geometria extrínseca.)

## Aplicação: gradiente de um vetor em coordenadas polares

-1-

♣ Consideremos  $u = u^i e_i = \hat{u}^j \hat{g}_j$  com  $\hat{g}_j = u^j g_j$  com  $\hat{g}_j$  um elemento de base curvilínea (não necessariamente normalizada) e  $g_j$  a normalizada. Estamos a procura da expressão de  $\nabla u$  na base polar  $\hat{g}_\alpha = \{\hat{g}_r, \hat{g}_\theta\}$  e na base normalizada  $g_\alpha = \{g_r, g_\theta\}$ , onde  $\hat{g}_r = g_r = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$  e  $\hat{g}_\theta = r g_\theta = -r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y$ .

♣ Começemos com um cálculo formal na base normalizada :

$$\begin{aligned} \nabla^T u &= (g_r \partial_r + g_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta) \otimes (u^r g_r + u^\theta g_\theta) = \\ &g_r \otimes g_r \partial_r u^r + g_r \otimes g_\theta \partial_r u^\theta + g_\theta \otimes g_r \frac{\partial_\theta u^r}{r} + g_\theta \frac{u^r}{r} \partial_\theta g_r + g_\theta \frac{\partial_\theta u^\theta}{r} \otimes g_\theta \\ &+ g_\theta \frac{u^\theta}{r} \partial_\theta g_\theta = g_r \otimes g_r \partial_r u^r + g_r \otimes g_\theta \partial_r u^\theta + g_\theta \otimes g_r \frac{\partial_\theta u^r}{r} + g_\theta \otimes g_\theta \frac{u^r}{r} \\ &+ g_\theta \otimes g_\theta \frac{\partial_\theta u^\theta}{r} - g_\theta \otimes g_r \frac{u^\theta}{r}. \end{aligned}$$

## Aplicação: gradiente de um vetor em coordenadas polares

-2-

Aqui  $\nabla^T u =: "u \nabla = u \otimes \nabla"$  significa o gradiente transposto (por convenção). Portanto obtemos a seguinte matriz das componentes 2-contravariantes do gradiente de  $u$  na base normalizada:

$$((\nabla u)^{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \partial_r u^r & \frac{\partial_\theta u^r}{r} - \frac{u^\theta}{r} \\ \partial_r u^\theta & \frac{\partial_\theta u^\theta}{r} + \frac{u^r}{r} \end{pmatrix},$$

logo com  $\nabla u = (\nabla u)^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta$ . Repare que pelo caráter tensorial do gradiente temos  $(\nabla u)^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma} (\nabla u)_\gamma^\alpha$ .

♣ Calculemos agora o gradiente na base geral mediante a fórmula explícita das componentes 1 covariante-1 contravariante:

$$(\nabla u)_\gamma^\alpha = \hat{u}_{;\gamma}^\alpha := \partial_\gamma \hat{u}^\alpha + \hat{u}^\tau \Gamma_{\tau\gamma}^\alpha.$$

Portanto calculemos primeiro os símbolos com a fórmula

$$\Gamma_{nk}^i = \hat{g}^i \cdot \partial_n \hat{g}_k = g^{ij} \hat{g}_j \cdot \partial_n \hat{g}_k = (h^i)^{-2} \hat{g}_i \cdot \partial_n \hat{g}_k,$$

## Aplicação: gradiente de um vetor em coordenadas polares

-3-

onde utilizamos o fato de a base polar ser ortogonal. Em polar temos  $h^r = 1$  e  $h^\theta = r$ . Obtemos que os únicos símbolos não nulos são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \hat{g}_r \cdot \partial_\theta \hat{g}_\theta = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = r^{-2} \hat{g}_\theta \cdot \partial_\theta \hat{g}_r = r^{-3} \hat{g}_\theta \cdot \hat{g}_\theta = \frac{1}{r}.$$

Portanto vem  $\nabla u = (\nabla u)_\beta^\alpha \hat{g}_\alpha \otimes \hat{g}^\beta$ , onde,

$$((\nabla u)_\beta^\alpha)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \partial_r \hat{u}^r & \partial_\theta \hat{u}^r - r \hat{u}^\theta \\ \partial_r \hat{u}^\theta + \frac{\hat{u}^\theta}{r} & \partial_\theta \hat{u}^\theta + \frac{\hat{u}^r}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r u^r & \partial_\theta u^r - u^\theta \\ \frac{\partial_r u^\theta}{r} & \frac{\partial_\theta u^\theta}{r} + \frac{u^r}{r} \end{pmatrix},$$

sendo que  $u^r = \hat{u}^r$  e  $u^\theta = r \hat{u}^\theta$ . Notemos que  $\nabla u = (\nabla u)_\beta^\alpha \hat{g}_\alpha \otimes \hat{g}^\beta = (\nabla u)^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta$ , uma vez que  $\hat{g}_\alpha \otimes \hat{g}^\beta = (h^\beta)^{-2} \hat{g}_\alpha \otimes \hat{g}^\beta = h^\alpha (h^\beta)^{-1} g_\alpha \otimes g_\beta$ , i.e.  $\hat{g}_r \otimes \hat{g}^\theta = r^{-1} g_r \otimes g_\theta$  e  $\hat{g}_\theta \otimes \hat{g}^r = r g_\theta \otimes g_r$ .

## Derivação covariante - caso geral

♣ A derivada covariante é a generalização da derivada clássica à um espaço com curvatura.

Matematicamente, uma operação de derivação covariante (= conexão diferencial) significa a escolha de uma conexão  $\Gamma_{pq}^k$  e de um operador diferencial linear  $\mathcal{L}_k$  sob tensores de ordem qualquer que satisfaça:

- (i) Se  $f$  é um campo escalar diferenciável:  $\mathcal{L}_k f = \frac{\partial f}{\partial s^k}$ .
- (ii) Se  $u$  e  $\omega$  são vetores e co-vetores,  $\mathcal{L}_k = \nabla_k^\Gamma$ , cf. formulas (DevCov -1-) e (DevCov -2-).
- (iii) Regra de Leibniz: Se  $U$  e  $V$  são tensores de ordem qualquer então  $\mathcal{L}_k(U \otimes V) = \mathcal{L}_k U \otimes V + U \otimes \mathcal{L}_k V$ .

Esta última permite determinar derivadas covariantes de tensores de ordem qualquer.

## Derivada covariante de um tensor

Teorema: derivada covariante de um tensor de ordem 2 – 0

Seja  $T = T^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$ . Então  $\nabla T = \mathcal{L}_k T dx^k$  com

$$\mathcal{L}_k T = \nabla_k^\Gamma T = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial s^k} + \Gamma_{lk}^i T^{lj} + \Gamma_{lk}^j T^{il} \right) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j.$$

DEM. Pela (iii)  $\mathcal{L}_k T = \mathcal{L}_k(T^{ij} \hat{g}_i) \otimes \hat{g}_j + T^{ij} \hat{g}_i \otimes \mathcal{L}_k \hat{g}_j$ . Pela linearidade, (i) e (iii),  $\mathcal{L}_k T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial s^k} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j + T^{ij} \mathcal{L}_k \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j + T^{ij} \hat{g}_i \otimes \mathcal{L}_k \hat{g}_j$ . Pela (ii) e (■),  $\mathcal{L}_k T = \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial s^k} + T^{lj} \Gamma_{lk}^i \right. \\ \left. + T^{il} \Gamma_{lk}^j \right) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$ . QED ■

♣ Derivada covariante de um tensor 0 – 2:

Seja  $T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Então

$$\nabla_k^\Gamma T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial s^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk}^l T_{il} \quad (\blacktriangle).$$

## Conexão compatível

### Conexão compatível com a métrica

Uma conexão  $\Gamma$  é compatível com a métrica se  $\nabla^\Gamma g = 0$ , i.e.  $\nabla_k^\Gamma g_{ij} = 0$ . Neste caso vale a propriedade de derivação de um produto,

$$D_w(u, v)_g = (D_w u, v)_g + (u, D_w v)_g.$$

Em particular se  $U, V$  são campos vetoriais ao longo de uma curva  $t \mapsto \gamma(t)$  vale

$$\frac{d}{dt}(U, V)_g = (D_t U, V)_g + (D_t V, U)_g$$

♣ Para além, como consequência direta da definição, temos a propriedade de que baixar/levantar os índices permutam com a derivação, i.e.,  $g_{ij} \nabla^\Gamma u^i = \nabla^\Gamma g_{ij} u^i = \nabla^\Gamma u_j$ .



## Torção da conexão

### Torção (intrínseca)

A torção da conexão  $\Gamma$  é definida como  $T_{kj}^i := \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$ . Logo uma métrica sem torção significa que os símbolos de Christoffel são simétricos nos dois índices covariantes.

### Trabalho de casa 6

Demonstrar que  $T$  é um tensor. HINT. Resposta em uma linha.

### Variedade Riemanniana

Uma variedade diferenciável é dita Riemanniana se a métrica é definida positiva, não-singular e simétrica, e se a torção da conexão é nula.

## Conexão compatível com a métrica e transporte paralelo

♣ Em Física, temos sempre que medir e comparar grandezas em pontos diferentes. É a noção de transporte paralelo: em espaço curvo o caminho escolhido para comparar dois vetores/tensores influa sobre o resultado.

### Transporto paralelo

Um tensor  $T$  é covariantemente constante ou paralelo longo uma

curva  $\gamma$  se  $\nabla_{\dot{\gamma}}^{\Gamma} T = \dot{\gamma}_k \nabla_k^{\Gamma} T$

$= \dot{\gamma}_k \left( \frac{\partial}{\partial s^k} T_{(\alpha)}^{(i)} + T_{(\alpha)}^{(i)} \nabla_k^{\Gamma} (\hat{g}^{(i)} \otimes ds^{(\alpha)}) \right) = 0$ : numa geometria não Euclidiana paralelo  $\neq$  componente constantes ( $\frac{\partial}{\partial s^k} T_{(\alpha)}^{(i)} = 0$ ).

♣ Consequência de  $\nabla^{\Gamma} g = 0$ : se  $U^{\beta} U_{\beta} = \text{cst}$  então  $0 = U_{\beta} \partial_{\alpha} U^{\beta}$ .

## Conexão de Levi-Civita

### Teorema: Conexão de Levi-Civita

Seja uma métrica  $g_{ij}$  não singular. Então existe uma única conexão simétrica compatível com a métrica  $g_{ij}$ . A mesma é dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

DEM. Seja  $\Gamma_{k;ij} := g_{kl} \Gamma_{ij}^l$ . Pela compatibilidade da conexão (cf.

(▲)),  $0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il}$ , logo

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk}(A)$ . Permutando os índices,

$\frac{\partial g_{jk}}{\partial s^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki}(B)$  e  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial s^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij}(C)$ . Efetuando

$(B) + (C) - (A)$  e sendo a conexão simétrica, i.e.,  $\Gamma_{k;ij} = \Gamma_{k;ji}$ , obtemos  $2\Gamma_{l;ij} = \partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$ . Multiplicando por  $\frac{1}{2} g^{kl}$ , segue o resultado. QED ■

## Derivada covariante ao longo de uma curva

Seja uma curva  $t \in I \mapsto \gamma(t) \subset \mathcal{M}$ . Seja  $I \mapsto V(t)$  um campo vetorial ao longo de  $\gamma[I]$  que verifica a propriedade de ser extensível, i.e., existe um campo  $\tilde{V}$  definido numa vizinhança de  $\gamma[I]$  em  $\mathcal{M}$  tal que  $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$ . Neste caso a derivada covariante ao longo de  $\gamma$  é definida como

$$D_t V := \dot{\gamma} \cdot \nabla \tilde{V} = \left( \frac{dV^k}{dt} + \dot{\gamma}^j V^i \Gamma_{ij}^k \right) g_k = \frac{dV^k}{dt} g_k + V^k D_t g_k. \quad (\blacktriangle),$$

lembrando (■) na página 55.

♣ Seja uma família de curvas suaves  $\gamma(t, s)$  onde  $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$ . Definimos  $T := \partial_t \gamma(t, s)$  com  $s$  fixado e  $S := \partial_s \gamma(t, s)$  com  $t$  fixado. Localmente, podemos escrever em coordenadas  $\gamma(t, s) = (x^1(t, s), \dots, x^n(t, s))$  e  $T = \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k}$  e  $S = \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial}{\partial x^k}$ .

## Geodésica - forma local

Segue imediatamente que

$$D_t S - D_s T = \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{ds} T_{ij}^k g_k. (\blacktriangle\blacktriangle)$$

### Geodésica

Uma curva é chamada geodésica se verifique

$$\nabla_v v = 0,$$

onde  $v := \frac{dx}{dt}$  é o vetor tangente à curva, ou seja se a curva satisfaz a equação

$$\frac{dx^i}{dt} \nabla_{;i} \frac{dx^j}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{ki}^j \frac{dx^k}{dt} \right) = \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{ki}^j \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0. (\star)$$

## Geodésicas como curvas otimizadas -1-

♣ Lembramos-nos das equações das geodésicas

$$\ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0. \quad (\star)$$

♣ Vimos em Geometria Diferencial que  $(\star)$  representam as equações de Euler-Lagrange do problema variacional  $\text{MIN} \int_a^b ds(t)$ : minimizar o comprimento de uma curva entre dois pontos fixados.

### Equações de Euler-Lagrange

Seja  $\mathcal{A}(x(t)) := \int_a^b L(t, x(t), y(t)) dt$  com  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $y(t) = \dot{x}(t)$ .

O mínimo do funcional  $\mathcal{A}$  com respeito a todas as curvas admissíveis com dados limites as duas extremidades fixadas

$P = x(a)$  e  $Q = x(b)$  é obtido resolvendo as equações de Euler-Lagrange  $(\star)$  associadas ao problema de minimização.

## Geodésicas como curvas otimizadas -2-

O resultado seguinte foi demonstrado em Geometria diferencial.

**Teorema.** Geodésicas Riemannianas minimizam a distância entre dois pontos.

Seja  $P, Q \in S$ . Então existe uma única curva em  $S$  que minimiza a distância entre  $P$  e  $Q$ , com a distância induzida pela métrica. Esta curva é uma geodésica que passa por  $P$  e  $Q$ . Logo satisfaz  $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$  e  $\|\gamma'\| = \text{cte}$ .

♣ A palavra Riemanniana serve para salientar que a conexão (os símbolos de Christoffel) é Riemanniana (ou de Levi-Civita), uma vez que o resultado aplica-se também as variedades Riemannianas.

♣ Observação: no caso de uma métrica de Lorentz (vê parte C) uma geodésica realiza a distância maximal entre dois pontos do espaço-tempo.

## Os matemáticos do dia



**Figure:** Elie Cartan: Matemático Francês (1869-1951). **Base locais:** "La méthode de repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés"; **cálculo tensorial:** "Le calcul tensoriel projectif"; **Conexão afim:** "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)"



**Figure:** Elwin Bruno Christoffel: Matemático alemão (1829 – 1900). **Ideas preliminares do cálculo tensorial;** **Derivada covariante:** "Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades" (no mais velho jornal de matematica ainda existente: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*).



## Curvatura de Riemann -1-

### Conexão Euclidiana (ou afim)

Uma conexão  $\Gamma$  é afim em  $p$  se existe um sistema de coordenadas  $\{x_k\}$  no qual  $\Gamma = 0$  numa vizinhança de  $p$ . Neste caso  $\nabla_k^\Gamma = \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Neste caso, pelo Lema de Schwarz, temos comutação das derivadas covariantes, i.e.,  $\nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma - \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma = \partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k = 0$ .

♣ A questão que levantamos agora é de quantificar a falta de comutação das mesmas no caso de uma conexão geral (i.e., não Euclidiana). Seja o vetor  $w = w^i g_i (= \sum_i w^i g_i)$ . Pela condição (ii) da definição de derivação covariante, temos  $U_k^i := \nabla_k^\Gamma w^i = \partial_k w^i + \Gamma_{lk}^i w^l$ . Pela fórmula de derivação de um tensor (1 - 1), análoga as formulas da página 62, vem

$$\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma w^i = T_{lk}^p \nabla_p^\Gamma w^i + R_{q lk}^i w^q,$$

onde definimos o tensor curvatura de Riemann como:

## Curvatura de Riemann -2-

### Curvatura de Riemann

$$R_{q l k}^i := \frac{\partial \Gamma_{q k}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{q l}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{p l}^i \Gamma_{q k}^p - \Gamma_{p k}^i \Gamma_{q l}^p \quad (\diamond)$$

♣ Se consideremos uma conexão simétrica, logo a torção é evanescente e obtê-se a fórmula clássica que define a curvatura de Riemann (com soma em  $q$ ) como aplicação do plano tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p$ , com  $\mathcal{M}$  de dimensão  $m$ :

$$\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w^i := \nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w^i - \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w^i = R_{q l k}^i w^q, \forall w = w^i g_i \in T_p \mathcal{M}. \quad (\spadesuit)$$

♣ A curvatura de Riemann é um tensor com  $m^4$  componentes. Existem variantes do mesmo definidas como por exemplo a curvatura full-covariante  $R_{i q k l} = g_{ij} R_{q k l}^j$  (com soma em  $j$ ).

## Curvatura de Riemann -3-

♣ A prova do resultado segue por contraposição e a definição ( $\diamond$ ).

Lema

Se  $R_{qkl}^i \neq 0$  então a conexão não é Euclidiana, logo

▶ não ha comutação das derivadas covariantes segundas.

Teorema. Antisimetria e identidade de Bianchi algébrica

Temos sempre

$$(i) R_{qkl}^i = -R_{qlk}^i$$

$$(ii) \text{ Se a conexão for simétrica, então } R_{qkl}^i + R_{lqk}^i + R_{klq}^i = 0$$

Lema (Simétrias da curvatura).

Para conexões de Levi-Civita temos sempre

$$(iii) R_{iqkl} = -R_{iqlk} \text{ e } R_{jqkl} = -R_{qjkl}$$

$$(iv) R_{iqkl} = R_{kliq}$$

## Curvatura de Riemann -4-

### Definição coordinate-free da curvatura de Riemann

Numa variedade Riemanniana, logo sem torção, a curvatura de Riemann é uma forma tri-linear com valores no espaço dos co-vetores, tal que para  $S, T$  e  $V$  campos vectoriais do plano tangente vale

$$R(S, T)V := \left( R_{ijkl} S^k T^l V^q \right) g^i.$$

♣ Dado  $S$ , a forma linear  $T \mapsto \mathcal{R}T := R(S, T)S$  é auto-adjunta, uma vez que, pelas propriedades de simetria (na página anterior),

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}T, U)_g &= R(S, T)S \cdot U = R_{ijkl} S^k T^l S^q U^i = R_{ikql} S^q T^l S^k U^i = \\ &= R_{qlik} S^q T^l S^k U^i = R_{lqki} S^q T^l S^k U^i = T \cdot R(S, U)S = (T, \mathcal{R}U)_g. \quad (\circ\circ) \end{aligned}$$

## Curvatura de Riemann -5-

### Curvatura de Ricci e curvatura escalar

A curvatura de Ricci é o traço (ou "contração") da curvatura de Riemann, i.e.,  $R_{ij} := g^{mk} R_{imjk} = g^{mk} R_{mikj} = R^k_{.ikj}$ . É um tensor simétrico:  $R_{ij} = g^{mk} R_{mikj} = g^{mk} R_{kjmi} = R^m_{.jmi} = R_{ji}$ . Enfim, a curvatura escalar é o traço do tensor de Ricci:  $R = R_{ij}g^{ij}$ .

Lema. Identidade de Bianchi diferencial.

Temos sempre

$$\nabla_j^\Gamma R^i_{.qkl} + \nabla_k^\Gamma R^i_{.qlj} + \nabla_l^\Gamma R^i_{.qjk} = 0.$$

DEM. Como  $\nabla_j^\Gamma R^i_{.qkl}$  é um tensor, podemos mudar de base; escolhamos a base normal (geodésica) onde  $\Gamma = 0$  no ponto, logo  $\nabla_j^\Gamma = \partial_j$  no ponto. Ora, verifiquemos que a identidade vale nesta base e concluímos que vale em todas por ser uma expressão tensorial. QED

## Curvatura de Riemann -6-

### Tensor de Einstein

O tensor de Einstein  $S$  é definido como

$$S_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}.$$

Lema. Lei de conservação.

Temos sempre

$$\nabla_j^\Gamma S^{ij} = \nabla_i^\Gamma S^{ij} = 0$$

DEM. Pela identidade de Bianchi diferencial, a antisimetria do tensor de Riemann e tomando o traço  $ij$ , obtemos

$\nabla_i^\Gamma R^i_{.qkl} - \nabla_k^\Gamma R^i_{.qil} + \nabla_l^\Gamma R^i_{.qik} = 0$ , ou seja pela definição do tensor de Ricci,

$$\nabla_i^\Gamma R^i_{.qkl} - \nabla_k^\Gamma R_{ql} + \nabla_l^\Gamma R_{qk} = 0.$$

## Curvatura de Riemann -7-

Multipliquemos por  $g^{qk}$ , logo por se tratar de uma métrica compatível,

$$\nabla_i^\Gamma R^{ik}{}_{..kl} - \nabla_k^\Gamma R^k{}_{..l} + \nabla_l^\Gamma R = -\nabla_i^\Gamma R^{ki}{}_{..kl} - \nabla_k^\Gamma R^k{}_{..l} + \nabla_l^\Gamma R = 0,$$

ou seja pela definição do tensor de Ricci,

$$-2\nabla_i^\Gamma R^i{}_{..l} + \nabla_l^\Gamma R = 0.$$

Por ser um tensor temos  $\nabla_l^\Gamma R = \delta_{il} \nabla_i^\Gamma R = g^{ik} g_{kl} \nabla_i^\Gamma R = g_l^i \nabla_i^\Gamma R$ , logo

$$\nabla_i^\Gamma \left( R^i{}_{..l} - \frac{1}{2} g_l^i R \right) = 0.$$

Multiplicando por  $g^{lj}$  e pela simetria do tensor de Ricci, e a compatibilidade da métrica, vem o resultado. QED



## Campos de Jacobi -1-

♣ Definimos primeiro uma variação da curva suave  $t \mapsto \gamma(t)$ : seja uma família de curvas suaves  $\gamma(t, s)$  onde  $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$ .

Definimos  $T := \partial_t \gamma(t, s)$  com  $s$  fixado e  $S := \partial_s \gamma(t, s)$  com  $t$  fixado. Localmente, podemos escrever em coordenadas

$$\gamma(t, s) = (x^1(t, s), \dots, x^n(t, s)) \text{ e } T = \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ e } S = \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

### Lema

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana. Seja  $V$  um campo vetorial em  $\gamma(t, s) \subset \mathcal{M}$ . Então

$$(D_s D_t - D_t D_s)V = R(S, T)V.$$

DEM. Por (▲) p. 68, temos

$$D_s D_t V = \partial_s \partial_t V^k g_k + \partial_t V^k D_s g_k + \partial_s V^k D_t g_k + V^k D_s D_t g_k,$$

logo,

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^k (D_s D_t g_k - D_t D_s g_k)$$



## Campos de Jacobi -2-

uma vez que, por (○) p. 50 e (▲▲) p. 69, sendo sem torção vem  $\partial_s \partial_t V^k - \partial_t \partial_s V^k = \nabla V^k (\partial_s T - \partial_t S) = 0$ . Mas,

$$D_s D_t g_k = D_s (T^j \nabla_j^\Gamma g_k) = \partial_s \partial_t x^j \nabla_j^\Gamma g_k + T^j S^i \nabla_i^\Gamma \nabla_j^\Gamma g_k,$$

onde  $\partial_s \partial_t x^j - \partial_t \partial_s x^j = 0$  pelo mesmo motivo. Logo, por (♠) p. 74, vem

$$D_s D_t g_k - D_t D_s g_k = T^j S^i \nabla_{[i}^\Gamma \nabla_{j]}^\Gamma g_k =: T^j S^i R(g_i, g_j) g_k.$$

Pela linearidade da curvatura segue a tese. QED ■

♣ Seja  $t \mapsto \gamma(t)$  uma geodésica, logo  $D_t T = 0$  e obtemos

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T + R(S, T)T$$

Mas, pela relação (▲▲) p. 69 com  $T_{ij}^k = 0$  e as simétrias da curvatura vem

$$0 = D_s D_t T = D_t D_t S + R(S, T)T = D_t D_t S - R(T, S)T. (\bullet\bullet)$$

## Campos de Jacobi -3-

Acabamos de demonstrar o resultado seguinte:

### Teorema (Equação de Jacobi).

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana sem torção. Seja  $t \mapsto \gamma(t) \subset \mathcal{M}$  uma geodésica e  $J$  uma variação da geodésica, i.e.,  $J = \partial_s \gamma(t, s)|_{s=0}$ . Então vale

$$D_t D_t J = \ddot{J} = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} =: \mathcal{R}J.$$

♣ Seja uma geodésica  $t \in I \mapsto \gamma(t)$  em  $p \in \mathcal{M}$  com velocidade inicial  $V \in T_p \mathcal{M}$ . Numa carta local pode ser escrita no tempo inicial como  $V = V^k g_k(p)$  onde  $g_k := \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Na carta local e em coordenadas geodésicas  $\gamma$  é imagem do segmento  $(tV^1, \dots, tV^n)$ , com  $t = r$  o raio geodésico. Seja  $W = W^k g_k \in T_p \mathcal{M}$ ;

consideremos a variação pelas geodésicas

$\gamma(t, s) := t(V^k + sW^k)g_k$ . Logo  $J(t) := \partial_s \gamma(t, s)|_{s=0} = tW^k g_k$  é um campo de Jacobi tal que  $J(0) = 0$  e  $\dot{J}(0) = D_t J(0) = W$ .

## Campos de Jacobi -4-

♣ Ao longo da geodésica, definimos  $f(t) := (J(t), J(t))_g$ . Derivando, considerando a propriedade do operador  $\mathcal{R}$  ser auto-adjunto (cf. (◦◦) p.75), e a equação  $\ddot{J} = \mathcal{R}J$ , obtemos

$$f'(t) = 2(\dot{J}, J)_g$$

$$f''(t) = 2(\ddot{J}, J)_g + 2(\dot{J}, \dot{J}) = 2(\mathcal{R}J, J)_g + 2(\dot{J}, \dot{J})$$

$$f'''(t) = 2(\dot{\mathcal{R}}J, J)_g + 8(\mathcal{R}\dot{J}, J)_g$$

$$f^{(iv)}(t) = 2(\ddot{\mathcal{R}}J, J)_g + 12(\dot{\mathcal{R}}\dot{J}, J)_g + 8(\mathcal{R}J, \mathcal{R}J)_g + 8(\mathcal{R}\dot{J}, \dot{J})_g.$$

Ora, sendo que  $J(0) = 0$  vem

$$f(0) = 0 = f'(0), f''(0) = 2(\dot{J}(0), \dot{J}(0)) = 2(W, W)_g, f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(0) = 8(\mathcal{R}W, W)_g = -8(R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W)_g$$

$$f^{(v)}(0) = -20(D_t R(\dot{\gamma}, W)W, \dot{\gamma})_g.$$

## Campos de Jacobi -5-

Teorema (Aproximação da métrica pela curvatura).

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana sem torção. Numa vizinhança geodésica de  $p \in \mathcal{M}$  e em coordenadas geodésicas temos

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l - \frac{1}{6}\nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^k x^l x^m + \mathcal{O}(\|x\|^4)$$

DEM. Fixado  $x$  na carta local, e assumindo que  $0$  e  $x$  pertencem a mesma, consideremos a geodésica com raio  $t$ , a abcissa curvilínea. Logo  $t(x - 0) = tx$  é o segmento geodésico associado, com  $t \in [0, \ell]$  e  $\ell$  o comprimento da porção de geodésica que satisfaz  $\ell \leq C\|x\|$ ,  $C > 0$ . Temos também  $\dot{\gamma}(0) = x^i g_i$ . Definimos  $f(t) = (J(t), J(t))_g = g_{ij}(tx)J^i(t)J^j(t) = t^2 g_{ij}(tx)W^i W^j$ . Por Taylor

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^5 \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)t^\alpha + \mathcal{O}(t^6).$$

## Campos de Jacobi -6-

Portanto,

$$f(t) = g_{ij}(0)W^iW^jt^2 - \frac{8}{4!}R_{iklj}\dot{\gamma}(0)^k\dot{\gamma}(0)^lW^iW^jt^4 \\ - \frac{20}{5!}D_tR_{iklj}\dot{\gamma}(0)^k\dot{\gamma}(0)^lW^iW^jt^5 + O(t^6).$$

Mas,  $\dot{\gamma}(0)^i = x^i$ ,  $D_tR_{iklj} = \nabla_m^\Gamma R_{iklj}\dot{\gamma}(0)^m = \nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^m$ , e, em coordenadas geodésicas em 0,  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , logo

$$f(t) = t^2g_{ij}(tx)W^iW^j = \delta_{ij}W^iW^jt^2 - \frac{8}{4!}R_{iklj}x^kx^lW^iW^jt^4 \\ - \frac{20}{5!}\nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^kx^lx^mW^iW^jt^5 + O(\|x\|^6),$$

uma vez que  $t \sim \|x\|$ . O resultado segue tomando  $t = 1$  e  $W$  canônico (i.e.,  $W = g_n$ ,  $W^i = \delta_{in}$ ). QED ■

## Os matemáticos do dia



**Figure:** Bernhard Riemann (Matemático alemão (1826-1866)). Inúmeras contribuições. Importante aqui é a introdução da geometria intrínseca que deu lugar a teoria das variedades ("*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*". Abh. Kgl. Ges. Wiss., Göttingen 1868).



**Figure:** Karl Jacobi (Matemático alemão (1804-1851)). Contribuições em equações diferenciais, teoria dos números, e conceito de determinante ("*De formatione et proprietatibus Determinantium*". Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1841 (22)).

## Rotor e divergência (primeira abordagem: formalmente)

- **Nota:** Formal = Operacional = Prático
  - ♣ A **divergência** de  $u$  na base curvilínea é obtida efetuando
 
$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \nabla \cdot (u^i g_i) = \nabla u^i \cdot g_i + u^i \nabla \cdot g_i.$$
  - Sendo  $u^i$  um escalar  $\nabla u^i$  é calculado como infra.
- Falta apenas calcular o escalar

$$\nabla \cdot g_i = (g_j \nabla^j) \cdot g_i = g_j g^{jk} \nabla_k \cdot g_i = g_j \cdot (g^{jk} \partial_k g_i), \forall i.$$

- ♣ O **rotor** de  $u$  na base curvilínea é obtida efetuando
 
$$\operatorname{curl} u = \nabla \times (u^i g_i) = \nabla u^i \times g_i + u^i \nabla \times g_i.$$
- Falta apenas calcular o vetor

$$\nabla \times g_i = (g_j \nabla^j) \times g_i = g_j g^{jk} \nabla_k \times g_i = g_j \times (g^{jk} \partial_k g_i), \forall i.$$

- ♣ O **Laplaciano** da função escalar  $f$  é definido como
 
$$\Delta f := \nabla \cdot \nabla f.$$

## Divergência (segunda e terceira abordagem: mediante o tensor gradiente e mediante a métrica)

♣ A divergência de  $u$  na base curvilínea pode ser obtida (ou definida) a partir do tensor gradiente  $\nabla u = \nabla \otimes u = (\nabla u)^{ij} g_i \otimes g_j$ , tomando o traço da matriz composta das componentes 1 – 1 do mesmo, sendo que  $\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = (\nabla u)^{ij} g_i \cdot g_j = g_{ij} (\nabla u)^{ij} = (\nabla u)_i^i = \operatorname{tr}_g (\nabla u)_j^i = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^i} + \hat{u}^n \Gamma_{ni}^i$ .

♣ Pode ser demonstrado, pela expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica, que  $\operatorname{div} u = 1/\sqrt{|g|} \frac{\partial(\sqrt{|g|} \hat{u}^i)}{\partial s^i}$  (vê página 135).

### Trabalho de casa 7

Seja  $u$  um vetor expressado na base cilíndrica. (i) calcular  $(\nabla u)^{ij}$  na base cilíndrica. HINT:  $\nabla u = \nabla u_i \otimes g_i + u_i \nabla g_i$  com  $\nabla = g_r \partial_r + g_\theta (1/r) \partial_\theta + g_z \partial_z$  ( $\nabla g_r = (1/r) g_\theta \otimes g_\theta$ , etc.); calcular  $\operatorname{div} u$  nas bases cilíndrica com os 3 métodos.



## Rotor curvilínea (2a abordagem em termo do tensor gradiente)

♣ As componentes do rotor de  $u$  em Cartesiano são

$$\varepsilon_{ijm} \partial_j u_m g_i = e_{jm}^i (\nabla u)^{mj} g_i = \Phi(e_{kjm} (\nabla u)^{mj} dx^k).$$

♣ Na base curvilínea também podem ser obtidas a partir de  $\nabla u$  mediante uma multiplicação com o tensor de Levi-Civita (e não apenas o símbolo), ou seja, partindo da forma diferencial

$$\text{curl}_g u | ds := e_{jmk} (\nabla u)^{mj} ds^k, \text{ e definindo } \text{curl} u := \Phi(\text{curl}_g u | ds) \\ = g^{ik} \sqrt{|g|} \varepsilon_{jmk} (\nabla u)^{mj} g_i.$$

NB: numa base ortonormada,  $g^{ik} \sqrt{|g|} = \delta_{ik}$ , logo

$$\text{curl} u = \nabla \times u = \delta_{ik} \varepsilon_{jmk} (\nabla u)^{mj} g_i = \varepsilon_{jmk} (\nabla u)^{mj} g_k.$$

### Trabalho de casa 8

Seja  $u$  um vetor expressado na base esférica. (i) calcular  $(\nabla u)^{ij}$  na base esférica. (ii) calcular  $(\text{curl} u)^i$  a partir de  $(\nabla u)^{ij}$ ; (iii) Verificar que  $(\text{curl} u)^i$  é um tensor contravariante.

## Conceito de tensores objetivos -1-

### Mudança de observador

Definido através uma mudança de sistema de referência  $(x, t) \rightarrow (x^*, t^*)$ . Os acontecimentos são representados pelo par  $(x^*, t^*)$ , e existe uma matriz orthogonal  $t \mapsto Q(t)$ , um vetor  $t \mapsto c(t)$  e um scalar  $a$  t.q.  $x^* = Q(t)(x - x_O) + c(t)$  e  $t^* = t - a$ .

♣ Além disso, existe um mapa, dito de **deformação**,  $\Phi$  tal que  $x^* = \Phi(X, t^*)$ , onde  $X := \Phi^{-1}(x, t)$  é o chamado **ponto material** associado a  $x$  (em  $t$ ) na configuração de referência (ou inicial) escolhida no primeiro sistema de referência .

### Transformação objetiva por mudança de observador

Já que  $x_2^* - x_1^* = Q(t)(x_1 - x_2)$ , um vetor  $v$  é dito **objetivo** se o observador 2 observe um vetor  $v^*$  que verificou uma rotação, i.e.,  $v^* = Q(t)v$ , ou seja se transforma por mudança de observador com uma lei tensorial mesmo que  $Q$  depender de  $t$ .

## Conceito de tensores objetivos -2-

♣ Um tensor de ordem 2 será objetivo se  $U^*(x^*, t) = Q(t)U(x, t)Q^T(t)$ , onde  $x^* = \Phi(X, t^*)$ . Um escalar é sempre objetivo:  $\alpha^* = \alpha$ .

### Exemplos

- ▶ Seja  $T = u \otimes v$ , onde  $u$  e  $v$  são 2 vetores objetivos. Portanto  $T^* = u^* \otimes v^* = Q(t)u \otimes Q(t)v = Q(t)(u \otimes v)Q^T(t)$ . (★)
- ▶ Seja o campo escalar  $\alpha = \hat{\alpha}(x, t)$ . Portanto  $\partial_{x^*i}\alpha^* = \partial_{x_j}\alpha \frac{\partial x^j}{\partial x^*i} = \partial_{x_j}Q_{ji}^T$ , ou seja  $\nabla_{x^*}\alpha^* = Q(t)\nabla_x\alpha$ . (★)
- ▶ Seja  $f(x, t) = 0$  uma superfície com normal exterior  $N(x) := \frac{\nabla f(x, t)}{|\nabla f(x, t)|}$ . Portanto  $N^*(x^*) = \frac{\nabla f^*(x^*, t)}{|\nabla f^*(x^*, t)|} = \frac{Q(t)\nabla f(x, t)}{|Q(t)||\nabla f(x, t)|} = Q(t)N(x)$ . (★)

## Conceito de tensores objetivos -3-

### Contra-exemplos

- ▶ Velocidade:  $\dot{x}^* = Q(t)\dot{x} + \dot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{c}$
- ▶ Aceleração:  $\ddot{x}^* = Q(t)\ddot{x} + \ddot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{Q}(t)\dot{x} + \ddot{c}$ 
  - ♣ Nota que  $\ddot{x}$  será objetivo por mudança inercial de observador, i.e., onde  $\dot{Q} = \ddot{c} = 0$ : a aceleração é um vetor objectivo Galileano (rotação rigida + translação uniforme).
- ▶ Gradiente de velocidade:
  - $\nabla_{x^*}\dot{x}^* = Q(t)\nabla\dot{x}Q^T(t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)$  (Nota:  $\nabla^*x = Q^T$ ).
  - ♣ Nota que  $\frac{d}{dt}QQ^T = 0$  e portanto  $\dot{Q}Q^T$  é antisimétrica.
  - ♣ Logo, a parte simétrica do gradiente de velocidade,  $\nabla_{x^*}^S\dot{x}^*$ , é um tensor objetivo.
  - ♣ NOTA: parte simétrica de um tensor  $U$  de ordem 2:  $U^S := \frac{1}{2}(U + U^t)$ .

## (Grassman) algebra dos $m$ -vetores em $\mathbb{R}^N$

1. Definimos uma classe de equivalência  $\sim$  sobre  $(\mathbb{R}^N)^m$  tal que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq m$  temos

$$(a) \quad (u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, \alpha u_j, \dots, u_m)$$

$$(b) \quad (u_1, \dots, u_i + \alpha u_j, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

$$(c) \quad (u_1, \dots, -u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

Temos também  $u \sim v \iff v \sim u$  e  $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ .

2. Um  $m$ -vetor simples é definido como

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_m \in (\mathbb{R}^N)^m / \sim$$

3. Considere o espaço vetorial  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$  das combinações lineares de simples  $m$ -vetores munido da relação de equivalência

$$(A) \quad \alpha(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \equiv (\alpha u_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

$$(B) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_m + \tilde{u}_1 \wedge \dots \wedge u_m \equiv (u_1 + \tilde{u}_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

Este espaço é chamado espaço dos  $m$ -vetores em  $\mathbb{R}^N$ .

## (Grassman) algebra dos $m$ -vetores

- $u \wedge v$  é chamado "  $u$  (produto) wedge com  $v$ ".
- Seja  $u_1, \dots, u_m$  mutuamente dependentes. Logo  $\forall i, \exists \alpha_j^{(i)} : 0 = u_i - \sum_{1=j \neq i}^m \alpha_j^{(i)} u_j$ . Pelo (b) temos  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$ . Em particular se  $m > N$ ,  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$ .
- Exemplo: o 2-vetor  $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$  não é simples.

### Algebra exterior dos vetores

Seja  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$  o espaço vetorial dos  $m$ -vetores em  $\mathbb{R}^N$ . Definimos a **algebra exterior** de  $\mathbb{R}^N$  como a soma directa  $\Lambda_*(\mathbb{R}^N) = \Lambda_1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda_N(\mathbb{R}^N)$  com a extensão linear da seguinte operação de base entre um  $m$ - e um  $l$ -vetor ("concatenação"):

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_l) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_l$$

( $\in \Lambda_{m+l}(\mathbb{R}^N)$  se  $m+l \leq N$ , = 0 senão).

## Funções $m$ - multilineares e alternantes

### Função $m$ -multilinear e alternantes

1. Uma função  $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$  é  $m$ -multilinear se,  $\forall$ (entrada)  $l$  ,  
$$\phi(u_1, \dots, \alpha u + \beta v, \dots, u_m) =$$
$$\alpha \phi(u_1, \dots, u, \dots, u_m) + \beta \phi(u_1, \dots, v, \dots, u_m)$$
2. Uma função  $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$  é alternante se,  $\forall i, l$ ,  
$$\Phi(u_1, \dots, u_l, \dots, u_i, \dots, u_m) =$$
$$-\Phi(u_1, \dots, u_l, \dots, u_i, \dots, u_m)$$

### Espaço vetorial das funções $m$ -multilineares e alternante

Definimos  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  como o espaço das funções  $\phi, \psi$  que verifiquem (1) e (2) e t.q.  $(\phi + \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u)$  e  $(\alpha\phi)(u) = \alpha\phi(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Os elementos de  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  são chamados  $m$ -**covetores**.

## Dualidade vetor-covetor: produto exterior ("wedge")

- No caso  $m = 0$ ,  $\Lambda^0(\mathbb{R}^N)$  é o espaço das funções de  $\mathbb{R}^N$  com valores reais. No caso  $m = 1$ ,  $\Lambda^1(\mathbb{R}^N) = (\mathbb{R}^N)^*$ , 1-linear = linear.  $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$  é o espaço das formas diferenciais.
- **No caso**  $m = N$ , os elementos de  $\Lambda^N(\mathbb{R}^N)$  são múltiplos reais do determinante da matrix  $U = (u_1 \cdots u_N)$  ou  $U^T$ , sendo o determinante (definido como) a única forma  $N$ -multilinear alternada tal que  $\det(e_1 | \cdots | e_n) = 1$ .
- Seja  $a_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i.e.  $\exists a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N$  tal que  $a_i = a_{i1}dx^1 + \cdots + a_{iN}dx^N, \forall 1 \leq i \leq m$ .

### Produto exterior (definição)

O **produto exterior**  $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \in \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é definido como:

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1, \dots, u_m] := \det(\langle a_i | u_j \rangle)_{ij}, \forall u_i = u_i^k e_k \in \mathbb{R}^N.$$



## $m$ -Jacobiano

- Mediante a relação de equivalência  $\sim$  é evidente que  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é o espaço dual de  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ , com  $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1 \wedge \cdots \wedge u_m] = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1, \cdots, u_m]$ . Sendo a base de  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ ,  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ ,  $1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq N$ , a base de  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ ,  $1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq N$ , já que  $dx^{i_m} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}[e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}] = 1$  se  $i_k = j_k$  e  $= 0$  ou  $-1$  senão.

### $m$ -Jacobiano

Seja um mapa  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  suficientemente regular. O  $m$ -covetor **Jacobiano** é definido como  $Ju := du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$ .

- No caso  $N = m$  vem

$$Ju = \det(Du) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

## (Grassmann) algebra dos vetores e co-vetores

- **EX 1:** a forma  $dS = dx^1 \wedge dx^2$  em  $\mathbb{R}^3$  é chamada elemento de superfície orientado, pois que  $dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$
- **EX 2:** a forma  $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  em  $\mathbb{R}^3$  é o elemento de volume orientado:  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ .

### Algebra exterior dos co-vetores

Definimos também  $\Lambda^*(\mathbb{R}^N) = \Lambda^1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda^N(\mathbb{R}^N)$  com a extensão linear da operação entre um  $m$ - e um  $l$ -co-vetor:

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_l) = a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_l$$

( $\in \Lambda^{m+l}(\mathbb{R}^N)$  se  $m+l \leq N$ , = 0 senão).

### Remark: caso de uma variedade

Se estivermos numa variedade  $\mathcal{M}$  em vez de  $\mathbb{R}^N$  então o espaço vetorial associado é o plano tangente em cada ponto  $x \in \mathcal{M}$ ,  $T_x \mathcal{M}$ . As bases associadas ao mesmo são portanto  $\{g_i\}_i$  e  $\{g^j\}_j$ .

## Dualidade $m$ -vetor- $m$ -covetor

### Base dual de co-vetores

Sendo  $\{e_i\}_i$  a base Cartesiana de  $\mathbb{R}^N$ , definimos a base dual  $\{e_j^*\}_j$  tal que  $\langle e_j^* | e_i \rangle = \delta_{ij}$ . Notação:  $e_i^* = dx^i =$  diferencial de  $x^i$ .

Base de  $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ :  $\{dx^{i_1}, \dots, dx^{i_N}\}$ . A base de  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é:

$\Xi_m^N := \{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}, dx^{\sigma_1(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_1(i_m)}, \dots, dx^{\sigma_d(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_d(i_m)}\}$  com  $\sigma_i(k)$  ( $1 \leq i \leq d = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ ) uma permutação par dos índices  $1 \leq k \leq N$ .

♣ Assim, a base de  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  é  $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$  e a de  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  é  $(dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3)$ , sendo que  $dx^1 \wedge dx^2(e_1 \wedge e_2) = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$  enquanto  $dx^1 \wedge dx^2(e_2 \wedge e_3) = \det(0 \ 0 | 1 \ 0) = 0$ , etc.

### Trabalho de casa 11 -a-

Quantos e quais são os elementos da base  $\Xi_2^4$  e  $\Xi_3^4$ ?

## Base de orientação direta -1- 3d

♣ **Regra 1:** partimos de um triedro de orientação direta em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

♣ Construímos o 3-vetor simples orientado por convenção (dita da mão direita)  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$ , e os 2-vetores simples orientados  $\{e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1\}$ .

♣ **Regra 2:** A ordem dos elementos na base dual  $\{dx^i, dx^j, dx^k\}$  é conforme o sinal das mapas de dualidade:

- caso ser uma 3-forma,  $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k [e_m \wedge e_n \wedge e_p]$  só pode ser 0, -1 ou 1, sendo que  $e_m \wedge e_n \wedge e_p$  tem orientação direta.

Portanto a ordem certa (= direta) é  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  ou  $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1$  ou  $dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ , pois neste caso vale 1.

- caso ser uma 2-forma, temos que ter  $dx^i \wedge dx^j [e_m \wedge e_n]$  igual a 0, -1 ou 1, sendo que  $e_m \wedge e_n$  tem orientação directa. Obtemos portanto a base  $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1\}$ .

- **Contra-exemplo:** a base  $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$  não tem orientação direta pois que  $dx^1 \wedge dx^3 [e_3 \wedge e_1] = -1$ .

## Base de orientação directa -2- $m$ -formas sob $\mathbb{R}^N$

♣ **Caso das  $N$ -formas:** a base é a única  $N$ -forma simples tal que  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N} [e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}]$  igual a 1,  $-1$  ou 0, sendo que  $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}$  tem orientação directa, ou seja  $j_1 < \cdots < j_N$  é uma permutação par de  $1 < \cdots < N$ . Dito isto,  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N} = dx^{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(i_N)}$  para qualquer mapa de permutação  $\sigma$  que seja par, é também uma base.

♣ **Caso das  $m$ -formas:** constroi-se o símbolo  $\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & \cdots & & N \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{N-m} & \end{array} \right)$  com os índices  $i_k$  e  $j_l$  ordenados, ou seja  $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N$  e  $1 \leq j_1 < \cdots < j_{N-m} \leq N$ . Depois determina-se o mapa de permutação  $\sigma$  tal que  $\sigma(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{N-m}) = (1, \dots, m, m+1, \dots, N)$ .

♣ Se o mapa for par, a ordem  $(i_1, \dots, i_m)$  é directa, e a base directa constroi-se com esses índices na ordem certa.

## Coreção do exercício 11 - a

♣ **2-formas em  $\mathbb{R}^4$** : temos 6 elementos que são dados após

$$\text{análise do símbolo} \quad \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par.} \end{array} \right)$$

Sendo assim os 6 elementos da base na ordem certa são

$$\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^4, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^3 \wedge dx^4, dx^4 \wedge dx^2\}$$

♣ **3-formas em  $\mathbb{R}^4$** : temos 4 elementos que são dados após

$$\text{análise do símbolo} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar.} \end{array} \right)$$

Sendo assim os 4 elementos da base na ordem certa são

$$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4, dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^4, dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4\}$$

## Dualidade vetor-covetor: produto exterior ("wedge") -1-

♣ **No caso**  $m = N$ , os elementos de  $\Lambda^N(\mathbb{R}^N)$  são múltiplos reais do determinante da matrix  $U = (u_1 \cdots u_N)$  ou  $U^T$ , sendo o determinante (definido como) a única forma  $N$ -multilinear alternada tal que  $\det(e_1 | \cdots | e_n) = 1$ .

♣ Seja  $a_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i.e.  $\exists a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N$  tal que  $a_i = a_{i1}dx^1 + \cdots + a_{iN}dx^N, \forall 1 \leq i \leq m$ .

### Produto exterior (definição)

O **produto exterior**  $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \in \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é definido como:

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1, \dots, u_m] := \det(\langle a_i | u_j \rangle)_{ij}, \forall u_i = u_i^k e_k \in \mathbb{R}^N.$$

### Determinante

Seja um mapa  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  suficientemente regular. O  $m$ -covetor **Jacobiano** é definido como  $Ju := du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$ .

## Dualidade vetor-covetor: produto exterior ("wedge") -2-

♣ No caso  $N = m$  vem

$$Ju = \det(Du) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

♣ Mediante a relação de equivalência  $\sim$  é evidente que  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é o espaço dual de  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ , com  $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m [u_1 \wedge \cdots \wedge u_m] = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m [u_1, \dots, u_m]$ . Sendo a base de  $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ ,  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N$ , a base de  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  é  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N$ , já que  $dx^{i_m} \wedge \cdots \wedge dx^{i_1} [e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}] = 1$  se  $i_k = j_k$  e  $= 0$  ou  $-1$  senão.



## (Grassmann) algebra dos vetores e co-vetores

- **EX 1:** a forma  $dS = dx^1 \wedge dx^2$  em  $\mathbb{R}^3$  é chamada elemento de superfície orientado, pois que  $dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$
- **EX 2:** a forma  $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  em  $\mathbb{R}^3$  é o elemento de volume orientado:  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3$ .

### Algebra exterior dos co-vetores

Definimos também  $\Lambda^*(\mathbb{R}^N) = \Lambda^1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda^N(\mathbb{R}^N)$  com a extensão linear da operação entre um  $m$ - e um  $l$ -co-vetor:

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_l) = a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_l$$

( $\in \Lambda^{m+l}(\mathbb{R}^N)$  se  $m+l \leq N$ , = 0 senão).

### Remark: caso de uma variedade

Se estivermos numa variedade  $\mathcal{M}$  em vez de  $\mathbb{R}^N$  então o espaço vetorial associado é o plano tangente em cada ponto  $x \in \mathcal{M}$ ,  $T_x \mathcal{M}$ . As bases associadas ao mesmo são portanto  $\{g_i\}_i$  e  $\{g^j\}_j$ .

## Formas diferenciais

### Definição

Uma  $m$ -forma diferencial sobre o aberto  $W \subset \mathbb{R}^N$  é uma função:  $\phi : W \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ . Pode ser escrita na base de  $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$  como  $\phi = \phi_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ , com a definição das componentes  $\phi_{i_1 \dots i_m}(x) = \phi(x)[e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}]$ . Temos  $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ ,

$$x \rightarrow \phi(x)[v] := \phi_{i_1 \dots i_m}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} [v_1 \wedge \dots \wedge v_m].$$

- A forma  $\phi$  é  $\mathcal{C}^k(W)$  se  $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ ,  $x \rightarrow \phi(x)[v]$  é  $\mathcal{C}^k(W)$ .
- $\{x_i\}_i$  são as coordenadas (Cartesianas ou curvilíneas).
- $m$  é chamado grau da forma  $\phi$ .
- Uma forma diferencial  $\phi$  vai naturalmente ser integrada sobre uma superfície  $m$ -dimensional: 1-forma  $L$  como integral de linha, 2-forma  $S$  como integral de superfície, 3-forma  $V$  como integral de volume. Para isso teremos de introduzir métrica e medida.

## Exemplos de cálculo exterior com formas diferenciais com coeficientes constantes

♣ **EX1.** Seja  $m = 2$  e  $a_1, a_2, a_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ . Temos

$a_1 \wedge (a_2 + a_3) = a_1 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_3$ , pois que

$$a_1 \wedge (a_2 + a_3)[u_1, u_2] = \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ (a_2 + a_3)[u_1] & (a_2 + a_3)[u_2] \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_2[u_1] & a_2[u_2] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_3[u_1] & a_3[u_2] \end{pmatrix}.$$

♣ **EX2.** Seja  $N = 3$ ,  $m = 2$ ,  $a_1 = Adx$  e  $a_2 = Bdy + Cdz$ . Então

$a_1 \wedge a_2 = ABdx \wedge dy + ACdx \wedge dz$ , ou seja

$$a_1 \wedge a_2[u, v] = ABdx \wedge dy[u, v] + ACdx \wedge dz[u, v] =$$

$$AB(u_1v_2 - u_2v_1) + AC(u_1v_3 - u_3v_1) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} Au_1 & Av_1 \\ Bu_2 + Cu_3 & Bv_2 + Cv_3 \end{pmatrix} = Adx \wedge (Bdy \wedge Cdz)[u, v].$$

## Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$

♣ **EX3.** Seja  $N = 3$ ,  $m = 2$ ,  $a_1 = Adx$  e  $a_2 = Bdy + Cdz$ .

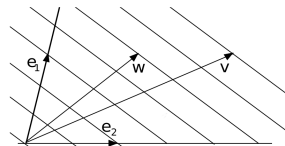
Temos  $a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$ , pois que  $ABdx \wedge dy + ACdx \wedge dz = -BAdy \wedge dx - CADz \wedge dx = -(Bdy + Cdz) \wedge Adx$ .

### Generalização

Seja  $\omega$  uma forma diferencial de ordem ímpar, logo

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega, \text{ i.e., } \omega^2 = 0.$$

♣ **EX4.** Seja um fluxo  $\omega = 3dx + 2dy$  (i.e. com densidade 3 longo  $e_1$  e 2 longo  $e_2$ ), e sejam  $v = e_1 + 2e_2$  e  $w = e_1 + e_2$ .

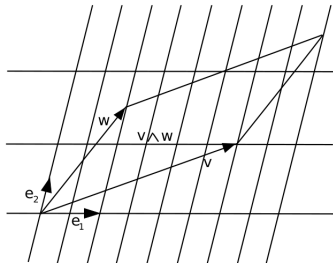
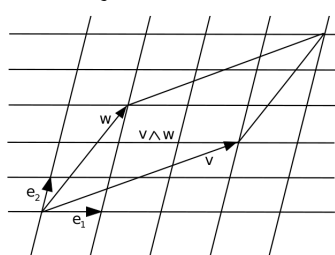


○ fluxo ao longo de  $v$ ,  $\omega[v] = 3.1 + 2.2 = 7 = \text{numero de linhas cruzadas por } v$ , e longo  $w$ :  $\omega[w] = 3.1 + 2.1 = 5 = \text{numero de linhas cruzadas por } w$ .

## Sentido geométrico de uma 2-forma a $2d$

♣ **EX5.**  $dx \wedge dy[e_1 \wedge e_2] = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$ . Sendo que  $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$  é unidimensional, tem  $dx \wedge dy$  como único elemento da base, logo  $\omega = k dx \wedge dy \in \mathbb{R}$ . Em particular  $dx \wedge dy[v \wedge w] = \det(v_1 \ w_1 | v_2 \ w_2) = \text{area (com sinal) do paralelograma (orientado) gerado por } u \text{ e } v$ .

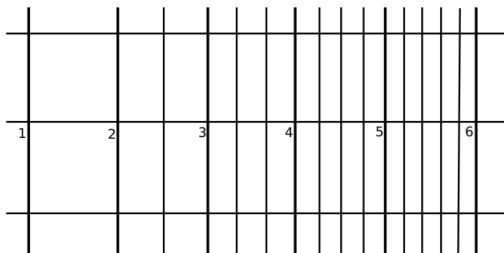
♣ **EX6.** Seja  $v = 3e_1 + 2e_2$  e  $w = e_1 + 3e_2$ .



Temos  $dx \wedge dy[v \wedge w] = |3 \ 1 | 2 \ 3| = 7 = \# \text{ celas cobertas por } v \wedge w$ .  
 Seja  $\omega = 2dx \wedge \frac{1}{2}dy = dx \wedge dy$ . Temos  $\omega[v \wedge w] = 7 = \omega[2v \wedge \frac{1}{2}w]$ .

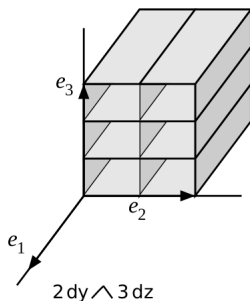
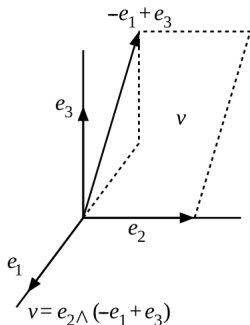
## Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$ com coeficientes variáveis

♣ **EX7.** Seja  $\omega = xdx$ . A representação geométrica de  $[x]dx$  com  $[x]$  a aproximação inteira de  $x$  é dada pela figura:



## Sentido geométrico de uma 2-forma a $3d$ com coeficientes constantes

♣ **EX8.** Seja  $\omega = 2dy \wedge 3dz$  e seja o retângulo com normal  $\nu = e_2 \wedge (-e_1 \wedge e_3)$  gerado por  $e_2$  e  $-e_1 + e_3$ . Quantos tubos rectangulares na figura a direita são cortados por  $\nu$ ? Resposta: temos que calcular  $\omega[\nu] = |2 \ 0|0 \ 0| + |2 \ 0|0 \ 3| = 6$ .



## Elementos e integrandos de linha, superfície e volume

♣ Vimos que os elementos de linha, superfície e volume são  
 $dL = dx, dy, dz$ ,  $dS = dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$  e  
 $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ . Portanto os integrandos de linha, superfície e  
 volume são então  $\gamma|dL = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$ ,  
 $\Gamma|dS = A(x, y, z)dx \wedge dy + B(x, y, z)dx \wedge dz + C(x, y, z)dy \wedge dz$   
 e  $f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$ . Serão integrados numa curva, superfície  
 ou volume de  $\mathbb{R}^3$  logo que teremos uma noção de integral.

### Trabalho de casa 9

Seja  $L = a dx$  e  $S = C dy \wedge dz$ . Verificar que  $L \wedge S = S \wedge L$ .

Seja  $L = \gamma \cdot dL$ ,  $S = \Gamma \cdot dS$  e  $V = f(x)dV$ . Verificar que (i)

$L \wedge S = S \wedge L$ , (ii)  $S \wedge dx \wedge dy = 0$ , (iii)  $V \wedge L = 0$ .



## Mudança de coordenadas no plano

♣ Vimos que, dadas as coordenadas  $(x, y)$ , o integrando de área é  $S = A(x, y)dx \wedge dy$ , sendo  $dx \wedge dy$  o elemento de área. O que é que acontece se mudamos as coordenadas, i.e.,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  ?

Calculemos:  $dx \wedge dy = (x_{,u}du + x_{,v}dv) \wedge (y_{,u}du + y_{,v}dv) = x_{,u}y_{,v}du \wedge dv + x_{,v}y_{,u}dv \wedge du = (x_{,u}y_{,v} - x_{,v}y_{,u})du \wedge dv = \det(x_{,u} \ x_{,v} | y_{,u} \ y_{,v})du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du \wedge dv$  com

$\mathcal{J}(xy|uv) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  o jacobiano (com sinal) da mudança de coordenadas.

• **Nota 1:** o produto  $\wedge$  dá automaticamente a transformação certa na mudança de coordenadas, bem como o sinal certo, sendo os elementos orientados.

• **Nota 2:** no caso de um volume, teremos  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  e  $z = z(u, v, w)$  e  $dx \wedge dy \wedge dz = \mathcal{J}(xyz|uvw)du \wedge dv \wedge dw$ .

## Diferencial exterior duma $m$ -forma diferencial -1-

♣ Seja  $f : W \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^k(W)$ ,  $k \geq 1$ .

### Definição

1. O diferencial exterior de  $f$  é  $df := \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , ou seja por Riesz,  $df(x)[v] = \nabla f(x) \cdot v$  (em Cartesiano).
2. O diferencial exterior da  $m$ -forma  $\phi = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$  é a  $m + 1$ -forma  $d\phi := df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ .
3. O diferencial de uma  $\mathcal{C}^k(W)$   $m$ -forma é definida por extensão linear da definição anterior.

• **Nota:** diferencial exterior ou diferencial de de Rham definida mediante o produto exterior  $\wedge$ .

♣ "d sobre  $\Lambda^0 = \text{grad}$ ": seja  $f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^N)$ ; já vimos que  $\text{grad } f = \Phi^{-1}(df)$ .

## Diferencial exterior duma $m$ -forma diferencial -2-

♣ "d sobre  $\Lambda^2 = \text{div}$ ": Seja  $U = ue_1 + ve_2 + we_3$ , logo  $\text{div } U = u_{,1} + v_{,2} + w_{,3}$ . Seja  $\omega = udx^2 \wedge dx^3 + vdx^3 \wedge dx^1 + wdx^1 \wedge dx^2$ . Logo  $d\omega = u_{,1}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + v_{,2}dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + w_{,3}dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \text{div } U dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

• "d sobre  $\Lambda^1 = \text{curl}$ ": Seja  $U = ue_1 + ve_2 + we_3$ , logo  $\text{curl } U = (w_{,2} - v_{,3})e_1 + (u_{,3} - w_{,1})e_2 + (v_{,1} - u_{,2})e_3$ . Seja  $\phi = udx^1 + vdx^2 + wdx^3$ , logo  $d\phi = u_{,2}dx^2 \wedge dx^1 + v_{,1}dx^1 \wedge dx^2 + u_{,3}dx^3 \wedge dx^1 + w_{,1}dx^1 \wedge dx^3 + v_{,3}dx^3 \wedge dx^2 + w_{,2}dx^2 \wedge dx^3 = (w_{,2} - v_{,3}) dx^2 \wedge dx^3 + (u_{,3} - w_{,1})dx^3 \wedge dx^1 + (v_{,1} - u_{,2})dx^1 \wedge dx^2 = \Phi(\text{curl } U)$ .

• **EX 1:**  $\phi = f_i(x)dx^i$ ; logo  $d\phi = \partial_j f_i dx^j \wedge dx^i$ . Há de ser re-escrito na bas  $\Xi_1^N$ .

• **EX 2:**  $\omega = g_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$ ; logo  $d\omega = \partial_k g_{ij} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$ . Há de ser re-escrito na base  $\Xi_2^N$ .

• **EX 3:** Seja  $A := a_i dx^i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ . Logo  $B = dA = \partial_j a_i dx^j \wedge dx^i$  e  $B = (\partial_{i_1} a_{i_2} - \partial_{i_2} a_{i_1}) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$  com  $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \in \Xi_1^N$ .

## Diferencial exterior duma $m$ -forma diferencial -3-

### Lemma 1

Seja  $\phi, \psi$  duas  $C^1(W)$ -  $m$ -forma e  $\theta$  uma  $C^1(W)$   $l$ -forma. Temos

1.  $d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi$
2.  $d(\phi \wedge \theta) = d\phi \wedge \theta + (-1)^m \phi \wedge d\theta$ .

### Trabalho de casa 10: Demonstrar o Lemma 1.

Hint: toma  $\phi = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$  e  $\theta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$ .

Resposta: (1) segue do (3) da definição mesmo que  $m \neq l$ ; (2) segue por linearidade do HINT notando que  $g$  pode atravessar os produtos sem mudança de sinal enquanto o  $df$  paga  $m$  vezes  $-1$ .

### Trabalho de casa 11 -b-

Seja a 2-forma  $B = B_{ij} dx^i \wedge dx^j$ . Verificar que  $dB = 0$  implica  $\partial_k B_{[ij]} = 0$  (identidade de Bianchi), onde  $B_{[ij]} := \frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji})$ .

## Produto interno em $\Lambda^m(\mathcal{M})$

### Produto interno em $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^1(T\mathcal{M})$

Seja  $\omega = \omega_i dx^i$ ,  $\eta = \eta_j dx^j \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ . Definimos  $(\omega, \eta) = \omega_i \eta_i$ .

Seja uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  e  $T\mathcal{M} = \cup_x T_x \mathcal{M}$  o conjunto dos planos tangentes em  $x \in \mathcal{M}$ . Definimos

$$\omega \cdot \eta := (\omega, \eta)_x := \omega_i(x) \eta_j(x) g^{ij}(x)$$

em  $T_x \mathcal{M}$ , com  $g_{ij}(x)$  a métrica de  $\mathcal{M}$  em  $x \in \mathcal{M}$ .

### Produto interno local em $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^m(T\mathcal{M})$

Definimos  $(\omega, \eta)_x = \omega_{i_1 \dots i_m} \eta_{i_1 \dots i_m}(x)$  em  $\mathbb{R}^N$  e, caso de uma base orthogonal,  $(\omega, \eta)_x = \omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(x) g^{i_1 j_1}(x) \dots g^{i_m j_m}(x)$  em  $T_x \mathcal{M}$  para  $x \in \mathcal{M}$ . Caso de uma base geral,  $(\omega, \eta)_x =$

$\omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(x) \det(dx^{i_k} \cdot dx^{j_l})_{kl}(x)$ . Definição alternativa:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_m) = \det((\omega_l, \eta_k))_{1 \leq k, l \leq m}.$$

## O lema de Poincaré

### Teorema 1: Poincaré lemma

Seja  $\phi$  uma  $\mathcal{C}^2(W)$   $m$ -forma diferencial. Logo  $dd\phi = 0$ .

DEM: Caso 1:  $m = 0$ , logo  $\phi = f$ ,  $d\phi = f_{,i}dx^i$ ,  $dd\phi = f_{,ij}dx^j \wedge dx^i + f_{,ji}dx^i \wedge dx^j = (f_{,ij} - f_{,ji})dx^j \wedge dx^i = 0$  pela regularidade de  $f$ .

Caso 2:  $m > 1$ , logo  $\phi = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ , e  $d\phi = f_{,j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ ,  $dd\phi = (f_{,jk} - f_{,kj}) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ . Se  $j, k \in \{i_1, \dots, i_m\}$  or  $m \geq N - 1$ ,  $= 0$  pelas regras de cálculo exterior, senão,  $= 0$  pela regularidade de  $f$ . QED ■

## A recíproca do lema de Poincaré

### Formas fechadas e exactas

Seja  $\phi \in \mathcal{C}^k(W, \Lambda^m(\mathbb{R}^N))$ . A  $m$ -forma  $\phi$  é dita

1. fechada se  $d\phi = 0$ .
2. exacta se  $\exists \psi \in \mathcal{C}^{k+1}(W, \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^N))$ :  $\phi = d\psi$ .

### Teorema 2: Recíproca do lema de Poincaré

Seja  $W$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$  simplesmente conexo e  $\phi$  uma  $\mathcal{C}^k(W)$ - $m$ -forma diferencial tal que  $d\phi = 0$ . Então existe uma  $\mathcal{C}^{k+1}(W)$ - $m - 1$ -forma diferencial  $\alpha$  tal que  $\phi = d\alpha$ .

## Aplicação de "dd = 0" (num domínio simplesmente conexo)

Seja  $U = ue_1 + ve_2 + we_3$  e  $A = ae_1 + be_2 + ce_3$ , com  $u, v, w, a, b, c \in \mathcal{C}^1(W)$ .

1. Seja  $\phi = udx + vdy + wdz = \Phi(U)$ . Se  $d\phi = 0$  então existe uma função escalar  $f$  tal que  $\phi = df$ , i.e.,  $d\phi = 0$  significa

$$\Phi^{-1}(d\phi) = \text{curl } U = 0 \implies \Phi^{-1}(df) = \text{grad } f = \Phi^{-1}(\phi) = U.$$

2. Seja  $\omega = udy \wedge dz + vdz \wedge dx + wdx \wedge dy$ . Se  $d\omega = 0$  então existe uma 1-forma  $\alpha = adx + bdy + cdz$  t.q.  $\omega = d\alpha = (c_{,y} - b_{,z})dy \wedge dz + (a_{,z} - c_{,x})dz \wedge dx + (b_{,x} - a_{,y})dx \wedge dy$ , i.e.:

$$d\omega = 0 \iff \text{div } U = 0 \implies U = \text{curl } A.$$

♣ DEM: Demonstremos primeiro o resultado local, i.e., numa bola centrada em  $x \in W$  que se inscreve num paralelepido  $[a_1; b_1] \times \cdots \times [a_N; b_N]$ . Seja  $u^i, u_0^i \in [a_i; b_i]$ .



## Demonstração da recíproca -1-

• Seja  $u \mapsto \phi = \phi_{i_1 \dots i_m}(u) du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$

(soma em  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$ )

• Portanto  $d\phi = \sum_{l=1(l \neq i_1, \dots, i_m)} \frac{\partial \phi_{i_1 \dots i_m}}{\partial u^l}(x) du^l \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$

(soma implícita em  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$ ) ou seja ( $\hat{l}$  significa

ausência do índice  $l$ )  $d\phi = \sum_{l=i_j, j=1}^m (-1)^j \frac{\partial \phi_{i_1 \dots \hat{l} \dots i_m}}{\partial u^l} du^{i_1} \wedge \dots \wedge$

$du^l \wedge \dots \wedge du^{i_m} + \sum_{1 \leq i_0 < i_1} \frac{\partial \phi_{i_0 i_1 \dots i_m}}{\partial u^{i_0}} du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$  (soma

implícita em  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$ )

(1o termo caso  $i_1 < l = i_j < i_m$ , 2o caso  $1 \leq l = i_0 < i_1$ ).

Isto é, com a mudança de nome dos índices

$(i_1, \dots, l, \dots, i_m) \rightarrow (j_0, \dots, j_m) \rightarrow (i_0, \dots, i_m)$ , vem

## Demonstração da recíproca -2-

$$d\phi = \sum_{j=1}^m (-1)^j \frac{\partial \phi_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_m}}{\partial u^{i_j}} du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_m} + \frac{\partial \phi_{\hat{i}_0 i_1 \dots i_m}}{\partial u^{i_0}} du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$$

(soma em  $1 \leq i_0 < \dots < i_m \leq N$ )

• O facto de que  $d\phi = 0$  implica (note a mudança de sinal),

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \phi_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_m}}{\partial u^{i_j}} - \frac{\partial \phi_{\hat{i}_0 i_1 \dots i_m}}{\partial u^{i_0}} = 0 \quad (*)$$

( $\forall 1 \leq i_0 < \dots < i_m \leq N$ ).

• Seja  $\alpha = \alpha_{k_1 \dots k_{m-1}} du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_{m-1}}$  (soma em  $k_j$ ) cujas componentes são definidas como:

○  $\alpha_{1i_3 \dots i_m} := 0,$

○  $\alpha_{j i_3 \dots i_m} := \sum_{l=1}^{j-1} \int_{u_0^l}^{u^l} \phi_{l j i_3 \dots \hat{i}_j \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv,$

( $1 < j < i_3$ ). Portanto, com a notação  $\Omega_m := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_m},$

## Demonstração da recíproca -3-

temos  $d\alpha = \frac{\partial \alpha_{i_2 i_3 \dots i_m}}{\partial u^{i_1}} \Omega_m + \sum_{j=2}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_m}}{\partial u^{i_j}} \Omega_m$  (\*\*)

(soma em  $i_1 < \dots < i_m$ ). Logo, sendo que caso  $i_j > i_1$  a derivada pode ficar no integral do 2o termo, i.e.,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{l=1}^{i_2-1} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \int_{u_0^l}^{u^l} \phi_{li_2 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv \Omega_m + \\ &\sum_{l=1}^{i_1-1} \int_{u_0^l}^{u^l} \sum_{j=2}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \phi_{li_1 \dots \hat{i}_j \dots i_m}}{\partial u^{i_j}}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv \Omega_m = \\ &= \sum_{l=i_1}^{i_2-1} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \int_{u_0^l}^{u^l} \phi_{li_2 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv \Omega_m + \\ &\sum_{l=1}^{i_1-1} \int_{u_0^l}^{u^l} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \phi_{li_1 \dots \hat{i}_j \dots i_m}}{\partial u^{i_j}}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv \Omega_m \end{aligned}$$

## Demonstração da recíproca -4-

- Derivando o integral e somando, no 1o termo fica só  $A := \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{i_1-1}, u^{i_1}, \dots, u^N) \Omega_m$ , uma vez que o integrando não depende de  $i_1$  se  $l > i_1$ .
- Por  $(\star)$  com  $i_0 = l$  o integral no 2o termo escreve-se como

$$\int_{u_0^l}^{u^l} \frac{\partial \phi_{\hat{i}_1 \dots i_m}}{\partial u^l}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, \dots, u^N) dv = \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, u^l, \dots, u^N) - \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^l, u^{l+1}, \dots, u^N)$$

- Efetuando a soma dos integrais no 2o termo obtemos por cancelamento telescópico dos termos,

$$B := \sum_{l=1}^{i_1-1} \left( \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, u^l, \dots, u^N) - \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^l, u^{l+1}, \dots, u^N) \right) = \phi_{i_1 \dots i_m}(u^1, \dots, \dots, u^N) - \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{i_1-1}, u^{i_1}, \dots, u^N).$$

Sendo que  $d\alpha = A + B\Omega_m$ , obtemos finalmente  $d\alpha = \phi$ .

## Demonstração da recíproca -5-

- ♣ Caso geral: (i) Seja  $x_0 \in W$  e  $\alpha^0$  uma solução em  $B(x_0, r_0)$ .  
 (ii) Seja  $x \in W$ : existe um caminho regular  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x$ ; seja  $\Sigma_n := \{B(x_i, r_i), x_i \in \gamma[0, 1]\}_{1 \leq i \leq n} \subset W$  ( $n \in \mathbb{N}_*$ ) tal que  $x \in B(x_n, r_n)$  e tal que em cada  $B(x_i, r_i)$  existe uma solução local  $\alpha^{i,n;\gamma}$ . (iii) Caso  $C = B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) \neq \emptyset$ , temos  $d\alpha^{i,n;\gamma} = d\alpha^{j,n;\gamma}$  em  $C$  ou seja  $\partial_k(\alpha^{i,n} - \alpha^{j,n;\gamma})_{i_2 \dots i_m} = 0, \forall 1 \leq k, i_2, \dots, i_m \leq N$ , i.e. unicidade em  $C$ . (iv) A solução pretendida em  $x$  é  $\alpha^{\Sigma_n;\gamma} := \alpha^{n,n;\gamma}$ . (v) Verifica-se facilmente que  $\alpha^\gamma(x) := \alpha^{\Sigma_n;\gamma}(x)$  é independente do número de divisões  $n$  e da escolha das bolas locais admissíveis, i.e., de  $\Sigma_n$ . (vi) Falta verificar que  $\alpha^\gamma$  é independente do caminho escolhido. Para isto usa-se a simples conexidade de  $W$ , constroindo mapas  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow W$  tais que  $H(\cdot, 0) = x_0, H(\cdot, 1) = x$  e  $H(0, \cdot) = \gamma, H(1, \cdot) = \tilde{\gamma}$  e verificando que  $1 = \max\{s \in [0, 1] : \alpha^{\gamma^s} = \alpha^\gamma \text{ in } B^s(x) \cap B^0(x)\}$ . QED ■

## Trabalho de casa 12

Fazer a demonstração do caso geral em detalhes.

## Trabalho de casa 13

Quais das seguintes 1-formas são exatas e encontrar o potencial quando for o caso: (i)  $3ydx + xdy$ , (ii)  $ydx + xdy$ , (iii)  $e^x y dx + e^x dy$ , (iv)  $-ydx + xdy$ .

## Trabalho de casa 14

Seja  $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e seja  $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ .

(i) Verificar que  $\omega$  é fechada. (ii) Aplicar a recíproca de Poincaré localmente e encontrar o potencial local  $\alpha$ .

(iii) A solução é também válida globalmente? Porquê? (iv) Propor o máximo subdomínio de  $W$  onde a solução permanece válida.

## Trabalho de casa 15

Seja  $W = \mathbb{R}^3$  e  $\omega = (-2y + yz)dx \wedge dy - xydy \wedge dz + 2xdx \wedge dz$ .

(i) Verificar que  $\omega$  é fechada. (ii) Aplicar a recíproca de Poincaré localmente e encontrar o potencial local  $\alpha$ .

## Os matemáticos do dia



**Figure:** Hermann Grassmann (Linguista, Matemático, Físico alemão (1809-1877)). Provavelmente o primeiro a conceber o espaço vetorial linear partindo de unidades  $e_i$  (base) e de combinações lineares das mesmas. Inventou o produto combinatório ("kombinatorisches Produkt") ou seja o produto exterior.



**Figure:** Henri Poincaré (Matemático francês (1854-1912)). Textos famosos: *Science et hypothèse* (1902), *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Origem da teoria da relatividade. Introduz a noção de onda gravitacional.

## O operador dual de Hodge -1-

♣ Em  $\Lambda^m(\mathbb{R}^3)$  temos duas famílias de co-vetores de base com o mesmo número de elementos, i.e.,  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$  e  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  têm 3 ( $dx, dy, dz$  e  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ ) enquanto  $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)$  e  $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$  têm 1 ( $1$  e  $dx \wedge dy \wedge dz$ ).

Gostaríamos então de ter uma bijeção entre  $\Lambda^r(\mathbb{R}^3)$  e  $\Lambda^{3-r}(\mathbb{R}^3)$ ,  $0 \leq r \leq 3$ : a mesma é dada pelo **operador dual de Hodge**  $\star$ :

$$\star dx = dy \wedge dz, \star dy = dz \wedge dx, \star dz = dx \wedge dy;$$

$$\star dy \wedge dz = dx, \star dz \wedge dx = dy; \star dx \wedge dy = dz;$$

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz;$$

$$\star dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$



## O operador dual de Hodge -2-

- ♣ Introduzimos a forma de volume  $\Omega_N := \sqrt{|g|} ds^1 \wedge \dots \wedge ds^N$ .
- Se  $\omega \in \Lambda^m(TM)$  e  $\eta \in \Lambda^{N-m}(TM)$  então  $\omega \wedge \eta = k\Omega_N, k \in \mathbb{R}$ .

Definição de  $\star : \Lambda^m(TM) \rightarrow \Lambda^{N-m}(TM)$  :

$$\eta \mapsto \star\eta : \forall \omega \in \Lambda^m(TM), \omega \wedge \star\eta = (\omega, \eta)\Omega_N.$$

**Observação 1:**  $\star\eta$  é único (se existir). Há de demonstrar a existência do mesmo.

Produto interno  $L^2$  em  $\Lambda^m(TM)$

Seja  $\omega, \eta \in \Lambda^m(TM)$ . Então

$$(\omega, \eta)_2 := \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \star\eta,$$

mediante uma noção de integração.

## O operador dual de Hodge -3-

♣ Demonstraremos a existência de  $\star\eta$  para  $m = 1$ .

• Passo 1: Verificar que, a  $3d$ ,  $\sqrt{|g|}\varepsilon_{ikl}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 2\delta_{ij}\Omega_N$  com  $i \neq k \neq l \in \{1, 2, 3\}$ . A  $Nd$ , o símbolo  $\varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1}}$  vale 1 se a permutação for par,  $-1$ , se for ímpar, 0 senão. Logo,

$\sqrt{|g|}\varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1}}dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{N-1}} = \delta_{ij}(N-1)!\Omega_N$  com  $i \neq i_1 \neq \dots \neq i_{N-1} \in \{1, \dots, N\}$ .

• Passo 2: Definir

$$\star\eta = \frac{1}{(N-1)!}\eta_i g^{ij} \sqrt{|g|}\varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{N-1}}$$

• Passo 3: Aplicar  $\star\eta$  a  $\omega = \omega_k dx^k$ :  $\omega \wedge \star\eta = \omega_k \eta_i g^{ij} \frac{1}{(N-1)!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1}} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{N-1}} = \omega_k \eta_m g^{ij} \delta_{jk} \Omega_N = (\omega, \eta)\Omega_N$ .

♣ **Notação:** seja  $\{e^J\}_{e_J \in \Xi_m^N}$  uma base com orientação positiva de  $\Lambda^m(TM)$  em  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\eta = \eta_J e^J := \eta_{j_1 \dots j_m} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m}$  e  $\omega = \omega_K e^K := \omega_{k_1 \dots k_m} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_m}$ , sendo que  $I = \{i_n\}_{1 \leq n \leq m}$  e  $K = \{k_n\}_{1 \leq n \leq m}$  são uma permutação par de  $1, \dots, m$ .

## O operador dual de Hodge -4-

♣ Definimos também  $\delta_{JK} = \prod_{n=1}^m \delta_{j_n k_n}$ . Demonstramos agora a existência de  $\star\eta$  para  $m \geq 1$  no caso de uma base ortogonal.

• Passo 1: Verificar que, a  $Nd$ ,

$$\sqrt{|g|} \varepsilon_{j_1 \dots j_{N-m}} e^K \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{N-m}} = \delta_{JK} (N-m)! \Omega_N.$$

• Passo 2: Definir  $\star\eta := \frac{1}{(N-m)!} \eta_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m} \sqrt{|g|}$

$$\varepsilon_{j_1 \dots j_m l_1 \dots l_{N-m}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_{N-m}} = \frac{1}{(N-m)!} \eta_{i_1 \dots i_m} e_{l_1 \dots l_{N-m}}^{i_1 \dots i_m} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_{N-m}} \text{ (utilizando o tensor de Levi-Civita)}$$

• Passo 3: efetuamos o produto exterior com  $\omega = \omega_K e^K$ , i.e.,

$$\omega \wedge \star\eta = \omega_{k_1 \dots k_m} \eta_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m} \delta_{JK} \Omega_N = (\omega, \eta) \Omega_N.$$

♣ **EX1.**  $\star ds^i = \frac{1}{(N-1)!} g^{ki} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ki_1 \dots i_{N-1}} ds^{i_1} \wedge \dots \wedge ds^{i_{N-1}} =$

$$(-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} \frac{1}{(N-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{k-1} k i_{k+1} \dots i_{N-1}} ds^{i_1} \wedge \dots \wedge ds^{i_{N-1}} =$$

$(-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} ds^1 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^k} \wedge \dots \wedge ds^N$ . Em Cartesiano, vale

$$g^{ik} = \delta^{ik}, \text{ logo } \star dx^i = (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^N.$$

## O operador dual de Hodge -5-

Numa base ortogonal temos  $g^{ki} \sqrt{|g|} = \delta_k^i (h^i)^{-2} \frac{h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_N}{h_i}$  e

portanto  $\star ds^i = (-1)^{i+1} \frac{h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_N}{h_i} ds^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \cdots \wedge ds^N$ .

♣ Consideremos uma variedade com métrica definida positiva.

**Teorema:**  $\star \star \omega = (-1)^{m(N-m)} \omega$  com  $\omega \in \Lambda^m(TM)$

DEM: (demonstração apenas para  $m = 1$ ).

Sendo que  $\star \omega \in \Lambda^{N-1}(TM)$  com

$(\star \omega)_{i_1 \dots i_{N-1}} = \frac{1}{(N-1)!} \omega_n g^{in} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ii_1 \dots i_{N-1}}$  temos que calcular

$\star \star \omega = \frac{1}{(N-1)!} \omega_n g^{in} g \varepsilon_{ii_1 \dots i_{N-1}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1} k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_{N-1} j_{N-1}} dx^k$ .

Sendo uma matriz simétrica e definida positiva, podemos diagonalizar  $g^{in}$  em  $x \in \mathcal{M}$  na forma  $h_i^{-2} \delta_i^n$ . Sendo que

$g = h_1^2 \cdots h_N^2$  obtemos

$\frac{1}{(N-1)!} \omega_i h_1^2 \cdots \widehat{h_i^2} \cdots h_N^2 \varepsilon_{j_1 \dots j_{N-1} k} \varepsilon_{ii_1 \dots i_{N-1}} h_{i_1}^{-2} \delta_{i_1}^{j_1} \cdots h_{i_{N-1}}^{-2} \delta_{i_{N-1}}^{j_{N-1}} dx^k$

## O operador dual de Hodge -6-

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(N-1)!} \omega_i h_1^2 \cdots \widehat{h_i^2} \cdots h_N^2 \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-1} k} \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-1} i} h_{i_1}^{-2} \cdots h_{i_{N-1}}^{-2} dx^k = \\
 &\frac{1}{(N-1)!} \omega_i h_1^2 \cdots \widehat{h_i^2} \cdots h_N^2 (-1)^{N-1} (N-1)! \delta_k^i h_1^{-2} \cdots \widehat{h_i^{-2}} \cdots h_N^{-2} \\
 dx^k &= (-1)^{N-1} \omega_i dx^i = (-1)^{N-1} \omega. \quad \text{QED} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

♣ **EX2.** Calcular  $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^{N-1}$ . Vamos utilizar o teorema anterior.

• Passo 1:  $g_{li} \star dx^i = (-1)^{k+1} \delta_l^k \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{l+1} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N$ .

• Passo 2: aplicar  $\star$  mais uma vez:  $g_{li} \star \star dx^i = g_{li} (-1)^{N-1} dx^i = (-1)^{l-1} \sqrt{|g|} \star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N$ .

• Passo 3:  $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{N-l} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g_{li} dx^i$ .

Numa base ortogonal temos então:  $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{N-l} \frac{h_l^2}{h_1 \cdots h^N} dx^l = (-1)^{N-l} \frac{h_l}{h_1 \cdots \widehat{h_l} \cdots h^N} dx^l$ .

## Operador de Hodge -7-

### Trabalho de casa 16

Demonstrar que (i)  $\star 1 = \Omega_N$ , (ii)  $\star \Omega_N = 1$ , (iii)  $\omega \wedge \star \eta = \eta \wedge \star \omega$ .

### Trabalho de casa 17

Parte a. calcular  $\star dx^i$  num sistema de coordenadas (i) cilíndrico, (ii) esférico.

Parte b. calcular  $\star dr \wedge dz$  e  $\star dr \wedge d\theta$  em cilíndrico.

♣ Obtivemos anteriormente uma expressão invariante do gradiente de uma função escalar  $f$ :  $\nabla f := \Phi(df)$ , sendo  $df$  e  $\Phi$  invariantes. Falta obter este tipo de expressões invariantes para o rotor e a divergência. Serão obtidas mediante as 3 operações de c.d.e.:  $\Phi, \Phi^{-1}, \wedge, d$  e  $\star$ .

## Expressão invariante de div e curl

♣ Relativamente ao rotor e a divergência de  $u = u^i g_i$  (com  $g_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  não necessariamente normalizado), vimos 2 formulas:

1. Mediante  $u = u^i g_i$ :

$$\nabla \cdot u = \nabla u^i \cdot g_i + u^i \nabla \cdot g_i$$

$$\nabla \times u = \nabla u^i \times g_i + u^i \nabla \times g_i$$

sse, é apenas um modo pratico de cálculo mas não é uma definição devido a  $\nabla \cdot g_i, \nabla \times g_i$  (por calcular em Cartesiano).

2. Mediante  $\nabla u = (\nabla u)^{ij} g_i \otimes g_j$ :

$$\nabla \cdot u = (\nabla u)^{ik} g_i \cdot g_j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} u^i)}{\partial x^i}$$

$$\nabla \times u = (\nabla u)^{mj} g_m \times g_j = (\nabla u)^{mj} e_{mj}^i g_i =$$

$g^{ik} \sqrt{|g|} \varepsilon_{kjm} (\nabla u)^{mj} g_i$ : não deixa de ser uma definição que depende das coordenadas e da metrica.

♣ NB:  $g_m \times g_j$  transforma-se como um tensor portanto usa-se o tensor de Levi-Civita em vez do símbolo no produto vetorial  $\times$ .

## Preliminar em Cartesiano

### Gradiente, rotor e divergência em Cartesiano

Seja  $u^i \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R})$ . Seja  $\{e_k := e_i \times e_j\}_{1 \leq i \neq j \neq k \leq 3}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$  e  $\{E^k := dx^i \wedge dx^j\}_{1 \leq i \neq j \neq k \leq 3}$  de  $(\mathbb{R}^3)^*$ , ou seja  $E^k = dx^i \wedge dx^j \in \Xi_2^3$  é um elemento ordenado da base das 2-formas. Seja  $f \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^3)$ .

1. Vimos que  $df = f_{,i} dx^i$ . Comparar com  $\nabla f = f_{,i} e_i$ .
2. Seja, a 3d,  $\phi := u_j dx^j$ . Logo  $d\phi = (u_{j,i} - u_{i,j}) dx^j \wedge dx^i$ .  
Comparar com  $\nabla \times u = (u_{,i}^j - u_{,j}^i) e_j \times e_i = (u_{,i}^j - u_{,j}^i) e_k$   
(soma em  $i, j, k = \text{permpar}(1, 2, 3)$ ).
3. Seja, a 3d,  $\omega := u_k dx^i \wedge dx^j = u_1 dx^2 \wedge dx^3 + u_2 dx^3 \wedge dx^1 + u_3 dx^1 \wedge dx^2$ . Portanto  $d\omega = u_{1,1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + u_{2,2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + u_{3,3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = u_{i,i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .  
Comparar com  $\nabla \cdot u = u_{,i}^i$ .



## Expressão invariante do rotor e da divergência em Cartesiano

### Rotor

Seja  $u = u^i e_i$  e  $\phi := u_i dx^i$  em Cartesiano. Nos lembramos que  $\phi = \Phi(u)$ . Obtivemos, a  $3d$ ,  $d\phi = d\Phi(u) = (u_{j,i} - u_{i,j}) dx^i \wedge dx^j$ . Sendo que a base tem orientação directa, aplicando  $\star$  temos  $\star d\Phi(u) = (u_{j,i} - u_{i,j}) dx^k$  (soma em  $i, j, k = \text{permpar}(1, 2, 3)$ ). Portanto  $\Phi^{-1}(\star d\Phi(u)) = (u_{j,i} - u_{i,j}) e_k = \nabla \times u$ .

### Divergência

Sendo que, a  $3d$ , em Cartesiano, vale

$$\omega := u_1 dx^2 \wedge dx^3 + u_2 dx^3 \wedge dx^1 + u_3 dx^1 \wedge dx^2 = \star\phi = \star\Phi(u)$$

obtemos  $d\star\Phi(u) = (\nabla \cdot u) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

Logo,  $\star d\star\Phi(u) = \nabla \cdot u$ .

## Expressão invariante do rotor e da divergência

♣ Recordemos que numa base e base dual quaisquer  $\{g_k = \frac{\partial}{\partial s^k}\}_{1 \leq k \leq N}$  e  $\{ds^k\}_{1 \leq k \leq N}$ , temos  $\Phi(u) = u^j g_{kj} ds^k$  e  $\Phi^{-1}(\phi) = u_j g^{kj} g_k$

### Definição invariante do gradiente, rotor e da divergência

Já vimos que a  $Nd$  em coordenadas quaisquer

$$\text{gradu} := \nabla^\Gamma u = \Phi^{-1}(du),$$

♣ **Nota:** a natureza tensorial do gradiente de um vetor pode ser vista como consequência da invariança do diferencial de um vetor. Com efeito, seja  $u = u^l e_l = \hat{u}^i g_i$ , com  $e_l = (e_l \cdot g_i) g_i = (g_i)^l g_i = \frac{\partial x^l}{\partial s^i} g_i$ , logo  $du = d(u^l e_l) = \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\right) dx^j e_l = \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial x^l}{\partial s^i} ds^k g_i = \left(\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - u^l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^k \partial s^i}\right) ds^k g_i = (\nabla_k^\Gamma \hat{u}^i) ds^k g_i$ . Temos  $du[T] = \text{gradu} \cdot T = (\nabla_k^\Gamma \hat{u}^i) \hat{T}_i^k = \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\right) T_l^j = \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\right) \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \hat{T}_i^k$ , i.e., a tese.

Sendo que  $\Phi$ ,  $\Phi^{-1}$ ,  $\wedge$ ,  $d$  e  $\star$  são operações invariantes, o rotor e a divergência do vetor  $u$  a  $Nd$  em coordenadas quaisquer são definidos como

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} u &:= \nabla^\Gamma \times u = \Phi^{-1} (\star d \Phi(u)), \\ \operatorname{div} u &:= \nabla^\Gamma \cdot u = \star d \star \Phi(u). \end{aligned}$$

♣ O mesmo vale para a divergência. Seja a 1-forma

$$\omega := \hat{u}_i ds^i = \Phi(u), \text{ logo}$$

$$\star \omega = (-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} \hat{u}_i ds^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{ds^k} \wedge \cdots \wedge ds^N =$$

$$(-1)^{k-1} \sqrt{|g|} \hat{u}^k ds^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{ds^k} \wedge \cdots \wedge ds^N, \text{ logo}$$

$$d \star \omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial s^k} \left( \sqrt{|g|} \hat{u}^k \right) ds^k \wedge ds^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{ds^k} \wedge \cdots \wedge ds^N =$$

$$\frac{\partial}{\partial s^k} \left( \sqrt{|g|} \hat{u}^k \right) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \Omega_N. \text{ Já que } \star \Omega_N = 1, \text{ saí a fórmula esperada}$$

$$\operatorname{div} u = \star d \star \Phi(u) = 1/\sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial s^k} \left( \sqrt{|g|} \hat{u}^k \right).$$

## Expressão invariante do rotor numa base ortogonal

♣ Seja a  $3d$  o sistema de coordenadas curvilíneas  $\{x_i\}_i$ , o vetor  $u = \hat{u}^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  expressado na base ortogonal, e  $g_i := h_{\underline{i}}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}$  o vetor de base normalizado; logo,  $u = u^i g_i$ , com  $u^i := h_{\underline{i}} \hat{u}^i$  as componentes de  $u$  na base ortonormal. Seja  $G^k := dx^i \wedge dx^j$  o  $k$ -ésimo co-vetor de base ( $i, j, k = \text{permpar}(1, 2, 3)$ ).

♣ Temos  $\text{curl } u := \nabla \times u = \Phi^{-1}(\star d\Phi(u))$ . Logo,

$$\Phi(u) = h_{\underline{j}}^2 \hat{u}^j dx^j; \quad d\Phi(u) = \varepsilon_{kij} \frac{\partial(h_{\underline{j}}^2 \hat{u}^j)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j =$$

$$\left( \frac{\partial(h_{\underline{3}}^2 \hat{u}^3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_{\underline{2}}^2 \hat{u}^2)}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots; \quad \text{Pelo EX2 p. 129,}$$

$$\star d\Phi(u) = \frac{h_{\underline{k}}}{h_{\underline{i}} h_{\underline{j}}} \varepsilon_{kij} \frac{\partial(h_{\underline{j}}^2 \hat{u}^j)}{\partial x^i} dx^k, \quad \text{pelo que } \nabla \times u = \Phi^{-1}(\star d\phi) =$$

$$\Phi^{-1}(\star d\Phi(u)) = \frac{1}{h_{\underline{k}}^2} \frac{h_{\underline{k}}}{h_{\underline{i}} h_{\underline{j}}} \varepsilon_{kij} \frac{\partial(h_{\underline{j}}^2 \hat{u}^j)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= \frac{1}{h_{\underline{i}} h_{\underline{j}} h_{\underline{k}}} \varepsilon_{kij} \frac{\partial(h_{\underline{j}}^2 \hat{u}^j)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{h_{\underline{i}} h_{\underline{j}} h_{\underline{k}}} \varepsilon_{kij} \frac{\partial(h_{\underline{j}} u^j)}{\partial x^i} h_{\underline{k}} g_k.$$

## Expressão invariante da divergência numa base ortogonal

♣ Pode-se demonstrar que  $\Phi(g^{ik} \sqrt{|g|} \varepsilon_{kjm} (\nabla u)^{mj} g_i) = \star d\Phi(u)$ .

♣ Calculemos  $\nabla \cdot u = \star d \star \Phi(u)$  com  $u = \hat{u}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

Temos  $\star \Phi(u) = (-1)^{k+1} g^{jk} \sqrt{|g|} (g_{ij} \hat{u}^i) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^N = (-1)^{i+1} \sqrt{|g|} \hat{u}^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^N$ .

Logo,

$d \star \Phi(u) = (-1)^{i+1} \partial_j (\sqrt{|g|} \hat{u}^i) dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^N = (-1)^{i+1} \partial_j (\sqrt{|g|} \hat{u}^i) (-1)^{i-1} \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \Omega_N = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} \hat{u}^i) \Omega_N$ , e

portanto  $\nabla \cdot u = \star d \star \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial (\sqrt{|g|} \hat{u}^i)}{\partial x^i}$ .

♣ Na base normalizada temos  $u = u^i g_i$ , logo

$$\nabla \cdot u = \star d \star \Phi(u) = \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \frac{\partial (h_1 \cdots \widehat{h}_i \cdots h_N u^i)}{\partial x^i}.$$

## Co-diferencial

### Trabalho de casa 18

Exprimir o rotor e a divergência em cilíndrico e esférico mediante estas últimas formulas.

### Definição do co-diferencial

Seja  $\omega \in \Lambda^m$ . Então  $\delta : \Lambda^m \rightarrow \Lambda^{m-1}$  tal que

$$\delta\omega := (-1)^{N(m-1)+1} \star d \star \omega.$$

Nota: caso  $N$  par:  $\delta = - \star d \star$ , caso  $N$  impar:  $\delta = (-1)^m \star d \star$

### Trabalho de casa 19

Seja  $f \in \Lambda^0$ . (i) Mostrar que  $\delta f = 0$ .

(ii) Mostrar que  $-\Delta f = (d\delta + \delta d)f$ .

HINT. Trabalhar em Cartesiano.

## Laplaciano sob $m$ -formas

### Definição invariante do Laplaciano

Seja  $\omega \in \Lambda^m$ . Então  $\Delta : \Lambda^m \rightarrow \Lambda^m$  tal que

$$\Delta\omega := -(d\delta + \delta d)\omega.$$

### Trabalho de casa 20

Obter a expressão do Laplaciano em cilíndrico usando a fórmula  $\Delta f = -(d\delta + \delta d)f$ .

### Trabalho de casa 21

Mostrar que o Laplaciano em Cartesiano e a 3d de  $\omega = \omega_i dx^i$  é  $\Delta\omega = \Delta\omega_i dx^i$ .

HINT. calcular  $\delta d\omega$  e  $d\delta\omega$  separadamente (cálculo brutal) e somar.

## O operador "pull-back" de uma forma diferencial -1-

♣ Seja  $\omega : \mathbb{R}^M \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^M)$  uma forma diferencial de grau  $m$  definida em  $\mathbb{R}^M$ .

### Definição do operador "pull-back" de um $m$ -covetor

Seja um operador linear  $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ . O  $m$ -covetor  $L^\sharp\omega(x)$  em  $\mathbb{R}^N$  (i.e., o pull back ("puxa atrás") de  $\omega$  por  $L$ ) é definido como

$$(L^\sharp\omega(x))[v_1 \wedge \cdots \wedge v_m] := \omega(x)[Lv_1 \wedge \cdots \wedge Lv_m], \quad \forall v_i \in \mathbb{R}^N.$$

♣ Seja  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^M$  uma função  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $1 \leq m \leq \min(M, N := \dim\mathcal{M})$ .

### Definição do operador "pull-back" por $F$ de uma $m$ -forma

O pull-back por  $F$  é definido como o mapa linear:

$$F^\sharp : \Lambda^m(\mathbb{R}^M) \rightarrow \Lambda^m(T\mathcal{M}) : \omega \mapsto F^\sharp\omega \text{ t.q. } \forall u_1, \dots, u_m \in T_p\mathcal{M},$$

$$F^\sharp\omega(p)[u_1 \wedge \cdots \wedge u_m] = \omega(F(p))[D_{u_1}F \wedge \cdots \wedge D_{u_m}F],$$



## O operador "pull-back" de uma forma diferencial -2-

onde  $D_v F = \nabla F \cdot v = dF[v], p \in \mathcal{M}$ . Em particular,

$$F^\sharp \omega(p) = (DF(p))^\sharp \omega(F(p)).$$

- Se  $m = 0$ , vem  $F^\sharp \omega = \omega_\sharp F := \omega \circ F$  (composição de  $\omega$  com  $F$ ).
- $y = F(x)$  é a coordenada de origem (associada a  $\omega$ ),  $x$  a coordenada de chegada (pelo mapa pull-back por  $F$ ).

### Pull-back de um co-vetor = transformação tensorial covariante

Com  $m = 1$  temos  $\forall V \in T_p \mathcal{M}$ ,  $\langle F^\sharp \omega_p, V \rangle = \langle \omega_\sharp F(p), D_V F(p) \rangle$ ,  
ou seja  $\langle F^\sharp \omega_p, V \rangle = \omega_i(F(p)) V^j \frac{\partial F^i}{\partial x^j}$ . Escrevemos portanto

$$\left( F^\sharp \omega_p \right)_j = \left( F^\sharp \omega \right)_i(p) = \omega_{F(p)i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j},$$

onde  $y^i = F^i(p)$ . Logo, é uma transformação tensorial covariante.

## Teorema: Comutação de $F^\sharp$ com $d$

Seja  $k \geq 2$  e  $\omega \in \Lambda^m(TM)$  uma  $C^k$ - $m$ -forma diferencial definida em  $TM$ . Então temos  $dF^\sharp\omega = F^\sharp d\omega$ . ( $\star$ )

DEM. • Passo 0 (preliminar): seja  $\eta$  uma  $l$ , e  $\omega$  uma  $h$ -forma  $C^k$ . Então,

$$F^\sharp(\eta \wedge d\omega)(x)[v] = \eta(F(x)) \wedge d\omega(F(x))[D_v F] = F^\sharp\eta \wedge F^\sharp d\omega(x)[v].$$

• Passo 1: suponhamos que  $\omega, \eta$  verifiquem ( $\star$ ). Então

$$dF^\sharp(a\omega + b\eta) = F^\sharp(ad\omega + bd\eta) = F^\sharp(d(a\omega + b\eta)), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

• Passo 2: caso  $m = 0$ . Temos  $\forall v \in \mathbb{R}^N$ , por definição de  $F^\sharp$  e pela chain rule,  $dF^\sharp\phi(x)[v] = d(\phi \circ F)(x)[v] = d\phi(F(x))[D_v F] = d\phi(F(x))[dF[V]] = F^\sharp d\phi(x)[v]$ .

## Trabalho de casa 22

Verificar que (i)  $mdx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$  é o diferencial de

$\omega := (-1)^{i-1} x_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dx^m$ ; (ii)

$Ju = u^\sharp dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ . (iii) Provar que  $Ju$  é um diferencial

- Passo 3: suponhamos que  $\omega$  verifica  $(\star)$ , i.e.  $F^\sharp d\omega = dF^\sharp\omega$ . Pelo passo 0 temos  $dF^\sharp(\phi \wedge d\omega)(x)[v] = d(F^\sharp\phi(x) \wedge F^\sharp d\omega(x)) [v]$ . Logo, pelo o Lemma 1 p. 116, o passo 2,  $(\star)$ , e o passo 0 outra vez, vem  $= F^\sharp d\phi(x) \wedge F^\sharp d\omega(x) [v] = F^\sharp (d\phi \wedge d\omega) (x)[v]$ .
- Passo 4: caso de uma 1-forma exata:  $\omega = d\phi$ . Temos pelo 2,  $dF^\sharp\omega = dF^\sharp d\phi = ddF^\sharp\phi = 0 = F^\sharp(d\omega)$ , sendo que  $d\omega = 0$ .
- Passo 5: caso de uma 1-forma  $\omega = \psi_i d\phi^i$ : segue dos passos 0 – 4 com  $\omega = \psi d\phi = \psi \wedge d\phi$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap \Lambda^0(\mathbb{R}^N)$ , uma vez que  $dF^\sharp(\psi \wedge d\phi) = d(F^\sharp\psi \wedge F^\sharp d\phi) = F^\sharp d\psi \wedge F^\sharp d\phi = F^\sharp d(\psi \wedge d\phi)$ .
- Passo 6: caso de uma  $m$  forma: segue, supondo a tese verdadeira para  $m = 1$  (passo 5) e iterando, considerando os passos 0 – 5. QED ■

## As 3 noções de integral

Em  $\mathbb{R}$ : Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

1. O integral indefinido, ou primitiva:  $F(x) = \int^x f(\xi)d\xi$
2. O integral definido, sem sinal:  $\int_{[a,b]} f(x)dx$ : compatível com a noção de integral de Lebesgue. Tipicamente: área por baixo de uma curva, massa de um corpo com densidade variável, sendo que ambos tem sinal positivo
3. O integral definido, com sinal:  $\int_a^b f(x)dx$ : compatível com a noção de integral de Riemann. Tipicamente: trabalho efetuado pela força  $F$  ao longo do caminho de  $a$  a  $b$ , sendo que o trabalho tem sinal, e.g., será negativo se for de  $b$  a  $a$

Relação entre as mesmas noções

1.  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$
2.  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$  e  $\int_b^a f(x)dx = -\int_{[a,b]} f(x)dx$

## Integral unidimensional orientado

♣  $\int_b^a f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i$ , com  $x_0 = a, x_n = b$ , sendo que  $|\Delta x_i| \rightarrow 0$  e  $\sum_{i=0}^n |\Delta x_i| \leq c < \infty$ . Portanto  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  pode ser positivo (se  $x_{i+1} > x_i$ ) ou negativo (se  $x_{i+1} < x_i$ ). A quantidade  $f(x_i)\Delta x_i$  é o trabalho em  $x_i$ : pode ser um incremento positivo ou negativo (é uma energia).

• Introduzimos o mapa linear que a cada incremento  $\Delta x$  faz corresponder o trabalho ao longo  $\Delta x$ :

$$\omega_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x \mapsto w_x(\Delta x) := f(x)\Delta x.$$

♣ Logo definimos o trabalho total como o integral da mesma:

$$\int_a^b \omega_x = \int_a^b f(x)dx.$$

♣ No caso de uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^N$  com ponto inicial  $a$  e final  $b$ , temos um mapa do plano tangente em  $x$  em  $\mathbb{R}$ :  $\omega_x : T_x\gamma \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_N) \mapsto w_x(\Delta x) := f(x) \cdot \Delta x$ .

• Logo definimos o trabalho de  $a$  a  $b$  ao longo de  $\gamma \equiv \gamma([a, b])$  como o integral da forma:  $\int_\gamma \omega_x = \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$ .

## Integração de uma $m$ -forma

### Dominio de integração

Seja uma  $n$ -variedade  $\mathcal{M}$ , e uma  $m$ -sub-variedade  $S = F_{\#}U = F(U)$ , com  $U$  aberto e  $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $m \leq n$ , um mergulho. Caso  $\mathcal{M} = W$  for um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S$  é uma hiper-superfície de dimensão  $m$ .

- Se  $S$  não for na sua totalidade o gráfico de  $F$  então será uma união de gráficos  $F_{\alpha}(U_{\alpha})$ , e pode se proceder da mesma forma mediante uma clássica partição da unidade.

♣ **Regra geral: uma  $m$ -forma vai ser integrada numa variedade de dimensão  $m$ .**

### Definição do integral de uma $m$ -forma numa $m$ -variedade

Seja  $\omega$  uma  $m$ -forma definida na  $n$ -variedade  $\mathcal{M}$ . Seja  $S$  uma  $m$ -subvariedade de  $\mathcal{M}$ . Seja  $\{s^i\}_{1 \leq i \leq m}$  um sistema de coordenadas em  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial s^i}\}_{1 \leq i \leq m}$  uma base local de  $S$  definida em  $U$ , e

## Aplicações - integral de volume -1-

$\frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m}$  o  $m$ -vetor "volume orientado" de  $U$ . O integral de  $\omega$  em  $S$  é definido (quando o RHS estiver finito) como:

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F\sharp U} \omega := \int_U F\sharp \omega := \int_U F\sharp \omega(s) \left[ \frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \\ &= \int_U \omega(F(s)) \left[ \frac{\partial F}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \end{aligned}$$

(por definição de  $F\sharp \omega$ ).

- No caso de  $U = \mathcal{R}$ , o  $m$ -cubo com centro 0 temos:

$$\int_S \omega = \int_{F\sharp \mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} \omega(F(x)) [\partial_1 F \wedge \cdots \wedge \partial_m F] dx^1 \cdots dx^m.$$

- ♣ **Exemplo elementar:** seja  $m = n = N$ , e seja  $\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^N$ .

## Aplicações - integral de volume -2-

Consideremos primeiro o caso onde a variedade  $U$  é escrita como

$U \stackrel{(i)}{=} \text{Id}_\# U$ , logo  $\partial_i \text{Id}(x) = \partial_i x = e_i$ .

D'outro lado  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] = \det \mathbb{I} = 1$ , logo

$$\int_U \omega \stackrel{(i)}{=} \int_{\text{Id}_\# U} \omega = \int_U \text{Id}_\# \omega = \int_U \omega(x) [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] dx = \int_U f(x) dx.$$

• **Nota** (abuso de notação): O  $U$  nos 3 primeiros integrais é uma superfície orientada, enquanto nos 2 últimos é um conjunto de pontos.

♣ Seja ora a variedade  $\mathcal{M} \stackrel{(ii)}{=} F(\mathcal{R})$ . O integral da função  $f$  em  $\mathcal{M}$  é definido como (no caso  $\mathcal{M} = U$  obtemos desta forma a **fórmula de mudança de variável**):

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \stackrel{(ii)}{=} \int_{F_\# \mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} f(F(x)) \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} dx,$$



## Aplicações - integral de volume -3-

com o Jacobiano orientado:

$$\mathcal{J}(F(x)|x) := \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N [\partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_N F].$$

- Uma vez que o Jacobiano escreve se, num sistema de coordenadas qualquer,  $\mathcal{J}(F(s)|s) = \sqrt{|g|}$  temos a definição/notação seguinte

### Integral de uma função

Seja  $f$  uma função suficientemente regular e  $\mathcal{M}$  uma variedade de dimensão  $m$ . O integral de  $f$  em  $\mathcal{M}$  é definido como

$$\int_{\mathcal{M}} f \equiv \int_{\mathcal{M}} f \Omega_m = \int_{\mathcal{M}} f \sqrt{|g|} d^m s.$$

- **Nota:** O último integral é um abuso de notação, pois o sistema de coordenadas  $\{s^1, \dots, s^m\}$  pode não existir globalmente. Aqui  $d^m s := ds^1 \dots ds^m$ .

## Aplicações - integral de superfície -1-

♣ **Outro exemplo: integração de um fluxo vetorial.** Seja  $m = 2$  e  $n = 3$ , e  $\phi = \phi^1 e_1 + \phi^2 e_2 + \phi^3 e_3 = \phi^i e_i$  um vetor por integrar na superfície  $S = F(U) \subset \mathbb{R}^3$  com  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  as coordenadas. Escrevemos  $F(u, v) = (x^1, x^2, x^3)(u, v)$ , e observemos que  $dx^i \wedge dx^j [\partial_u F \wedge \partial_v F] = \frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(u, v)} = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_i \times e_j)$ .

• EX:  $dx^1 \wedge dx^2 [\partial_u F \wedge \partial_v F] = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_1 \times e_2) = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot e_3 = (\partial_u F \times \partial_v F)_3$ .

♣ Definimos o "elemento de área infinitesimal orientado"  $\vec{dS} := \overrightarrow{\delta_u F} \times \overrightarrow{\delta_v F} = \partial_u F du \times \partial_v F dv = \partial_u F \times \partial_v F dudv$ . A orientação da superfície é dada pela normal  $\vec{\nu} = \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{|\partial_u F \times \partial_v F|}$  pelo que  $\vec{dS} = \vec{\nu} dS$  com o "elemento de área"

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv.$$

## Aplicações - integral de superfície -2-

- ♣ Lembremos o símbolo  $\epsilon_{ijk} = 1$  se  $ijk$  são uma permutação par de 123,  $= -1$  se for ímpar, e  $= 0$  se existem índices repetidos. Temos a identidade  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$ . Vale também  $e_j \times e_k = \epsilon_{jkl}e_l$ .

### Integral de fluxo (integrando vetorial)

A partir do vetor  $\phi = \phi^i e_i$  definimos a 2-forma  $\omega = \phi^1 dx^2 \wedge dx^3 + \phi^2 dx^3 \wedge dx^1 + \phi^3 dx^1 \wedge dx^2 = 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i dx^j \wedge dx^k$  (com soma em  $i, j, k$ , verifica-se facilmente).

- Lembremos a fórmula  $dx^j \wedge dx^k [a \wedge b] = (a \times b) \cdot (e_j \times e_k)$ . Portanto temos o integral de superfície

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F\sharp U} \omega = \int_U F\sharp \omega = \int_U \omega(F(u, v)) [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv = \\ &= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i dx^j \wedge dx^k [\partial_u F \times \partial_v F] dudv = \end{aligned}$$

$$= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_j \times e_k) dudv =$$

$$\int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot \epsilon_{jkl} e_l dudv =$$

$$= \int_U 1/2 \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_l 2 \delta_{il} dudv = \int_U \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_i dudv$$

$=: \int_S \phi \cdot \vec{dS} \equiv$  fluxo de  $\phi$  através  $S$  (este integral tem sinal!).

- **EX:**  $\phi$ =força (vento, gravidade, electromagnética, etc.)

## Integral de superfície de um escalar

Seja  $f$  uma função contínua e tome  $\phi^i = f \nu^i$  no anterior. Logo o integral de  $f$  em  $S$  é:  $\int_S \phi \cdot \vec{dS} = \int_S f dS$  com o  $dS$  anterior.

- **EX:** calcular o baricentro de uma concha esférica.

## Teorema de Stokes -1- Caso de um $N$ -retângulo

♣ Seja  $\mathcal{R}$ , o  $N$ -retângulo de  $\mathbb{R}^N$  e  $\partial\mathcal{R}$  a fronteira orientada de  $\mathcal{R}$ .

### Teorema de Stokes em $\mathcal{R}$

Seja  $\omega$  uma  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $N - 1$ -forma definida em  $\overline{\mathcal{R}}$ . Temos

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega.$$

DEM. A demonstração segue do teorema fundamental do cálculo:

considere  $\omega = \sum_i \omega_i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^N$  e integre

$d\omega = \partial_i \omega_i (-1)^{i-1} \Omega_N$  em  $\mathcal{R}$  e  $\omega$  em  $\partial\mathcal{R}$ , com

$$\Omega_N := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N.$$

Uma vez que  $\mathcal{R} = [a_1; ab_1] \times \cdots \times [a_N; b_N]$ , basta integrar num produto Cartesiano de segmentos  $[a_i; b_i]$  e vem

$\int_{[a_i; b_i]} d\omega = \pm(\omega_i(\cdot, b_i, \cdot) - \omega_i(\cdot, a_i, \cdot)) = \int_{\partial[a_i; b_i]} \omega$ . A tese segue pelo teorema de Fubini. QED. ■

♣ **Lembrete:** teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

## Teorema de Stokes -2- Caso geral

### Teorema de Stokes em $S = F_{\#}\mathcal{R}$

Seja  $\omega$  uma  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $N - 1$ -forma definida em  $\overline{\mathcal{R}}$  e  $S = F(\mathcal{R})$  com  $F : \mathcal{R} \rightarrow W$ ,  $C^k$  e t.q.  $DF$  é de rank  $N$ . Temos

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

DEM. Pela comutação de  $d$  com  $F^{\#}$  e pelo teorema anterior, vem  $\int_S d\omega = \int_{F_{\#}\mathcal{R}} d\omega = \int_{\mathcal{R}} F^{\#}d\omega = \int_{\mathcal{R}} dF^{\#}\omega = \int_{\partial\mathcal{R}} F^{\#}\omega = \int_{F_{\#}\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial F_{\#}\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial S} \omega$ . QED. ■

♣ Utilizámos também a seguinte identidade/definição:  $\partial F_{\#}\mathcal{R} = F_{\#}\partial\mathcal{R}$  (válido pela regularidade de  $F$ : a imagem do bordo é o bordo da imagem), bem como o TFC: teorema fundamental do cálculo (mediante o teorema anterior).

## Teorema de Stokes em $\mathcal{R}$ : caso de uma sub-variedade

### Definição

Sejam  $S$  e  $\mathcal{M}$  variedades de dimensão  $m$  e  $n$ , com  $m \leq n$ . Seja  $\phi : S \rightarrow \mathcal{M}$  um mergulho,  $\phi(S) = \phi_{\#}S \subset \mathcal{M}$  uma  $m$ -sub-variedade de  $\mathcal{M}$  (por exemplo, uma superfície de  $\mathbb{R}^n$ ) e  $\omega$  uma  $m$ -forma sobre  $\mathcal{M}$ . O integral de  $\omega$  em  $\phi(S)$  é definido como

$$\int_{\phi(S)} \omega = \int_S \phi^{\#}\omega,$$

onde  $\phi^{\#}$  representa o operador pull-back por  $\phi$ . Em particular

$$\int_{\phi(S)} d\omega = \int_S d\phi^{\#}\omega.$$

- Esta definição estende a da página 145 no sentido em que o difeomorfismo  $\phi$  é aqui um mapa entre duas variedades (enquanto  $F$  era apenas o mapa carta local).

## Teorema de Stokes: caso geral -1-

### Stokes numa sub-variedade

Seja  $\phi(S)$  uma sub-variedade orientada de  $\mathbb{R}^N$ . Temos

$$\int_{\phi_{\#}S} d\omega = \int_S d\phi^{\#}\omega = \int_{\partial S} \phi^{\#}\omega = \int_{\phi_{\#}\partial S} \omega = \int_{\partial\phi_{\#}S} \omega$$

♣ Por extensão do caso anterior, obtemos sem dificuldade o resultado geral seguinte.

### Stokes geral

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade orientada de dimensão  $m$  com bordo, e  $\omega$  uma  $m - 1$ -forma. Temos

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \quad (\blacksquare)$$

♣ **Nota 1:** Numa  $m$ -variedade com bordo existem cartas locais abertos de  $\{x \in \mathbb{R}^m : x^1 \leq 0\}$  e tal que o bordo satisfaz  $x^1 = 0$ .



## Teorema de Stokes: caso geral -2-

• Neste caso, no bordo, temos  $dx^1(X) = 0, \forall X \in T_p\partial\mathcal{M}$ ,  $p \in \partial\mathcal{M}$  ( $X$  é um vetor tangente ao bordo). Logo,  $dx^1$  é normal à  $\partial\mathcal{M}$ . Definimos assim o vetor normal **unitário** à  $\partial\mathcal{M}$  como  $n_i = \frac{(dx^1)_i}{\sqrt{g^{kl}(dx^1)_k(dx^1)_l}}$ , expressado em coordenadas  $\{s^i\}_i$ .

♣ **Nota 2:** na fórmula (■), o membro a direita significa

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\iota_{\#}\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \iota^{\#}\omega,$$

onde  $\iota : \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é o mapa inclusão. Mais explicitamente, seja a  $m - 1$ -forma  $\omega = \omega^k (-1)^{k+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^m$ , então

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \iota^{\#}\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega^k (-1)^{k+1} \sqrt{|h|} N_k dx^2 \cdots dx^m,$$

(vê definição p. 146) com a métrica em  $\partial\mathcal{M}$  induzida pelo pull back por  $\iota$ ,  $h := \iota^{\#}g$ , e com o vetor normal unitário  $N^k$  tal que

## Teorema da divergência: caso geral numa variedade

$\sqrt{|h|}N_k := dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \cdots \wedge dx_\alpha^m \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^k}} \cdots \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^m} \right]$ , e com  $\phi \in \phi_\alpha$ , onde  $\phi_\alpha$  tal que  $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \partial\mathcal{M}$ , é um atlas de  $\partial\mathcal{M}$  (não necessariamente tal que  $x_\alpha^1 = 0$ ).

♣ Tomemos  $\omega = \star\Phi(u)$ , com  $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \hat{u}^k \frac{\partial}{\partial s^k}$ , por Stokes vem, uma vez que  $\Phi(u) = u_i dx^i = \hat{u}_k ds^k$  (vê p. 127 e 135),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d\star\Phi(u) &= \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial s^k} \left( \sqrt{|g|} \hat{u}^k \right) ds^1 \wedge \cdots \wedge ds^m = \int_{\mathcal{M}} \nabla_k^\Gamma \hat{u}^k \Omega_m \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \iota^\# \star\Phi(u) = \int_{\partial\mathcal{M}} u_i (-1)^{k+1} (-1)^{k-1} \delta^{ki} \sqrt{|h|} N_k dx_\alpha^2 \cdots dx_\alpha^m, \end{aligned}$$

logo obtemos o teorema da divergência em forma mais geral,

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} u \sqrt{|g|} = \int_{\partial\mathcal{M}} (u, N)_h \sqrt{|h|}.$$

## Aplicações do Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$ -1-

### Teorema de Green

Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $(x, y)$  as coordenadas Cartesianas do plano. Temos

$$\int_{\partial A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dxdy.$$

DEM. Seja  $\omega = Pdx + Qdy$ . Por Stokes,  $\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A (\partial_y P dy \wedge dx + \partial_x Q dx \wedge dy) = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_{\text{Id}_{\#} A} (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_A \text{Id}^{\#}(-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy[e_1 \wedge e_2]dxdy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dxdy.$

QED. ■

- Em todo rigor o sentido de  $A$  nas linhas 1, 2 e 3 é diferente do sentido de  $A$  na linha 4, pois que no primeiro caso  $A$  é uma variedade orientada, enquanto no segundo  $A$  é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^2$ . Na linha 3 aplicamos a mera definição de integral de uma forma.

## Aplicações do Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$ -2-

### Teorema de Stokes classico

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com fronteira  $\partial S \neq \emptyset$  e  $(x, y, z)$  as coordenadas Cartesianas a 3d.

Seja  $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$ . Temos

$$\int_{\partial S} v \cdot d\vec{L} = \int_S \text{curl}v \cdot d\vec{S}.$$

DEM. Seja  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ . Temos  $S = F_{\#}U, U \subset \mathbb{R}^2$ . Por Stokes,  $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = \int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q)dy \wedge dz + (\partial_z P - \partial_x R)dz \wedge dx + (\partial_x Q - \partial_y P)dx \wedge dy = \int_U (\text{curl}v)_i (\partial_u F du \times \partial_v F dv)_i =: \int_S \text{curl}v \cdot d\vec{S}$ . QED.

• Lembrete:  $\int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q)dy \wedge dz := \int_U F_{\#}(\partial_y R - \partial_z Q)dy \wedge dz [\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}] = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q)(x, y, z)dy \wedge dz [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q)(x, y, z) \frac{\partial(F^2, F^3)}{\partial(u, v)} dudv.$

## Aplicações do Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$ -3-

$$= \int_U (\text{curl } v)_1 (\partial_u F \times \partial_v F)_1 dudv.$$

### Teorema da divergência

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície fechada (i.e.,  $\partial S = \emptyset$ ),  $V$  o volume tal que  $\partial V = S$ , e  $(x, y, z)$  as coordenadas Cartesianas a 3d. Seja  $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$ . Temos

$$\int_{\partial V} v \cdot \vec{dS} = \int_V \text{div } v \, dV.$$

DEM. Iremos demonstramos mais do que a tese, i.e., conseguimos provar a tese componente por componente. Seja  $\omega_1 = Pdy \wedge dz$ .

Por Stokes,  $\int_{\partial V} \omega_1 = \int_V d\omega_1 = \int_V \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz = \int_V \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] = \int_V \partial_x P dV$ . QED. ■

♣ É evidente que a tese segue uma vez efetuado o cálculo das 3 componentes, i.e.  $\omega_2 = Qdx^3 \wedge dx^1$  e  $\omega_3 = Rdx^1 \wedge dx^2$ .

## Aplicações do Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$ -4-

### Trabalho de casa 23

1. Seja  $M$  um volume limitado de  $\subset \mathbb{R}^3$ . Mostrar que 
$$\text{Vol}(M) = \int_{\partial M} x dy \wedge dz.$$
2. Seja duas curvas  $C_1, C_2 \subset S \subset \mathbb{R}^3$  com extremidades  $A$  e  $B$  e seja  $\omega \in \mathcal{C}^1(S; \Lambda^1(TS))$  fechada. Mostrar que 
$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

### Trabalho de casa 24

Seja  $\omega \in \Lambda^{m-1}(\mathcal{M})$  e  $\eta^m(\mathcal{M})$  com suporte compato em  $\mathcal{M}$ .

Mostrar que

$$(d\omega, \eta)_2 = (\omega, \delta\eta)_2.$$

Mostrar que os mesmo vale se  $\mathcal{M}$  é fechada e  $\omega, \eta$  quaisquer.

HINT. Partir da definição e efetuar integração por parte e aplicar Stokes.

## Derivada temporal de um integral de superfície -1-

### Derivada temporal do fluxo

Seja  $t \mapsto S(t) = F(U) = F_t(U)$  i.e.,  $X = (x_1, x_2, x_3) = F_t(u, v)$  com  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $F_t := F(t)$  e  $t \mapsto F(t)$  a variação temporal da superfície. Seja  $V := \dot{X} = \dot{F} = \frac{dF}{dt}$  um campo de velocidade de deslocação/deformação de  $S(t)$ . Assumimos tal que  $V \perp TS(t), \forall t$  e que  $\partial S(t) \neq \emptyset$ . Então, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \phi \cdot \vec{dS} = \int_{S(t)} (\partial_t \phi + \operatorname{div} \phi V - \operatorname{Curl} (V \times \phi)) \cdot \vec{dS}$$

DEM. • **Passo 1:** sendo  $(a_i)_i := (V, \partial_u F, \partial_v F)$  linearmente independentes; a base dual associada (i.e., representante de Riesz da mesma) é  $a^j := \left( \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)}, \frac{\partial_v F \times V}{\partial_v F \cdot (V \times \partial_u F)}, \frac{V \times \partial_u F}{\partial_u F \cdot (\partial_v F \times V)} \right)_j = \frac{1}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} (\partial_u F \times \partial_v F, \partial_v F \times V, V \times \partial_u F) =: (\hat{V}, \widehat{\partial_u F}, \widehat{\partial_v F})$ , sendo que  $(a_i | a^i) = (a_i | \hat{a}_i) = \delta_{ij}$ .

## Derivada temporal de um integral de superfície -2-

• **Passo 2:** uma vez que  $\nabla = a^i(a_j\partial_j)$  (vê página 48), vem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Phi &= a_j \partial_j \Phi \cdot a^i, \text{ i.e. } \nabla \cdot \Phi = (V \cdot \nabla) \Phi \cdot \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} + (\partial_u F \cdot \\ &\nabla) \Phi \cdot \frac{\partial_u F \times V}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} + (\partial_v F \cdot \nabla) \Phi \cdot \frac{V \times \partial_v F}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} = \\ &(V \cdot \nabla) \Phi \cdot \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} + \partial_u \Phi \cdot \frac{\partial_u F \times V}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)} + \partial_v \Phi \cdot \frac{V \times \partial_v F}{V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F)}, \end{aligned}$$

com a definição  $\partial_u := \partial_u F \cdot \nabla$

• **Passo 3:** notemos  $\frac{d}{dt} F = \dot{F} = V$ . Pela regularidade de  $S$ ,

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \frac{d}{dt} (\partial_u F \times \partial_v F) &= \Phi \cdot (\partial_u \dot{F} \times \partial_v F - \partial_v \dot{F} \times \partial_u F) = \\ &\Phi \cdot \left( \partial_u (\dot{F} \times \partial_v F) - \partial_v (\dot{F} \times \partial_u F) \right) - \Phi \cdot (\dot{F} \times (\partial_u \partial_v - \partial_v \partial_u) F) = \\ &\Phi \cdot (\partial_u (V \times \partial_v F) - \partial_v (V \times \partial_u F)) = \partial_u (\Phi \cdot (V \times \partial_v F)) - \\ &\partial_v (\Phi \cdot (V \times \partial_u F)) - \partial_u \Phi (V \times \partial_v F) + \partial_v \Phi (V \times \partial_u F). \end{aligned}$$

Pelo passo 2 re-escreve-se como

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \frac{d}{dt} (\partial_u F \times \partial_v F) &= \partial_u (\Phi \cdot (V \times \partial_v F)) - \partial_v (\Phi \cdot (V \times \partial_u F)) + \\ &(\nabla \cdot \Phi) V \cdot (\partial_u F \times \partial_v F) - (V \cdot \nabla \Phi) \cdot \partial_u F \times \partial_v F. \end{aligned}$$



## Derivada temporal de um integral de superfície -3-

• **Passo 4:** calculemos

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \phi \cdot \vec{dS} = \frac{d}{dt} \int_U F_t^\# \phi \cdot \partial_u F_t \times \partial_v F_t dudv =$$

$$\int_U \frac{d}{dt} F_t^\# \phi \cdot \partial_u F_t \times \partial_v F_t dudv + \int_U F_t^\# \phi \cdot \frac{d}{dt} (\partial_u F_t \times \partial_v F_t) dudv.$$

Pelo passo 3 com  $\Phi = F_t^\# \phi$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \phi \cdot \vec{dS} = \int_U \left( \frac{d}{dt} F_t^\# \phi - (V \cdot \nabla) F_t^\# \phi \right) \cdot \partial_u F_t \times \partial_v F_t dudv +$$

$$\int_U (\partial_u (\Phi \cdot (V \times \partial_v F_t)) - \partial_v (\Phi \cdot (V \times \partial_u F_t)) + (\nabla \cdot \Phi) V \cdot (\partial_u F_t \times \partial_v F_t))$$

$dudv$ . Sendo que  $\frac{d}{dt} F_t^\# \phi = \partial_t F_t^\# \phi + (V \cdot \nabla) F_t^\# \phi$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \phi \cdot \vec{dS} = \int_U (\partial_t F_t^\# \phi + V \nabla \cdot F_t^\# \phi) \cdot \partial_u F_t \times \partial_v F_t dudv$$

$$+ \int_U (\partial_u (\Phi \cdot (V \times \partial_v F_t)) - \partial_v (\Phi \cdot (V \times \partial_u F_t))) dudv.$$

## Derivada temporal de um integral de superfície -4-

- **Passo 5:** já temos

$$\int_{S(t)} (\partial_t \phi + V \nabla \cdot \phi) \cdot \vec{dS} = \int_U (\partial_t F_t^\# \phi + V \nabla \cdot F_t^\# \phi) \cdot \partial_u F_t \times \partial_v F_t \, dudv.$$

Para obtermos o segundo, utilizamos o teorema de Green em  $U$  com  $Q := \Phi \cdot (V \times \partial_v F_t) = \partial_v F_t \cdot (\Phi \times V)$ ,  $P := \Phi \cdot (V \times \partial_u F_t) = \partial_u F_t \cdot (\Phi \times V)$ :  $\int_U (\partial_u (\Phi \cdot (V \times \partial_v F_t)) - \partial_v (\Phi \cdot (V \times \partial_u F_t))) \cdot (\partial_u F_t \times \partial_v F_t) \, dudv = \int_U (\partial_u Q - \partial_v P) \, dudv = \int_{\partial U} P \, du + Q \, dv = \int_{\partial U} F_t^\# (\phi \times V) \cdot \partial_u F_t \, du + F_t^\# (\phi \times V) \cdot \partial_v F_t \, dv = \int_{\partial S(t)} (\phi \times V) \cdot \vec{dL}_u + (\phi \times V) \cdot \vec{dL}_v = \int_{\partial S(t)} (\phi \times V) \cdot \vec{dL}$ , sendo  $\vec{dL} = \vec{dL}_u + \vec{dL}_v$  o elemento de linha ao longo  $\partial S(t)$

- **Passo 6:** por Stokes clássico, o último re-escreve-se como

$$= \int_{S(t)} \text{Curl} (\phi \times V) \cdot \vec{dS} = - \int_{S(t)} \text{Curl} (V \times \phi) \cdot \vec{dS},$$

terminando assim a prova. QED



## Derivada temporal sob deformações do espaço ambiente

### Objectivo

Tendo um tensor  $T$  definido sobre uma variedade  $\mathcal{M}$  como é que as componentes de  $T$  variam quando o mesmo é transportado ao longo um fluxo de vetor  $X$ ? Sendo que as componentes são dadas numa base do espaço tangente  $T\mathcal{M}_p$  em  $p$ , trata-se de determinar as variações das mesmas perante uma deformação do espaço ambiente (o espaço tangente) ao longo  $X$ .

### Preliminares

Seja  $X$  um campo de vetor sobre  $\mathcal{M}$ , ou seja em cada  $p \in \mathcal{M}$ ,  $X_p \in T_p\mathcal{M}$ . O fluxo  $\sigma_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  gerado por  $X$  no tempo  $t$  é um campo vetorial em  $\mathcal{M}$  tal que  $t \mapsto \sigma_t(p) := \sigma(t, p)$  é a única solução da ODE  $\frac{d\sigma}{dt}(t, p) = X_{\sigma(t, p)}$  com  $\sigma(0, p) = p$ .

A base local  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  em  $x$  é transportada em  $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$  em  $y = \sigma_t(p)$ .

## Derivada temporal sob deformações do espaço ambiente

-2-

♣ Seja  $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  e  $g : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  ambas regulares.

♣ Temos  $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x \mathcal{M}_1$  em  $x \in \mathcal{M}_1$  e

$W = W^j \frac{\partial}{\partial y^j} \in T_y \mathcal{M}_2$  em  $y \in \mathcal{M}_2$ .

♣ Seja o vetor  $V \in T_p \mathcal{M}_1$ . Definimos,  $p \in \mathcal{M}_1$ ,

$V[f] := df_p[V] = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) dx^\mu[V] = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) V_p^\mu$  com  $x \in U_p$ .

### Mapa push forward sob vetores

Seja o campo vetorial  $V$  em  $\mathcal{M}_1$ , i.e.,  $V_p \in T_p \mathcal{M}_1$ . Suponhamos que  $f$  seja uma bijeção. O mapa diferencial ou mapa "push forward" é definido como

$$f_\# : T_p \mathcal{M}_1 \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{M}_2$$

tal que  $f_\# V_p$  atua como uma derivada tangencial na forma

$$f_\# V_p[g] := V_p[g \circ f] = V_p[f^\# g], \quad \forall g \in C^\infty(\mathcal{M}_2; \mathbb{R})$$

Push forward = aproximação linear de mapas suaves entre planos tangentes = derivada (direcional) total de mapas suaves

Podemos escrever o mapa **diferencial** (outra notação):

$df_p[V] := f_{\#}V$ , ou seja, para  $g \in C^{\infty}(\mathcal{M}_2; \mathbb{R})$ ,

$$df_p[V][g] := V_p[g \circ f].$$

Push-forward = transformação tensorial contravariante

Temos  $f_{\#}V_p = W^{\nu}(q) \frac{\partial}{\partial y^{\nu}}$  com  $W^{\nu}$  as componentes de  $f_{\#}V_p$  na base local de  $T_q\mathcal{M}_2$  em  $q = f(p) \in \mathcal{M}_2$ . Portanto

$f_{\#}V_p[g] = W^{\nu}(q) \frac{\partial g}{\partial y^{\nu}}$ . Mas,  $f_{\#}V_p[g] = V_p[g \circ f] = V^{\mu}(p) \frac{\partial g \circ f}{\partial x^{\mu}} = V^{\mu}(p) \frac{\partial g}{\partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ ,  $y \in U_q^2, x \in U_p^1$ . Logo,

$$W^{\nu}(q) = V^{\mu}(f^{-1}(q)) \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}(f^{-1}(q))$$

mostra que  $V_p$  se transforma como um 1-tensor (contravariante) sob a ação do mapa  $f$ .

Ora, isto significa que **podemos comparar**  $V$  com qualquer campo vetorial em  $T_q\mathcal{M}_2$ , mediante a expressão de  $W_q = f_{\#}V_p(q)$ . Geralmente, para sermos capazes de comparar dois tensores ambos têm de ficar no mesmo espaço tangente, daí a necessidade do push forward, i.e., da transformação tensorial adequada.

### Push forward e Pull back = operações tensoriais sem coordenadas

Nos caso de um **vetor** em  $T_p\mathcal{M}_1$ , o mapa **push forward** expressa o mesmo no novo sistema de coordenadas, associado a mudança de coordenadas pelo mapa  $f$ . No caso de um **covetor** em  $T_p\mathcal{M}_2$  o mapa **pull back** expressa o mesmo no novo sistema de coordenadas, associado a mudança de coordenadas pelo mapa  $f^{-1}$ .

♣ Tomando  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$  e  $f = \sigma_t$ , obtemos que  $W^\mu(\sigma_t(p)) = (\sigma_t)_{\#}V_p^\mu = V^\nu(p)\frac{\partial\sigma_t^\mu}{\partial x^\nu}(p)$  (\*) são as componentes da transportada de  $V$  ao longo do fluxo de  $X$ , i.e.,  $W_q := (\sigma_t)_{\#}V_p$ , expressadas na base local  $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}$  em  $q = \sigma_t(p)$ .

## Derivada de Lie

Consideremos o difeomorfismo (local)  $f = \sigma_{-t} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  (fluxo associado a  $X$  em  $-t$  partindo de  $q$ , ou mapa inverso de  $\sigma_t$ ).

Seja  $T$  um campo de tensores em  $\mathcal{M}$ ,  $p \in \mathcal{M}$  e  $q = \sigma_t(p)$ . Sendo ambos expressados em  $T_p\mathcal{M}$ , podemos comparar  $(\sigma_{-t})_{\#}T_q$  com  $T_p$ . A derivada de Lie do campo  $T$  longo o campo  $X$  é definido como:

$$\mathcal{L}_X T(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\sigma_{-t})_{\#}T_q - T_p] = \frac{d}{dt}(\sigma_{-t})_{\#}T_{\sigma_t(p)}|_{t=0}.$$

♣ **Nota 1:**  $\mathcal{L}_X T$  é um campo tensorial em  $\mathcal{M}$  da mesma ordem de que  $T$ . Assim, para cada  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}_X T(p)$  é expressado em  $T_p\mathcal{M}$ .

♣ **Nota 2:** sendo  $y^\mu = x^\mu + tX^\mu + O(t^2)$  temos  $\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + t\partial_{x^\nu} X^\mu + O(t^2)$  e  $\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \delta^\mu_\nu - t\partial_{y^\nu} X^\mu + O(t^2)$ .

♣ **Interpretação:** seja um tensor  $T$ . Então

$\delta T(p) := \mathcal{L}_X T(p) := \frac{d}{dt}(\sigma_{-t})_{\#}T_{\sigma_t(p)}|_{t=0}$  é a variação infinitesimal das componentes de  $T$  sob o difeomorfismo  $x^\mu \rightarrow x^\mu + tX^\mu$ , i.e., quando o ponto material na posição  $p$  se desloca com o fluxo  $X$ .

## O operador de comutação

### Aplicação à campos de vetores ( $T = V = Y_p$ )

Portanto, por  $(\star)$  com  $f = \sigma_{-t}$ ,  $V = Y_q$  e  $p \leftrightarrow q$ , temos  $(\sigma_{-t})_{\#} Y_q^\mu = Y^\nu(q) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}(q) = Y^\nu(q) (\delta_{\nu\mu} - t \partial_{y^\nu} X^\mu) + O(t^2)$ , logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\sigma_{-t})_{\#} Y_q^\mu &= \partial_{y^\nu} Y^\mu(q) \frac{dy^\nu}{dt}(q) - Y^\nu(q) \partial_{y^\nu} X^\mu(q) + O(t^2) = \\ &= X_q^\nu \partial_{y^\nu} Y_q^\mu - Y_q^\nu \partial_{y^\nu} X_q^\mu + O(t^2), \text{ i.e.,} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_X Y(p) = (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

♣ O campo vetorial  $\mathcal{L}_X Y$  é chamado **comutador de  $X$  com  $Y$**  e escrito sem coordenadas  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ . Temos  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

### Lema (ação do comutador sob funções)

Seja  $f$  uma função  $\mathcal{C}^2$ . Então  $[\partial_X, \partial_Y]f := \partial_{XY}f - \partial_{YX}f = \mathcal{L}_X Y \cdot \nabla f = [X, Y] \cdot \nabla f$ .

DEM. Igual à da página 50 (invalidade do lema de Schwarz ...).



## Variação da métrica -1-

♣ Consideremos o espaço das configurações de um corpo material submetido a uma deformação temporal. Um ponto material  $p$  deste corpo evolui numa variedade  $\mathcal{M}$  seguindo uma trajetória ao longo de  $X$  a partir de um ponto de partida  $p_0 \in \mathcal{M}$  no tempo inicial  $t = 0$ . Em cada  $p$  consideremos a métrica  $g$ . Gostaríamos de saber como  $g$  evolui (i.e., varia) ao longo do fluxo vetorial  $\sigma_t$  associado à  $X$ .

♣ Para este efeito calculemos  $\delta g_{\alpha\beta}(p) = \mathcal{L}_X g_{\alpha\beta}(p)$ . Sendo que derivamos em  $t$ , só precisamos de  $(\tilde{g}_{\mu\nu})_p := (\sigma_{-t})_{\#}(g_{\alpha\beta})_q$  na

$$\begin{aligned} & \text{primeira ordem ou seja } \tilde{g}_{\mu\nu}(t) = g_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \right]_{O(t)} \left[ \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \right]_{O(t)} \\ & = g_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha + t \partial_\mu X^\alpha) (\delta_\nu^\beta + t \partial_\nu X^\beta). \text{ Derivando em } t, \text{ já que } \dot{p} = X, \\ & \text{obtemos } \delta g_{\mu\nu} = \frac{d}{dt} \tilde{g}_{\mu\nu}|_{t=0} = \frac{d}{dt} g_{\mu\nu}|_{t=0} + g_{\alpha\nu} \partial_\mu X^\alpha + g_{\mu\beta} \partial_\nu X^\beta = \\ & X^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \partial_\mu X^\alpha + g_{\mu\beta} \partial_\nu X^\beta = X^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu X_\nu - X^\alpha \partial_\mu g_{\alpha\nu} \\ & + \partial_\nu X_\mu - X^\beta \partial_\nu g_{\mu\beta} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu + X^\rho (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \\ & \partial_\nu g_{\mu\rho}) = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu;\rho} X^\rho = \nabla_\mu^\Gamma X_\nu + \nabla_\nu^\Gamma X_\mu. \end{aligned}$$

## Variação da métrica -2-

♣ Digamos que a deformação gerada pelo campo de velocidade  $X$  é uma isometria se a métrica for invariante longo o fluxo de  $X$ , ou seja se  $\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0 = \nabla_{\mu}^{\Gamma} X_{\nu} + \nabla_{\nu}^{\Gamma} X_{\mu}$  (\*\*), com  $\Gamma$  a conexão compatível com a métrica. A variação da métrica associada a um corpo em deformação é chamada "tensor de taxa de deformações infinitesimais". No caso de um espaço Euclidiano temos  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  e portanto  $2d_{ij} := \delta g_{\mu\nu} = \partial_{\mu} X^{\nu} + \partial_{\nu} X^{\mu}$ .

### Killing vector field

Um campo  $X$  que preserva a métrica é chamado "Killing vector field". Por definição os mesmos são geradores infinitesimais de isometrias: se deformamos um corpo longo um campo de Killing, as distâncias relativas entre dois pontos permanecem invariantes. Em coordenadas locais, as equações de Killing são (\*\*). Temos  $\mathcal{L}_X g(u, v) = \frac{d}{dt} |_{t=0} (\sigma_{-t})_{\#} g(u, v) = \frac{d}{dt} |_{t=0} g(\sigma_{-t}(u), \sigma_{-t}(v)) = 0$ .

## As equações de Maxwell a 3d -1-



Figure: James Clerk Maxwell, Físico Escoces (1831-1879)

♣ Equações derivadas com base a noção de "Eather" and "eatheareal vortices".

- 1 Clerk Maxwell, J., "On Physical Lines of Force", Philosophical Magazine, Volume XXI, Fourth Series, London, (1861)
- 2 Clerk Maxwell, J., "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", Philos. Trans. Roy. Soc. London 155, pp 459-512 (1865)

## As equações de Maxwell na forma original (20)

- A** "Corrente elétrica total":  $\mathcal{J} = j_{\text{liv}} + \frac{\partial D}{\partial t}$  ( $\mathcal{J}$ : corrente elétrica total per unidade de superficie,  $j_{\text{liv}}$ : corrente elétrica livre,  $D$ : corrente de deslocamento (existe na matéria))
- B** "Força magnética:  $\text{Curl } A = \mu H$  ( $A$ : momento magnético,  $H$ : intensidade magnética ("vorticidade magnética"),  $\mu$ : permeabilidade magnética no vácuo)
- C** "Lei de Ampère":  $\text{Curl } H = \mathcal{J}$
- D** "Campo elétrico" (força por unidade de carga):  
 $E = \mu v \times H - \partial_t A - \nabla \psi$  (força de Lorentz  $\mu v \times H =$   
 "força" de Coriolis,  $\psi$ : potencial eletro-estático)
- E** "Elasticidade elétrica":  $D = \epsilon E$  ( $\epsilon$ : permissividade do vácuo)
- F** "Lei de Ohm":  $E = \sigma^{-1} j_{\text{liv}}$  ( $\sigma$ : condutividade elétrica por unid. de vol.)
- H** "Lei de Gauss":  $\text{div } D = \rho$  ( $\rho$ : densidade de eletricidade livre por unid. de vol. " = ether")
- I** "Equação de continuidade":  $\text{div } j_{\text{liv}} + \partial_t \rho = 0.$

## Terminologia e sentido físico

- ♣ Existem 2 grandezas por modelizar o magnetismo:
  - a 1.a é a **indução magnética** ou densidade de fluxo magnético  $B$ , com unidade [ $T = J/Am^2$ ] ou seja "energia por unidade de superfície e de corrente". O campo  $B$  descreve uma força magnética que atua num objeto test do tipo metálico, e toma em conta os efeitos à distância (energia magnética no vácuo) e na matéria (legado à magnetização  $M$ ).
  - a 2.a é o **campo magnético**  $H$  que corresponde à energia magnética no vácuo. A circulação de  $H$  induz correntes livres e cria variações temporais do campo elétrico e da polarização.
- ♣ O campo elétrico  $E$  tem unidades de [ $V/m$ ] e é gerado pela presença de carga elétrica livre e de um campo magnético.
- ♣ Finalmente, o deslocamento elétrico, ou densidade de fluxo elétrico  $D$  [ $C/m^2$ ], é composto de uma parcela no vácuo  $E$  e de uma polarização  $P$  na matéria.

## Derivação das equações de Maxwell -1-

♣ **Carga e corrente elétrica:** a carga elétrica está repartida de forma contínua, com densidade  $\rho$ ; tendo as mesmas uma velocidade  $v$ , a corrente elétrica é definida como  $i := \rho v$ .

### Equação de Continuidade

A lei de conservação diz que a corrente  $j_{\text{liv}}$  que flui através a superfície fechada  $S = \partial\Omega$  é igual a menos a variação da carga no volume  $\Omega$ , i.e.,  $\int_{\partial\Omega} j_{\text{liv}} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV$ . Logo, por Gauss (teorema da divergência),  $\text{div } j_{\text{liv}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

♣ **Lei de Coulomb:** existe uma força de repulsão entre duas cargas elétricas  $q$  e  $q'$  que atua em  $q'$  como  $E = \frac{q}{r^2} g_r$ .

### Lei de Coulomb-Gauss

Seja  $S$  uma esfera unitária, logo  $\int_S E \cdot \vec{dS} = q \int_S g_r \cdot \vec{dS} = 4\pi q$ ,  
i.e.  $\text{div } E = 4\pi q$ .

## Derivação das equações de Maxwell -2-

♣ **Polarização:** num meio isolante as cargas elétricas podem se deslocar sob a ação de  $E$  mas sempre ficando legadas elasticamente às suas posições de equilíbrio. Tal deslocamento polariza o meio. A quantidade de carga deslocada através uma secção unitária é o vetor de polarização  $P$ , i.e.,  $\int_{\Sigma} P \cdot \vec{dS} = -\int_{\Sigma} \rho' dV$ . Logo vem  $\text{div } P = -\rho'$  onde  $\rho'$  é a carga de polarização.

♣ **Deslocamento elétrico:** definido como  $D = E + 4\pi P$ . O deslocamento elétrico tem o papél do campo elétrico se for na matéria.

### Conservação de carga na matéria

Desta vez a carga total é  $\rho + \rho'$ . Temos então  $\text{div } D = 4\pi(\rho + \rho') - 4\pi\rho' = 4\pi\rho$ . Consideremos a lei de conservação de carga  $\text{div } j_{\text{liv}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , logo  $\text{div } \left( j_{\text{liv}} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$ .

## Derivação das equações de Maxwell -3-

♣ O magnetismo foi observado mediante ímãs permanentes, sendo que o campo magnético atua sob ímãs que possuem quer um polo nord quer um polo sul, ao contrário da eletrostática que admite polos isolados. O meio magnetizado atua como uma fonte de campo magnético chamado  $H$ , e pode ser descrito mediante um vetor chamado magnetização  $M$ , observando que na fronteira  $\Gamma$  de um ímã, o campo  $H$  é descontínuo, i.e., tem um salto na direção normal,  $[H \cdot N]_{\Gamma} = m_{\Gamma} = M \cdot N$ . Logo por Gauss

$$\int_{\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-} \operatorname{div} H dV = \int_{\Omega} \operatorname{div} M dV, \text{ onde } \Omega = \Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-.$$

• A magnetização é provocada, em parte, pelos momentos das partículas elementares (i.e. o spin dos elétrons, prótons, e nêutrons), como se fosse uma "rotação da carga sobre si mesma".

### Lei de Gauss magnética

Define-se o vetor indução magnética  $B := H + M$ . Temos a lei de conservação  $\operatorname{div} B = 0$ .



## Derivação das equações de Maxwell -4-

♣ Oersted e Ampère observaram que qualquer corrente elétrica estacionária é cercada por um campo magnético  $H$  cujas linhas de força cercam o campo elétrico. Logo  $\int_{\partial S} H \cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c} \int_S j_{\text{liv}} \cdot d\vec{S}$ .  
Por Stokes, vem  $\text{Curl } H = \frac{4\pi}{c} j_{\text{liv}}$ .

- No caso não estacionário, repare-se que o membro a esquerda tem divergência nula, quando o a direita vale pela equação de continuidade  $-\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

### Lei de Ampère

Sendo que o vetor  $4\pi j_{\text{liv}} + \frac{\partial D}{\partial t}$  tem divergência nula e vale  $4\pi j_{\text{liv}}$  no caso estacionário, temos a lei de conservação

$$\text{Curl } H = \frac{1}{c} \left( 4\pi j_{\text{liv}} + \frac{\partial D}{\partial t} \right).$$

## Derivação das equações de Maxwell -5-

♣ Lenz e Faraday observaram que uma variação do fluxo de indução magnética através de uma espira condutora dá lugar a uma força eletromotriz  $F = \int_{\partial S} E \cdot d\vec{L}$ . Logo  $F = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S B \cdot d\vec{S}$ .

### Lei de Faraday

A lei de conservação associada é  $\text{Curl } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ .

### Trabalho de casa 25

(i) Demonstrar com cálculo indicial a identidade

$$\text{div}(E \times H) = \text{Curl } E \cdot H - E \cdot \text{Curl } H.$$

(ii) Definimos o **vetor de Poynting**  $S := E \times H$ . Por Maxwell demonstrar que  $-\left(\frac{c}{4\pi}\right) \text{div } S = E \cdot j_{\text{liv}} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot H + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot E$ .

♣ **Interpretação:**  $E \cdot j_{\text{liv}}$  é a energia dissipada na matéria, e  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot H + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot E$  o trabalho fornecido pelos campos eletromagnéticos.  $S$  é uma densidade superficial de energia eletromagnética.

## Sumário das equações de Maxwell em forma vetorial 3d

♣ Sistema de 4 equações normalizadas na matéria  
(convenção de Gauss )

a "Lei de Gauss ou de conservação da carga":  $\text{div} D = \rho$   
( $\rho$ : densidade de carga elétrica livre por unidade de volume)

b "Lei de Gauss magnética":  $\text{div} B = 0$

c "Lei de Maxwell-Faraday"  $\text{Curl } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$

d "Lei de Ampère"  $\text{Curl } H = \frac{1}{c} (j_{\text{liv}} + \frac{\partial D}{\partial t})$

♣ Com 2 leis de constituição:

(i)  $D = E + P$  ( $P$ : campo de densidade de polarização)

(ii)  $B = H + \frac{1}{c} M$  ( $M$ : campo de densidade de magnetização)

### Trabalho de casa 26

Mostrar que este sistema não é supra determinado, i.e. que existem tantas equações como incógnitas. HINT. Considere campos iniciais tal que  $\text{div } B(0) = 0$  e  $\text{div } D(0) = \rho(0)$  a equação de continuidade.

## As equações de Maxwell em forma vetorial 3d

♣ Forma alternativa em forma normalisada/relativística  
(válida no vácuo ou a nível microscópico)

a' "Conservação da carga":  $\text{div} E = R$

(definindo  $R := \rho - \text{div} P$  a densidade total de carga)

b' "Lei de Gauss":  $\text{div} B = 0$

c' "Lei de Maxwell-Faraday"  $\text{Curl} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$

d' "Lei de Ampère"  $\text{Curl} B = \frac{1}{c} (J + \frac{\partial E}{\partial t})$  (definindo

$J := j_{\text{liv}} + j_{\text{leg}}$  a corrente elétrica total, com as correntes

legadas  $j_{\text{leg}} := \text{Curl} M + \partial_t P = 0$  no vácuo,  $\neq 0$  na matéria).

♣ Forma alternativa na matéria em unidades SI

(mudança de variável:  $\tilde{H} = cH$ ,  $\tilde{B} = \mu cB$ ,  $\tilde{E} = \frac{1}{\epsilon} E$ )

• Leis constitutivas:  $D = \epsilon \tilde{E} + P$  e  $\tilde{H} = \frac{1}{\mu} \tilde{B} - M$ .

• Equações:  $\text{div} \tilde{E} = \frac{1}{\epsilon} R$  (ou  $\text{div} D = \rho$ ),  $\text{div} \tilde{B} = 0$ ,

$\text{Curl} \tilde{E} = -\partial_t \tilde{B}$ ,  $\text{Curl} \tilde{B} = \mu (J + \epsilon \partial_t \tilde{E})$

(ou  $\text{Curl} \tilde{H} = j_{\text{liv}} + \partial_t D$ ).

## As equações de Maxwell a 3d em forma invariante

♣ Sejam os vetores  $E = E^i e_i = E^1 e_1 + E^2 e_2 + E^3 e_3$  e  $B = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} B^i e_j \times e_k = B^1 e_2 \times e_3 + B^2 e_3 \times e_1 + B^3 e_1 \times e_2$ .  
 Define-se o co-vetor dual são  $\mathcal{E} = \Phi(E) = E^i dx^i$  e a 2-forma  $\mathcal{B} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} B^i dx^j \wedge dx^k$ . Considere-se também  $H = H^i e_i$ ,  $P = P^i e_i$ , e  $M = M^i e_i$ , com os duais  $\mathcal{H} = \Phi(H) = H^i dx^i$ ,  $\mathcal{P} = \Phi(P)$ , e  $\mathcal{M} = \Phi(M)$ . Também, definimos a partir dos vetores  $D = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} D^i e_j \times e_k$  e  $j_{\text{liv}} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} j_{\text{liv}}^i e_j \times e_k$ , os duais  $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} D^i dx^j \wedge dx^k$  e  $\mathcal{J}_{\text{liv}} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} j_{\text{liv}}^i dx^j \wedge dx^k$ .

♣ Sejam também  $\mathcal{Q} := \rho \Omega_N$ . As equações de Maxwell em forma invariante, i.e., mediante o formalismo das  $m$ -formas, escreve-se:

a" "Conservação da carga":  $\text{div} D = \rho \Rightarrow d\mathcal{D} = \mathcal{Q}$

b" "Lei de Gauss":  $\text{div} B = 0 \Rightarrow d\mathcal{B} = 0$

c" "Lei de Maxwell-Faraday"  $\text{Curl } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow$   
 $d\mathcal{E} = -c^{-1} \partial_t \mathcal{B}$

d" "Lei de Ampère"  $\text{Curl } H = \frac{1}{c} (j_{\text{liv}} + \frac{\partial D}{\partial t}) \Rightarrow$   
 $d\mathcal{H} = c^{-1} (\mathcal{J}_{\text{liv}} + \partial_t \mathcal{D})$ .

## Resolução das equações de Maxwell a $3d$ -1-

### Leis de constituição

$$A'' \quad \mathcal{D} = \star(\mathcal{E} + \mathcal{P})$$

$$B'' \quad \mathcal{B} = \star(\mathcal{H} + c^{-1}\mathcal{M})$$

- **Obs.:**  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{B}$  são 2-formas, enquanto  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{M}$  são 1-formas.

### Equação de continuidade da carga elétrica

Toma  $dd\mathcal{H} = 0$ , portanto  $d\mathcal{J}_{\text{liv}} + \partial_t d\mathcal{D} = d\mathcal{J}_{\text{liv}} + \partial_t \mathcal{Q} = 0$ .

Logo  $\text{div} j_{\text{liv}} + \partial_t \rho = 0$ .

### Potencial magnético e potencial elétrico

Toma  $d\mathcal{B} = 0$ , portanto por Poincaré existe uma 1-forma  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{B} = d\mathcal{A}$ . Também é válido o potencial  $\mathcal{A} + df$  com  $\forall f \in \Lambda^0$ . Logo  $d\mathcal{E} = c^{-1}\partial_t d\mathcal{A}$  ou seja  $d(\mathcal{E} + c^{-1}\partial_t \mathcal{A}) = 0$ . Por Poincaré existe um  $\phi \in \Lambda^0$  tal que  $\mathcal{E} + c^{-1}\partial_t \mathcal{A} = -d\phi$ .

- **Obs.:** O campo  $\mathcal{A}$  é chamado potencial magnético, e o campo  $\phi$  potencial elétrico. São chamados *campos de gauge*.

## Resolução das equações de Maxwell a 3d -2-

### Trabalho de casa 27

Mostrar que se  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + df$  então  $\phi \rightarrow \phi - c^{-1}\partial_t f$

### Trabalho de casa 28

Seja  $M = M^i e_i$ . Mostrar que  $\star d\Phi(M) = \Phi(\text{Curl } M)$ .

### Equação do potencial magnético

$$\begin{aligned} -\Delta\mathcal{A} &= (d\delta + \delta d)\mathcal{A} = d\delta\mathcal{A} + \delta B = d\delta\mathcal{A} + (-1)^2 \star d \star \mathcal{B} = \\ &= d\delta\mathcal{A} + (-1)^2 \star d \star (\mathcal{H} + c^{-1}\Phi(M)) = d\delta\mathcal{A} + \star d(\mathcal{H} + c^{-1}\Phi(M)) = \\ &= d\delta\mathcal{A} + \star c^{-1}(\mathcal{J}_{\text{liv}} + \partial_t \mathcal{D} + d\Phi(M)) = d\delta\mathcal{A} + c^{-1}(\Phi(j_{\text{liv}}) + \partial_t(\mathcal{E} + \\ &+ \Phi(P)) + \star d\Phi(M)) = d\delta\mathcal{A} + c^{-1}(\Phi(j_{\text{liv}} + \text{Curl } M + \partial_t P) + c^{-1}\partial_t \mathcal{E}) = \\ &= d\delta\mathcal{A} + c^{-1}(\Phi(j_{\text{liv}} + \text{Curl } M + \partial_t P) - c^{-1}\partial_t^2 \mathcal{A} - c^{-1}d\partial_t \phi). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$c^{-2}\partial_t^2 \mathcal{A} - \Delta\mathcal{A} = c^{-1}(\Phi(j_{\text{liv}} + \text{Curl } M + \partial_t P) + d(\delta\mathcal{A} - c^{-1}\partial_t \phi)).$$

## Resolução das equações de Maxwell a $3d$ -3-

### Condição de Lorenz

Assumimos  $0 = \delta \mathcal{A} - c^{-1} \partial_t \phi$ . Portanto a equação do potencial magnético é:  $c^{-2} \partial_t^2 \mathcal{A} - \Delta \mathcal{A} = c^{-1} (\Phi(j_{\text{liv}} + \text{Curl } M + \partial_t P)) = 0$ .  
Seja  $A = \Phi^{-1}(\mathcal{A})$ , logo

$$c^{-2} \partial_t^2 A - \Delta A = c^{-1} J_{\text{liv}} = c^{-1} (j_{\text{liv}} + j_{\text{leg}}).$$

♣ Nota-se que  $\mathcal{A} = \Phi(A)$  e que  $\star \mathcal{A} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} A^i dx^j \wedge dx^k$ .  
Portanto  $d \star \mathcal{A} = \frac{1}{2} \epsilon_{i[jk]} \partial_{\underline{i}} A^i dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$  e  $\star d \star \mathcal{A} = \text{div} A$ .

### Significação física da condição de Lorenz

$$\delta \mathcal{A} - c^{-1} \partial_t \phi = - \star d \star \mathcal{A} - c^{-1} \partial_t \phi = -\text{div} A - c^{-1} \partial_t \phi = 0.$$



## Equação do potencial elétrico

Temos  $\Delta\phi = -(\delta d + d\delta)\phi = -\phi = \delta(\mathcal{E} + c^{-1}\partial_t\mathcal{A}) = -\star d\star\mathcal{E} + c^{-2}\partial_t^2\phi + c^{-1}\partial_t(\delta\mathcal{A} - c^{-1}\partial_t\phi)$ . Aplicando a condição de Lorenz obtemos

$$c^{-2}\partial_t\phi - \Delta\phi = \star d(\mathcal{D} - \star\mathcal{P}) = \star(\mathcal{Q} - d\star\Phi(P)) = \rho - \operatorname{div} P.$$

## Sumário

Resolve-se primeiro  $c^{-2}\partial_t^2 A - \Delta A = c^{-1}J$  bem como  $c^{-2}\partial_t^2\phi - \Delta\phi = \star(\mathcal{Q} - d\star\mathcal{P}) = \rho - \operatorname{div} P$ .

Mediante os potenciais  $A$  e  $\phi$  obtemos  $B = \operatorname{Curl} A$  e  $E = -\nabla\phi - c^{-1}\partial_t A$ .

### Trabalho de casa 29

Mostrar que no caso isótropo, i.e.,  $B = \mu H$ ,  $D = \epsilon E$ , vem  $-\operatorname{div} S = j_{\text{liv}} \cdot E + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon E^2 + \mu B^2}{8\pi}$ .

♣ **Observação:** a quantidade  $\epsilon E^2 + \mu B^2$  é uma densidade de energia eletromagnética onde  $E$  e  $B$  são equiparados.

## Lei de Faraday. Indução electromagnética -1-

### Trabalho de casa 30

Mostrar que é legítimo aplicar a condição de Lorenz. HINT. Ex.27.

### Solução

Seja  $A' = A + df$  e  $\phi' = \phi - c^{-1}\partial_t f$ . Temos que ter  $\delta A' - c^{-1}\partial_t \phi' = 0$ , i.e.,  $\delta df + c^{-2}\partial_t^2 f = -(\delta A - c^{-1}\partial_t \phi)$ .

Resolve-se

$$c^{-2}\partial_t^2 f - \Delta f = (\delta d + d\delta)f + c^{-2}\partial_t^2 f = -(\delta A - c^{-1}\partial_t \phi).$$

### Lei de Faraday

Seja um fio  $\Sigma(t)$ , fechado, conductor de corrente eléctrica, em movimento e sujeito a deformação no campo  $B$ . A força eletromotriz induzida (uma variação de voltagem)  $\mathcal{V}$  é o trabalho

## Lei de Faraday. Indução electromagnética -2-

efetuado por uma carga unitária que percorre uma vez o circuito  $\Sigma(t)$ . Faraday observou e mediu que a mesma é igual á menos a variação temporal do fluxo electromagnético  $\Phi_B(t) := \int_{S(t)} B \cdot \vec{dS}$  através  $S(t)$ , uma superfície com bordo  $\Sigma(t) = \partial S(t)$ , i.e.,  $\mathcal{V} = -\frac{d}{dt}\Phi_B(t)$  (no sistema de unidades SI).

♣ Seja  $V$  a velocidade de  $\Sigma(t)$ . Podemos demonstrar a seguinte formula (vê página 155):

$$\frac{d}{dt}\Phi_B(t) = \int_{S(t)} (\partial_t B + (\operatorname{div} B)V - \operatorname{Curl}(V \times B)) \cdot \vec{dS}.$$

♣ Portanto, por Gauss e Maxwell-Faraday, e Stokes,

$$\mathcal{V} = \int_{S(t)} \operatorname{Curl}(E + V \times B) \cdot \vec{dS} = \int_{\Sigma(t)} (E + V \times B) \cdot \vec{dL}.$$

## Força de Lorentz

♣ Seja  $v := V + v_c$  a velocidade da carga com respeito ao observador, com  $v_c$  a velocidade da carga no referencial do circuito e  $V$  a velocidade do circuito com respeito ao observador (a deformação e a roto-translação do mesmo)

♣ Logo  $\mathcal{V} = \int_{\Sigma(t)} (E + v \times B) \cdot d\vec{L} = \int_{\Sigma(t)} (E + V \times B) \cdot d\vec{L}$ , uma vez que  $v_c$  is parallel to  $d\vec{L}$ .

### Força de Lorentz

A força de Lorentz é definida como a força atuada numa carga unitaria cujo trabalho ao longo  $\Sigma(t)$  gera a diferença de potencial  $\mathcal{E}$ . Portanto, para uma carga  $q$  definimos no sistema de unidades SI:  $F := q(E + v \times B)$ : é a força necessaria para deslocar e deformar com velocidade  $v$  o circuito electrico no campo magnetico. Nota que no sistema de Gauss a mesma é  $F := q(E + v/c \times B)$ .

## Invariância de Galileo

♣ Pode-ser visto como uma definição de  $E$ : é a força atuada numa carga unitaria ao longo do circuito  $\Sigma$  e induzida por uma variação temporal do fluxo de  $B$  atravez  $\Sigma$ .

*"What led me more or less directly to the special theory of relativity was the conviction that the electromotive force acting on a body in motion in a magnetic field was nothing else but an electric field."* A. Einstein

♣ Antes da teoria relativística o requerimento principal era a invariância Galileana, ou seja a invariância das equações da física com respeito a dois observadores em movimento retilíneo (roto-translação) uniforme:  $t' = t + a, x' = Rx - v_0t + b$ . Consideremos o subgrupo  $t' = t, x' = x - v_0t$  ( $\star$ ), suficiente para identificar o efeito da velocidade nas equações.

## Invariância de Galileo e força de Lorentz -1-

### Postulado em eletromagnetismo pre-relativístico (clássico)

*A carga elétrica, como a massa, é um invariante Galileano, portanto sendo ( $\star$ ) uma transformação que preserve o volume, a densidade de carga é um invariante:  $\rho = \rho'$ .*

♣ Sendo a corrente livre definida como  $j_{\text{liv}} = \rho v$  temos

$$j'_{\text{liv}} = j_{\text{liv}} - \rho v_0.$$

♣ Sendo  $F = ma$ , a relação de base da mecânica Newtoniana, a mesma é invariante por transformação de Galileo. Portanto, sendo a aceleração e a massa invariantes, a força tem de ser invariante. Portanto, sendo a carga um invariante,

$$F' = F \Rightarrow E' + v' \times B' = E + v \times B,$$

i.e.  $E' + v \times (B' - B) = E + v_0 \times B'$ . Sendo que esta relação deve valer para qualquer  $v$  arbitrário, obtemos

$$B = B' \ \& \ E' = E + v_0 \times B.$$

## Falta de invariância de Galileo no electro-magnetismo pre-relativístico -1-

♣ Pela relação  $(x(t), t) = \psi(x'(t'), t')$ , temos pela chain rule

$$\partial'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \partial_i + \frac{\partial t}{\partial x'^j} \partial_t = \delta_{ij} \partial_i = \partial_j$$

$$\partial_{t'} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \partial_i + \frac{\partial t}{\partial t'} \partial_t = v_0^i \partial_i + \partial_t$$

♣ Lembremos as identidades

$$\text{Curl}(a \times b) = b \cdot \nabla a - a \cdot \nabla b + a \text{ div } b - b \text{ div } a \text{ e}$$

$$\nabla \cdot (a \times b) = \text{Curl } a \cdot b - a \cdot \text{Curl } b$$

▶ a lei de Gauss magnetica é invariante pois que  $\nabla' \cdot B' = \nabla \cdot B$

▶ a lei de Maxwell-Faraday é invariante pois que

$$\nabla' \times E' + \partial_{t'} B' = \nabla \times E + \partial_t B + (v_0 \cdot \nabla B + \nabla \times (v_0 \times B)),$$

sendo o termo exedente nulo pela identidade e a lei de Gauss.

## Falta de invariança de Galileo no electro-magnetismo pre-relativístico -2-

- ▶ a lei de conservação da carga **não** é invariante pois que  $\nabla' \cdot E' - \frac{\rho'}{\epsilon} = \nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon} + \nabla \cdot (v_0 \times B)$ , sendo o termo excedente  $\nabla \cdot (v_0 \times B) = -v_0 \cdot \text{Curl } B$  não nulo se  $v_0 \neq 0$ .
- ▶ a lei de Ampère **não** é invariante pois que  $\nabla' \times B' - \mu j' - c^{-2} \partial_{t'} E' = \nabla \times B - \mu j - c^{-2} \partial_t E + \mu \rho v_0 - c^{-2} (v_0 \nabla E) - c^2 \partial_{t'} (v_0 \times B)$ , sendo que  $\mu \rho v_0 - c^{-2} (v_0 \nabla E) - c^2 v_0 (\partial_t B + v_0 \nabla B) \neq 0$  se  $v_0 \neq 0$ .

### Trabalho de casa 31

Mostrar que a conservação da carga, embora proveniente das duas equações não invariantes, é invariante.

HINT: partir das expressões  $\rho' = \epsilon(\nabla' \cdot E' + v_0 \cdot \text{Curl } B')$  e  $j' = \frac{1}{\mu}(\nabla' \times B' + c^{-2} \partial_{t'} E' - (\mu \rho v_0 - c^{-2} (v_0 \nabla E) - \partial_{t'} (v_0 \times B))) = \frac{1}{\mu} \nabla' \times B' - \rho v_0 - \epsilon(\partial_{t'} (E' - v_0 \times B) - v_0 \nabla E)$  e calcular.



## PART B. Introdução à relatividade restrita

Teoria post-relativística: Newton+Maxwell+Poincaré+Einstein

## Minkowski metric $\eta$ (pseudo-Riemannian)

- ♣ Pseudo-Riemannian: symmetric quadratic form  $\eta$  on  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  s.t.  $\det(\eta) \neq 0$ . Lorentzian metric if signature =  $(+ - - -)$ .
- ♣ Let  $u, v \in \mathbb{R}^4$  and  $\eta(u, v) = u^0 v^0 - u^i v^i$ .
  - ▶ “Lorentz frame” (or “inertial Minkowskian frame”)  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  with a Lorentz metric  $\eta$  and *proper length*  $ds^2 := \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (dx^0)^2 - (dx^i)^2$  ( $\star$ ) (flat metric:  $\Gamma \equiv 0$ ).
  - ▶ A Lorentzian group are all linear maps that preserve ( $\star$ ), i.e., provides all frames where the metric takes the form ( $\star$ ).
  - ▶ Given a Minkowskian frame, a “**world line**” is a curve  $\mathcal{C}_w$  with tangent vector  $w$  s.t.  $\eta(w, w) \geq 0$ .  $\mathcal{C}_w$  is the sequence of spacetime events  $x^\alpha$  corresponding to the history of an object  $\mathcal{O}$  (example, a particle or an observer) following  $\mathcal{C}_w$ .
  - ▶ Observer (or particle) proper abscissa  $\equiv$  parameter  $s$  s.t.  $\eta(w, w) = 1$  with  $w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ ,  $x \in \mathcal{C}_w$ .  
**Time-like** curve if  $\eta(w, w) > 0$ :  $w$  is called a **time-like vector**.

## Postulates of special relativity

- ▶ **Proper frame** of an observer  $\equiv$  orthogonal Lorentz frame with time-like vector along  $\mathcal{C}_u$ .
- ▶ **Proper space**  $\equiv$  the hyperplane orthogonal to  $\mathcal{C}_u$ .

### Einstein's postulates

On June 30, 1905 Einstein formulated the two postulates of special relativity:

**1. The Principle of Relativity:** The laws of physics are the same in all inertial frames of reference.

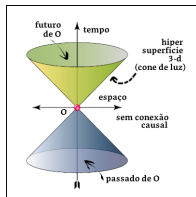
*Comment:* This was already claimed by Galileo, but Einstein did it for spacetime and inertial change of frames of Lorentzian type.

**2. The Constancy of Speed of Light in Vacuum:** The speed of light in vacuum has the same value  $c$  in all inertial frames of reference.

*Comment:* This was never violated in any physical experiment, at whatever scale.

## Proper frame, proper space, light cone and Causality -1-

- ♣ The 4-velocity  $w^\alpha$  of  $\mathcal{O}$  on  $\mathcal{C}_w$  writes in the proper frame of the observer with world-line  $\mathcal{C}_u$  as  $(w^0, w^i)$ ; hence  $(0, w^i)$  is spacial, i.e., is orthogonal to  $u$ . In its own proper frame it writes as  $(\hat{w}^0, 0)$ .
- Velocity of  $\mathcal{O}$  with respect to the observer  $\mathcal{C}_u$  is denoted by  $W^i := \frac{w^i}{w^0}$ . (in general  $Z^i := \frac{z^i}{z^0}$ )
- ♣  $\eta(w, w) = 0$  (i.e.,  $(w^0)^2 = (w^i)^2$ ) is the equation of a cone in the four-dimensional space, called the **light cone** of  $\mathcal{O}$ . It is symmetric with respect to the a point which is the Spacetime event considered. Such vector is called **light-like**, since it connects two events on the light cone of the observer.



## Proper frame, proper space, light cone and Causality -2-

- A **time-like** 4-vector  $z$  on the Minkowski space connects two events that are causally connected, i.e.  $\eta(z, z) \geq 0$ , that is, the second event is in the light cone of the first event. It can be written in any frame with components. In the frame of the observer  $C_u$ , it has components  $(z^0, z^i)$ , with vector  $(0, z^i)$  orthogonal to  $u$ .  $C_u$  might be distinct from the world line of the two events causally related.
- On the contrary, a **space-like** vector connects two events that are causally disconnected, that is, the second event is outside the light cone of the first event.
- **Causality** means that  $\eta(z, z) \geq 0$ , i.e.,  $z$  stays inside the light cone of the first (causal) event; hence  $|Z|^2 := (Z^i)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z|^2 \leq (z^0)^2$  in the frame associated to the world line  $C_w$  of the first event; in particular, the world line ( $\equiv$  causal line) or the history of an object stays inside its own light cone.

## Proper time

Generally, causally connected events are either light-like or time-like separated.

- **Future time-like** curve  $C_w$  such that  $\eta(w, w) > 0$  and  $w^0 > 0$  (**past time-like** if  $< 0$ ).
- A *null vector* is such that  $|V|^2 = 1 \Leftrightarrow \eta(v, v) = v_0^2 - (v^i)^2 = 0$ .
- ♣ Assume the existence of an “Newtonian absolute time”  $t$  and set  $x = x^\alpha = (ct, x^i)$ , with  $x^0 = ct$  and  $c := \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (see later). The curve parameter is  $t$ , hence the tangent vector is  $w^\alpha = v^\alpha = (c, v^i)$  where we call  $v^i := \frac{dx^i}{dt}$  the **Newtonian velocity** ( $i = 1, 2, 3$ ). In particular the light cone is bounded by  $w^0 = v^0 = c$ .
- ♣ The 4-derivative is

$$\partial_\mu := (1/c \partial_t, \partial_i) \quad (\operatorname{div} U = 1/c \partial_t U^0 - \partial_i U^i).$$

### Proper time

The proper time is  $\tau = s/c$ . It satisfies  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{dct}{ds} = \frac{dx^0}{ds} = u^0$ .

## Maximal Newtonian velocity and Lorentz factor

- ▶ Interval of proper time:  $d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^i)^2$
- ▶ We call  $U^i := \frac{dx^i}{d\tau} = cu^i$  the **proper velocity** ( $i = 1, 2, 3$ ).  
Proper velocity is defined as taking the distance, as measured from the laboratory frame (“inertial” frame), divided by the time as measured in the the accelerated frame.
- ▶ From  $\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}u_0 = cu_0$ , one has the 4-vector  $U = (cu^0, cu^i)$ .
- ▶ One has  $u^i = \frac{dx^i}{ds} = v^i(u^0/c)$ .

♣ But  $\eta(u, u) = (u^0)^2 - (u^i)^2 = 1 \Rightarrow (u^0)^2(1 - (|v|/c)^2) = 1$ .

- Therefore:  $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-(|v|/c)^2}}$  and  $u^i = \frac{v^i}{\sqrt{c^2-|v|^2}}$ , where the **Lorentz factor** is defined as

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-(|v|/c)^2}} = u_0 \geq 1.$$

## Maximal Newtonian and proper velocity

- Thus  $U^\alpha = \gamma(c, v^i)$ , where  $\gamma$  represents the ratio

$$\gamma \sim \frac{\text{Proper velocity } (|U|)}{\text{Newtonian velocity } (|v|)}.$$

- Other interpretation of  $\gamma$ : consider  $d\tau/dt = 1/\gamma$ : it represents the tick rate of a moving clock with respect to the coordinate time of an inertial reference frame, i.e., the faster a clock moves, the slower it ticks.

### Maximal Newtonian velocity

Causality implies  $|v| \leq v^0 = c$  (maximum Newtonian speed is  $c$ ).

### Proper velocity

The 4-velocity is  $U = (\gamma c, U^i) = \gamma(c, v^i)$ . Thus  $\eta(U, U) \geq 0 \Rightarrow |U| = \sqrt{(U^i)^2} \leq \gamma c$  which can tend to infinity as  $\gamma \rightarrow \infty$ .



## Lorentzian geodesic in Minkowski space -1-

So, in principle the proper velocity has no upper limit.

- On the other hand,  $\eta(U, U) = c^2\eta(u, u) = c^2$

$\implies |U|^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$ . Thus  $|U| \rightarrow 0$  as  $\gamma \rightarrow 1$ , i.e.,  $U \rightarrow (c, 0)$  is a light vector for the observer.

- ♣ We say that the particle  $\mathcal{O}$  follows a **time-geodesic** (or, that it is at rest) in the frame of the observer, if  $dx^i = 0 = u^i = U^i$ ; hence  $U^\alpha = (\gamma c, 0)$ .

- Since  $\eta_{ii}$  are constant ( $= (1, -1, -1, -1)$ ) the Christoffel symbols vanish and any geodesic satisfies  $x^\alpha(t) = a^\alpha t + b^\alpha$ . A time-like geodesic is such that  $a^i = 0$  (the spacial coefficients  $i = 1, 2, 3$ ); moreover  $b^\alpha = 0$  by the choice of space and time origins, i.e., the observer is at rest and only the time coordinate varies:  $x^0(t) = ct$ . Note that the proper time on a time-geodesic equals to the Newtonian time:  $\tau = s/c = x^0/c = t$  (since  $ds^2 = (dx^0)^2$  and hence  $s = x^0$ ).

## Lorentzian geodesic in Minkowski space -2-

♣ We now let the absolute time flow and search the curve that maximizes proper time interval during an absolute time interval  $\Delta t$ . Indeed, the time-geodesic  $(x^0, 0)$  is a maximum of the length action functional  $\int_t^{t+\Delta t} ds^2$ , since  $\mathcal{A}((x^0, 0)) = \int_t^{t+\Delta t} c^2 dt^2$  is a maximum because any other curve between  $(at, 0)$  and  $(a(t + \Delta t), 0)$  satisfies  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x^0) - \int_t^{t+\Delta t} (dx^i)^2$ .

♣ This gives to the so-called "twin paradox": if the second twin follows another path from the geodesic followed by the first twin (at rest) it will experience less proper time, i.e., "travelling makes you age less" (take  $dx^1 = vdt, dx^2 = dx^3 = 0$  for ex.).

- Truly, there is no paradox, since the twins do not share the same history, as the second needs a motor to stay away from the geodesic.

## Rest (inertial) mass

### Rest mass

Let  $m_0$  be the "rest mass" of a body, i.e., a constant non-negative number that depends only on the nature of its constituents (atoms, particles, quarks, etc). In some sense  $m_0$  is the sum of all masses of the constituents, provided the masses of the its components are defined.

"Rest" here means at rest with respect to an observer. It is sometimes called the inertial mass, as it measures the tendency to resist an applied force (as defined by the force divided by the acceleration of the body/particle).

- As we will see, one of the consequences of Einstein's special theory of relativity (1905) is that the mass of an object increases with its velocity relative to the observer.

## Recall of Newtonian model

♣ Let  $f$  be the sum of all forces exerted on this particle and  $v := \frac{dx}{dt}$ , the velocity of the particle with respect to an inertial frame (assumed to exist by the Newton's first law). Then Newton's second law reads

$$\frac{d}{dt}(m_0 v) = f.$$

- In a non-inertial frame (for instance, rotating ) we must add fictitious forces in the RHS (i.e. Coriolis and centrifugal).
- For  $f = 0$  the particle is in rectilinear and uniform motion, i.e.  $v = \text{cst.}$  This property holds true in any other inertial frame.
- The Newtonian energy reads

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2\right) = f \cdot v.$$

## Change of paradigm in special relativity and relativistic momentum equation

♣ Trajectory  $\rightsquigarrow$  Time-like curve in Minkowski space.

♣ No absolute time but proper time  $\tau \Rightarrow$  4-velocity  $U = \frac{dx}{d\tau}$  with  $U = cu$  and unit vector  $u$  s.t.  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ ,  $u^\alpha u_\alpha = 1$ .

♣ Acceleration  $\equiv$  derivative w.r.t. the proper time of the proper 4-velocity  $\equiv$  derivative of  $U$  in its direction, i.e.,  
 $U^\alpha \nabla_\alpha U = cu^\alpha \nabla_\alpha U = c \frac{dU}{ds} = \frac{dU}{d\tau}$ .

♣ Relativistic equation of motion are the coordinate-independent:

$$D_U(m_0 U) := U^\alpha \nabla_\alpha (m_0 U) = \frac{d}{d\tau} (m_0 U) = F, \quad (\text{REL})$$

with  $F := (F^0, F^i)$  a Spacetime 4-vector standing for the sum of all (relativistic or not) forces applied to the particle, with  $\gamma^{-1} F \rightarrow f$  as  $\gamma \rightarrow 1$  (see later).

## Constancy of rest mass and Newton's equations -1-

♣ One multiplies by  $U_\beta$  equation (REL) and gets  $U^\alpha(\nabla_\alpha m_0)U_\beta U^\beta + m_0 U^\alpha U_\beta \nabla_\alpha U^\beta = U_\beta F^\beta$ . By the compatibility of the connexion with metric,  $\nabla(U^\beta U_\beta) = \nabla c^2 = 0 = 2U_\beta \nabla_\alpha U^\beta$  and hence  $U^\alpha(\nabla_\alpha m_0) = \frac{d}{d\tau} m_0 = c^{-2} F^\beta U_\beta$ .

♣ If we assume that the rest mass  $m_0$  is constant along the trajectory, then  $F$  must be orthogonal to  $u$  (i.e.,  $\eta(F, u) = 0$ ).

♣ As a consequence, the motion equation in Special Relativity reads

$$m_0 \frac{dU^\beta}{d\tau} = m_0 U^\alpha (\partial_\alpha U^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\lambda) = m_0 (\partial_\tau U^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda) = F^\beta,$$

that is,

$$m_0 \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = m_0 \gamma^2 \frac{d^2 x^\beta}{dt^2} = F^\beta - m_0 \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda,$$

yields Newton motion equation in the limit  $\gamma \rightarrow 1$ , i.e.,  $|v|/c \rightarrow 0$ , and with  $-m_0 \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda$  the non-inertial force (e.g., Coriolis or centrifugal) that vanishes here since the metric is flat ( $\Gamma \equiv 0$ ).

## Constancy of rest mass and Newton's equations -2-

♣ On a geodesic one has:  $\partial_\tau U^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda = 0$  and hence  $F^\beta = 0$  (inertial observer). This means that free motion occurs on geodesics in Minkowski spacetime. This also means that to depart from one's geodesic, a force is required (see the twin's paradox).

♣ One also has the reverse statement: if  $\eta(F, u) = 0$  then the rest mass is constant. This gives the value of  $F^0$  since  $u_\beta F^\beta = u_i F^i + u_0 F^0 = 0$  and hence (recall that  $u_i = -u^i$ )

$$\text{The inertial mass is constant} \iff F^0 = \frac{v_i}{c} F^i.$$

♣ Original references:

- *A. Einstein, On the electrodynamics of moving bodies, Annalen Phys. 17 (1905) 891–921.*
- *A. Einstein, Does the inertia of a body depend on its energy content? Annalen Phys. 18 (1905) 639-641.*

## Newtonian approximation of relativistic momentum equation

♣ Recall  $U^\alpha = \gamma(c, v^i)$ . Define the relativistic mass as

$$m_{\text{rel}} := \gamma m_0.$$

♣ Consider now the relativistic case and rewrite (REL) as

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 U^\beta) = \frac{d}{d\tau}(m_0 \gamma(c, v^i)) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma(c, v^i)) = (F^0, F^i),$$

that is, for the spatial part, in terms of the Newtonian velocity  $v^i$ ,

$$\frac{d}{dt}(m_0 U^i) = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v^i) = \frac{d}{dt}(m_{\text{rel}} v^i) = f^i := \gamma^{-1} F^i \quad (\text{REL})',$$

with  $f$  the sum of all applied (Newtonian) forces. Hence

$F = \gamma f \rightarrow f$  as  $\gamma \rightarrow 1$ . Also, one has  $F^0 = \gamma/c(f \cdot v)$  with  $f \cdot v$  the power of  $f$ . Remark that  $F^0 \rightarrow 0$  as  $v/c \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ ).



## Equivalence of mass and energy

♣ Assuming  $|v|/c \ll 1$ , and expanding  $\gamma$  at the first order one obtains

$$m_{\text{rel}} \sim m_0 \left(1 + \frac{1}{2} (|v|/c)^2\right), \quad \text{or, } (m_{\text{rel}} - m_0)c^2 \sim 1/2 m_0 |v|^2 = E^{\text{kin}}.$$

♣ Einstein claimed that the relativistic kinetic energy of a particle of rest mass  $m_0$  and velocity  $v$  is

$$E_{\text{rel}}^{\text{kin}} = (m_{\text{rel}} - m_0)c^2 = m_0(\gamma - 1)c^2 \quad \text{with } \gamma := (\sqrt{1 - (|v|/c)^2})^{-1}.$$

• Indeed, for small velocities (i.e.  $|v| \ll c$ ) one has  $\gamma - 1 \sim \frac{1}{2} \frac{|v|^2}{c^2}$ , hence one recovers  $E_{\text{rel}}^{\text{kin}} = E^{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$ , since the higher-order terms are negligible, i.e. are  $o((v/c)^2)$ . However, in relativistic mechanics, there are higher-order terms after the first-order one  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ , classically identified as the kinetic energy of the particle. All these terms are found in the expression  $(m_{\text{rel}} - m_0)c^2$ .

## Speed of light and mass of a particle

### Speed of light

Assume that  $|v| \rightarrow c$ , then  $\gamma \rightarrow \infty$  and hence the kinetic energy  $E_{\text{rel}}^{\text{kin}} \rightarrow \infty$ . Thus it is impossible for a massive particle to reach the maximal velocity  $c$ . Thus  $c$  can only be the velocity of a massless particle with light identified by a massless particle called photon. We have seen that  $c$  is the speed of the electromagnetic fields in vacuum, thus it is called "speed of light".

### Mass of a particle and total energy

The energy  $E$  of a particle (or of a body) is defined as the sum of the kinetic, potential, radiation, thermal (dissipated), electrochemical, energies, among other sources of energy at all scales. In his 1905 cornerstone paper, Einstein defines the mass of the particle as

$$m := m_0 + \frac{E}{c^2} := \frac{\mathcal{E}}{c^2},$$

## Rest mass of a body

with  $\mathcal{E} = E + m_0c^2$  called the **total energy**.

- This formula shows that even the rest mass of a particle (of a body by extension), is not only the sum of the masses of its constituents, but really should be understood as

$$m = m_{\text{components}} + \frac{\text{kinetic} + \text{potential} + \text{other energies}}{c^2}.$$

As a consequence:

- ▶ Two bodies with the same massive constituents but different kinetic energies will have different masses (the one in motion has a higher mass)
- ▶ Two bodies with the same massive constituents but different potential energies will have different masses (the one with higher potential energy shows a higher mass)
- ▶ Two bodies with the same massive constituents but different

## Rest mass of a body

electro-chemical energies will have different masses  
(the one emitting light shows a lower mass)

- ▶ The atom of hydrogen has a lower mass than the sum of the proton and the electron separately, because when the proton and the electron are set apart (say by an infinite distance) their potential energy is 0, whereas at finite distance it is negative (as the force is attractive, and derives from a potential)

### Total and rest energy

Thus the relativistic momentum defined as

$P := m_0 U = m_0 \gamma(c, v^i)$  writes as  $P = (\frac{\mathcal{E}}{c}, p)$ , since

$P^0 = m_0 U^0 = m_0 \gamma c = mc$ , with  $p^i := mv^i$ .

From  $\eta(U, U) = c^2$ , one has  $\eta(P, P) = m_0^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2$  and hence

$$\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

i.e., a particle at rest ( $p = 0$ ) has a non-vanishing total energy

$$E_0 := m_0 c^2$$

called its **rest energy**.

• **Remark:** Einstein energy  $E_{\text{rel}}^{\text{kin}} := (\gamma - 1)m_0 c^2$  is a **relativistic kinetic energy**, since it exists only for a particle moving with velocity  $v$ . On the other hand, the particle at rest has an energy, as we have seen, equal to  $E_0$ . In the absence of other sources (potential, dissipative, electrochemical etc.) the total energy writes as the sum of these two contributions

$$E_{\text{rel}}^{\text{kin}} + E_0 = (\gamma - 1)m_0 c^2 + m_0 c^2 = m c^2.$$

Including all energies sources, one thus find the definition of the mass according to Einstein as follows:

$$m = \frac{\text{rest} + \text{kinetic} + \text{potential} + \text{other energies}}{c^2}. \quad (\text{MASS})$$

## Kinetic, rest and total energy of a particle

- Even in the non-relativistic case ( $\gamma = 1$ ) one has the rest mass

$$m_0 := \frac{\text{rest} + \text{potential} + \text{other energies}}{c^2}. \quad (\text{REST MASS})$$

- The rest energy is different from all classical energy sources known at the time. Indeed, it is not related neither to motion of the particle (as kinetic energy is) nor to some fields surrounding the particle (electro-magnetic or gravitational for instance), but only depends on the constitutive mass of the particle.
- Because of factor  $c^2$ , the rest energy of even a small amount of matter can be a significant amount of energy.
- **Remark:** It is incorrect to say that mass transforms into energy or vice-versa, but really, according to formula (MASS), mass and energy are not distinct concepts.
- ♣ Let us now prove an energy conservation relation in a relativistic framework: *potential + rel. kinetic energy = constant (=0)*.

## Total energy conservation -1-

### Theorem. Energy conservation

The relativistic kinetic energy of a particle of rest mass  $m_0$  equals to the work of the sum of all forces applied to the particle, i.e.,

$$E_{\text{rel}}^{\text{kin}} = (m - m_0)c^2 = W := \int f \cdot d\vec{L}.$$

DEM. Assume that  $x(0) = v(0) = 0$ . Por (REL)',

$$\begin{aligned} \int f \cdot d\vec{L} &= \int_0^{x_0} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v^i) dx^i = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v^i) \frac{dx^i}{dt} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v^i) v^i dt = \gamma m_0 |v|^2 \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \gamma m_0 v^i \frac{dv^i}{dt} dt = \\ &= \gamma m_0 |v(t_0)|^2 - \int_0^{v(t_0)} \gamma m_0 v^i dv^i = \gamma m_0 |v(t)|^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{v(t_0)} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - (v^i)^2/c^2}} dv^i &= \gamma m_0 |v(t_0)|^2 - m_0 c^2 \sqrt{1 - (v^i)^2/c^2} \Big|_0^{v^i(t_0)} \\ &= \gamma m_0 c^2 \left( \frac{|v(t_0)|^2}{c^2} + 1 - \frac{|v(t_0)|^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

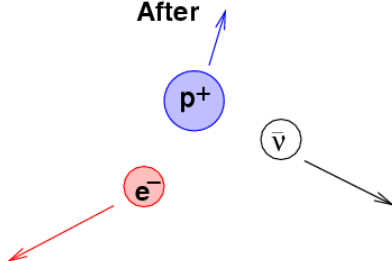
## Total energy conservation -2-

- ♣ If only internal forces are doing work (no work done by external forces), then there is no change in the total energy:  $\mathcal{E} = \text{cst.}$  This holds in particular in the absence of electromagnetic field (see the conservation law p. 237).
- The decomposition of a neutron is an example of conservation of total energy, instead of kinetic energy only, or mass only (which are not conserved, separately).

**Before**



**After**

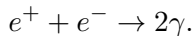




## Total energy conservation -2-

♣ The relation  $E_{\text{rel}}^{\text{kin}} = (m - m_0)c^2$  shows that the increase of mass is a source of energy (or, reversely, is due to energy sources: kinetic, potential, etc.).

But, as we have seen rest (inertial) mass is also not conserved in general, as it is not the mere sum of the masses of its components. Another example, relativistic, is the following: particles are able to be created and annihilated in special relativity, for instance, an electron and a positron can interact to produce two photons:



Here rest mass (of the system) is clearly not conserved, because both the electron and positron are massive but photons are massless (even in the absence of an electromagnetic field).

- We will see later (see p. 235) that  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \rho c E \cdot v$ .









## Anti-particles and anti-matter -1-

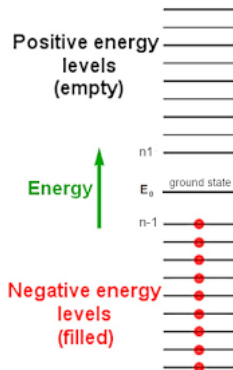
- ♣ Anti-matter was an intuition by Paul Dirac around 1935: his idea is very simple from the equation  $\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ : it says, truly  $\mathcal{E} = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$ .
- It implies that there exist particles with negative energies; but in Particle Physics one particle cannot be in two energy states (energy quantum) simultaneously. So what is the meaning of the negative energies?
- Anti-particles are thus holes of negative energy freed by particles which have now a positive energy and opposite sign (for signed particles) as, e.g., electron and positron, quark and anti-quark.
- Anti-matter was created along with matter after the Big Bang. But antimatter is rare in today's universe, and scientists aren't sure why. (Quoting <https://www.livescience.com>) .

## Anti-particles and anti-matter -2-

- **Remark:** anti-matter consists of particles that are nearly exactly the same as those that we know of in everyday life, with the charges reversed. An anti-proton is a regular proton with a negative charge; an anti-electron is a regular electron with a positive charge (also known as a positron). Anti-quarks (which make up anti-protons and anti-neutrons, when in different combinations) are the same as regular quarks with reversed charges. All anti-particles have the same mass, volume, spin, and may combine together the same way that regular particles form molecules. An entire anti-matter Earth could exist and few things would be different from our Earth except for the reversed charges, and the fact that if the anti-matter came into contact with our matter, both would annihilate and form energy. (Quoting <https://www.triumf.ca/home>)
- **Remark:** Anti-matter should not be confused with dark matter.

# Anti-particles and anti- matter -3-

Matter	Charge	Antimatter	Charge
Electron 	-1	Positron 	+1
Proton 	+1	Anti-proton 	-1
Neutron 	0	Anti-neutron 	0
Neutrino 	0	Anti-neutrino 	0



## Maxwell equations -1-: Electromagnetic tensor

- ♣ Recall the basis of the Minkowski space in the right order (see p.99):  $\Xi_4 \equiv \{dx^0 \wedge dx^1, dx^0 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^0, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1\}$ .
- ♣ Define the 2-form  $\omega_F := \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$  with  $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
- Its Hodge dual is defined as  $\star\omega_F := \frac{1}{2} F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^* dx^{\bar{\alpha}} \wedge dx^{\bar{\beta}}$  with  $dx^{\bar{\alpha}} \wedge dx^{\bar{\beta}} \in \Xi_4$  and where  $F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^* := F_{\alpha\beta} \text{sgn}(\sigma) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$  with  $\sigma := (\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  a permutation of  $(0, 1, 2, 3)$  and  $\varepsilon_\alpha$  the signature of the metric (i.e.,  $\varepsilon_i = \eta_{ii} = +1$  or  $\varepsilon_0 = \eta_{00} = -1$ ).
- **Examples:**
  - (i)  $F_{01}^* = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \text{sgn}(0, 1, 2, 3) F_{23} = +(+F_{23}) = -B_1$ , since  $dx^2 \wedge dx^3$  is in the right order, and  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ .
  - (ii)  $F_{13}^* = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \text{sgn}(1, 3, 2, 0) F_{20} = -(+F_{20}) = -F_{20} = E_2$ , since  $dx^0 \wedge dx^2$  is in the right order, and  $\varepsilon_0 = +1, \varepsilon_2 = -1$ .

## Maxwell equations -2-: Electromagnetic tensor

♣ Take  $F_{00} = 0, F_{i0} = -E_i, F_{0i} = E_i, F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k$ .

We obtain the following two tensors:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta}^* = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Maxwell equations 3-

♣ Recall the index raise  $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}F_{\lambda\nu}$ . Thus

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣ Recall  $x^\alpha = (ct, x^i)$ . Then  $\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \partial_i E_i$  and  $\partial_\alpha F^{\alpha j} = 1/c \partial_t F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -1/c \partial_t E_j + \text{curl}_j B$ .

### First Maxwell equation - differential form

•  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = (\text{div } E, -1/c \partial_t E + \text{curl} B)^\beta = (\rho, j_{\text{liv}}/c)^\beta$  with  $\rho$  the charge density and  $j_{\text{liv}}$  the electric current.

Set the flux vector  $J := (\rho, j_{\text{liv}}/c)$   
 (indicewise:  $J^\beta := \delta_{\beta 0} \rho + \delta_{\beta k} j_{\text{liv}}^k / c$ ).

## Maxwell equations -4-

### Homework 1

(i) Prove that  $\star dx^0 = \star cdt = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ,  $\star dx^1 = cdt \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ,  $\star dx^2 = cdt \wedge dx^3 \wedge dx^1$ ,  $\star dx^3 = cdt \wedge dx^1 \wedge dx^2$ .

(ii) Compute  $\star dx^\alpha \wedge dx^\beta$  and compute  $F^{\star\alpha\beta}$  and  $F_{\alpha\beta}^*$  from the knowledge of  $F$ .

HINT. Let  $\star dx^\alpha \wedge dx^\beta = (-1)^a dx^{\bar{\alpha}} \wedge dx^{\bar{\beta}}$  for some integer  $a$ . By definition of  $\star$  (i.e.,  $\omega \wedge \star dx^\alpha \wedge dx^\beta = (\omega, dx^\alpha \wedge dx^\beta) \Omega_N$ ) we have  $(-1)^a = \text{sign}(\text{perm}) \eta^{\alpha\alpha} \eta^{\beta\beta} = \text{sign}(\text{perm}) \times (\text{number of negative basis element among } dx^\alpha, dx^\beta, \text{ i.e., } \{dx^1, dx^2, dx^3\})$ .

(iii) Show that  $\star d(j^k \star dx^k) = \text{div } j$ .

### ♣ Compute

$$d\omega_F = \frac{1}{2} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\hat{\eta}} \star dx^\eta, \text{ i.e.,}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ For } \eta = 0: \quad & \frac{1}{2} \partial_l F_{ij} \epsilon_{ijl\hat{0}} \star dx^0 = \frac{1}{2} \partial_l \epsilon_{ijk} B_k \epsilon_{ijl} \star dx^0 = \\ & -\partial_l B_l \star dx^0. \quad (\text{Here, } \epsilon_{ijkl\hat{l}} = \text{sgn}(i, j, k, l)). \end{aligned}$$



## Maxwell equations -5-

- ♣ Compute (continuing), using that  $\text{sgn}(j, 0, i, l) = \epsilon_{ijl}$ ,
  - ▶ For  $\eta = l$ :  $d\omega_F^l = \frac{1}{2} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\alpha\beta l} \widehat{\star} dx^l =$   
 $\frac{1}{2} (\partial_j F_{0i} \epsilon_{j0i\widehat{l}} + \partial_i F_{j0} \epsilon_{i0j\widehat{l}} + 1/c \partial_t F_{ij} \epsilon_{0ij\widehat{l}}) \widehat{\star} dx^l =$   
 $(\partial_j F_{0i} \epsilon_{ijl} - 1/2c \partial_t \epsilon_{ijk} B_k \epsilon_{ijl}) \widehat{\star} dx^l = (\epsilon_{ijl} \partial_j E_i - 1/c \partial_t B_l) \widehat{\star} dx^l.$

### Second Maxwell equations

- $d\omega_F = -\text{div} B \widehat{\star} dx^0 - (\text{curl}_l E + 1/c \partial_t B_l) \widehat{\star} dx^l = 0 \Rightarrow$   
 $(\text{div} B, \text{curl} E + 1/c \partial_t B) = 0.$  Alternatively one also gets  
 $\partial_\alpha F_{\alpha\beta}^* = -(\text{div} B, \text{curl} E + 1/c \partial_t B) = 0.$

- ♣ Observe that  $F \rightleftharpoons F^* \Leftrightarrow \begin{cases} E \longrightarrow B \\ B \longrightarrow -E \end{cases}.$

As a consequence :

$$d \star \omega_F = \text{div} E \widehat{\star} dx^0 - (\text{curl}_l B - 1/c \partial_t E_l) \widehat{\star} dx^l.$$

- ♣ Define  $\mathcal{J} := \rho \widehat{\star} dx^0 - j_{\text{liv}}^k / c \widehat{\star} dx^k.$

- Then  $d \star \omega_F = \mathcal{J}.$

## Maxwell equations -6-

### Summary of Maxwell equations in compact form

$$(F\text{-form}) \begin{cases} \text{First: } -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \\ \text{Second: } d\omega_F = 0 \end{cases}$$

$$(F^*\text{-form}) \begin{cases} \text{First: } d\star\omega_F = \mathcal{J} \\ \text{Second: } \partial_\alpha F^*_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

$$(\text{Div-form}) \begin{cases} \text{First: } -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \\ \text{Second: } \partial_\alpha F^*_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

$$(\text{Exterior form}) \begin{cases} \text{First: } d\star\omega_F = \mathcal{J} \\ \text{Second: } d\omega_F = 0 \end{cases}$$

### Physical form:

$$\begin{cases} \text{div}E = \rho \text{ (C)} \\ \text{Coulomb's law} \\ \text{div}B = 0 \text{ (G)} \\ \text{Gauss' law} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{curl}B = \frac{1}{c}\partial_t E + \frac{j_{\text{liv}}}{c} \text{ (AM)} \\ \text{Ampère-Maxwell law} \\ \text{curl}E = -\frac{1}{c}\partial_t B \text{ (F)} \\ \text{Faraday's law} \end{cases}$$

♣ Conservation of charge:  $\partial_\beta J^\beta = \partial_t \rho + \text{div}j_{\text{liv}} = 0$  by taking the divergence of (AM) and using (C) and (G). Alternatively by Homework 1 (iii) and taking  $d\mathcal{J} = dd\star\omega_F = 0 = \partial_t \rho + \text{div}j_{\text{liv}}$ .

## Maxwell equations -7-

### Homework 2

- (i) From  $d\omega_F = 0$  show the existence of the potential  $\mathcal{A} = \phi dx^0 - A^i dx^i$  such that  $(E, B) = (-\nabla\phi - c^{-1}\partial_t A, \text{Curl } A)$ .  
 (ii) Moreover check that  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ .

### Homework 3

- (i) Show that  $-\delta\omega_F = \star\mathcal{J}$ ; (ii) Deduce the Lorenz gauge from  $\delta\mathcal{A} = 0$ ; (iii) by defining the D'Alembertian as  $\square := \delta d + d\delta$  show that the equation of  $\mathcal{A}$  is  $\square\mathcal{A} = \star\mathcal{J}$ ; (iv) write this equation in coordinates (HINT. Use the formula  $\square\mathcal{A} = \square\phi dx^0 - \square A^i dx^i$ ); (v) Deduce the equation for  $\phi$  and  $A$ .

- As a consequence if  $J$  transforms as a tensor, so does  $A := (\phi, A^i)$ , by the linearity of  $\mathcal{A} = \square^{-1}\mathcal{J}$ .

### Homework 4

Compute (i)  $I_L^1 := \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$  and  $I_L^2 := \frac{1}{4}F^{\star\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ ;

## Maxwell equations -8-

(ii) Assuming that  $A^\alpha$  is a 4-vector (i.e., a 1-tensor) show that  $I_L^1$  and  $I_L^2$  are tensor invariants, called Lorentz scalars.

- This means that under a change of inertial observer (Lorentz transformation, see later),  $I_L^1$  and  $I_L^2$  are invariant quantities (the same value for all inertial observers).

### Evolutionary form of Maxwell equations

Recall the identity  $\text{Curl Curl } B = -\Delta B + \nabla \text{div } B$ .

- Taking the curl of (AM) and using (G) and (F) one gets

$$1/c^2 \partial_t^2 B - \Delta B = \text{curl } j_{\text{liv}} \quad (\text{B - eq})$$

- Taking the curl of (F) and using (C) and (AM) one gets

$$1/c^2 \partial_t^2 E - \Delta E = -\partial_t j_{\text{liv}} - \nabla q. \quad (\text{E - eq}).$$

- ♣ In vacuum, electromagnetic waves travel at the speed of light,  $c$ .

## Maxwell equations -9- Maxwell tensor

### Maxwell tensor (or, electromagnetic stress–energy tensor)

The Maxwell tensor is defined as

$$\tau_{\alpha\beta} := -F_{\alpha}^{\lambda}F_{\beta\lambda} + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}.$$

• **Interpretation:** the electromagnetic stress–energy tensor is the contribution to the stress–energy tensor due to the electromagnetic field. The stress–energy tensor describes the flow of electromagnetic energy and momentum in spacetime. Its spatial part is

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= F_i^{\lambda}F_{j\lambda} + \frac{1}{4}\eta_{ij}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} = F_i^{\lambda}F_{j\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{ij}(B^2 - E^2) = \\ &= \eta_{ik}F^{k\lambda}F_{j\lambda} + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = -\eta_{ik}F^{k\lambda}F_{\lambda j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = \\ &= \delta_{ik}F^{k\lambda}F_{\lambda j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = F^{i\lambda}F_{\lambda j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = \\ &= F^{i0}F_{0j} + F^{ik}F_{kj} + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = E_iE_j - \epsilon_{lim}\epsilon_{ljn}B_mB_n + \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) = E_iE_j - \delta_{ij}B^2 + B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) \Rightarrow \\ &= E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 + E^2). \end{aligned}$$

## Maxwell equations -10-

### Homework 5

Show that (i)  $\tau_{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$  ( $\equiv$  the electro-magnetic energy) and  $\tau_{0i} = -(E \times B)_i$  ( $\equiv$  the Poynting vector  $S_i$ ). (ii) Show that  $\tau$  is symmetric and compute  $-\partial_\alpha \tau_{\alpha 0}$  and  $\partial_0 \tau_{0i}$ .

### Homework 6

(i) Compute

$$-(\operatorname{div} \tau)_\beta = -[(g^\gamma \partial_\gamma) \cdot (\tau_{\mu\beta} g^\mu g^\beta)] \cdot g^\beta = -\eta^{\gamma\mu} \partial_\gamma \tau_{\mu\beta} = -J^\lambda F_{\beta\lambda}$$

(use  $g^\gamma \cdot g^\mu = (g^\gamma)_\alpha \eta^{\alpha\beta} (g^\mu)_\beta = \eta^{\gamma\mu}$  and the flatness of space).

HINT. Start from  $\partial_\mu \tau_\beta^\mu$  and use Maxwell.

(ii) Show that **EM energy conservation** is obtained for  $\beta = 0$ , i.e.

$$\partial_t \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + c \operatorname{div} (E \times B) = -j_{\text{liv}} \cdot E. \quad (\star)$$

HINT. Use Homework 6 (i) and 5.

## Maxwell equations -11- Electromagnetic energy conservation

♣ By Stokes, one gets the following conservation of energy (for a vanishing Lorentz force),  $0 = \int_{[t_0, t_1] \times \Omega} \partial_\gamma \tau_\beta^\gamma dV_{ST} =$

$$\int_{\Omega(t_1)} \tau_\beta^0 dV_S - \int_{\Omega(t_0)} \tau_\beta^0 dV_S + \int_{[t_0, t_1] \times \partial\Omega} \tau_\beta^\gamma N_\gamma dS$$

♣ Let us compute the work done by the Lorentz force on a fixed wire:  $dW := dq(E + v_q \times B) \cdot \vec{dL} = dqE \cdot \vec{dL} = \rho dV E \cdot \vec{dL}$  hence  $\frac{dW}{dt} = \rho E \cdot v_q dV = j_{\text{liv}} \cdot E dV$ , since  $v_q = \frac{d\vec{L}}{dt}$  and  $j_{\text{liv}} = \rho v_q$ .

• **Interpretation:** integrating (★) and using Stokes' theorem, we see that the rate of change of EM energy,  $\frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ , in a fixed volume  $V =$  the flow of electromagnetic energy into the volume (= the flux of the Poynting vector) minus the work done by the Lorentz force (converted in non-EM energy)

• Note that the Poynting vector characterizes the EM energy flowing from or into a volume.

## Maxwell equations -12-

### Homework 7

Starting from  $\frac{dW}{dt} = j_{\text{liv}} \cdot E$  and using Ampère-Maxwell equation, recover the EM conservation law:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + j_{\text{liv}} \cdot E \right) dV = - \int_{\partial V} c(E \times B) \cdot \vec{dS}.$$

♣ Recall  $J^\beta := (\rho, j_{\text{liv}}^k) = \rho(1, v^k)$ . The second conservation law reads (from homework 6 (ii)). The 4-vector  $-J^\mu F_{i\mu}$  is called the **relativistic Lorentz force**,

$$\begin{aligned} -(\text{div } \tau)_i &= -\eta^{\gamma\mu} \partial_\gamma \tau_{\mu i} = -\partial_0 \tau_{i0} + \partial_j \tau_{ij} = -J^\mu F_{i\mu} \\ &= -\rho F_{i0} - j_{\text{liv}}^k / c F_{ik} = \rho E_i + \frac{1}{c} j_{\text{liv}k} \epsilon_{ikl} B_l. \end{aligned}$$



## Maxwell equations -13- Momentum conservation

Thus, by homework 5 (ii),

$$-(\operatorname{div} \tau)_i = \frac{1}{c} \partial_t (E \times B)_i + \partial_j \tau_{ij} = \rho (E + v_q \times B)_i.$$

• Consider Newton's law in a material volume, with the momentum  $P^i := m_0 U^i$  the stress tensor  $\sigma$  satisfying  $f_i = \partial_t P_i - \partial_j \sigma_{ij}$ , where  $f_i$  is the sum of all external forces. Summing the latter and the above, yields the generalized, relativistic, balance law, with the electromagnetic momentum  $P^{\text{EM}} := -\frac{1}{c}(E \times B) = \frac{S}{c}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_i + P_i^{\text{EM}}) - \partial_j (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) = f_i - \rho (E + v_q \times B)_i = f_i^{\text{mech}},$$

with  $f^{\text{mech}}$  the sum of all mechanical volume forces (i.e., distant) on the particle (typically, such as gravity).

## Maxwell equations -14-

- ♣ Consider a Galilean transformation  $x' = x - v_0 t$  and  $t' = t$ .
- Newton's law in an inertial frame  $F = m\ddot{x}$  is invariant w.r.t. such a transformation.
- ♣ First inconsistency: the speed of light fails to be an invariant:  $c' = c - v$ . Hence is not an upper bound (as for the time curves in the light cone).
- QUESTION: is this really an inconsistency, as its definition in EM reads  $c := (\epsilon\mu)^{1/2}$ , and thus is a constant in any reference system?

### Inconsistency of Maxwell w.r.t. Galilean transformations

- In the new inertial frame the left-hand side of Maxwell equations read (by the chain rule), for  $\phi = E, B$ :

$$(1/c^2)\partial_t^2\phi - \Delta\phi + v_0^i v_0^j \partial_i \partial_j \phi + \frac{2v_0}{c^2} \cdot \nabla \partial_t \phi$$

## Lorentz invariance -1-

♣ Instead of the Galilean transformation

$$dt' = dt \ \& \ dx'_1 = dx_1 - vdt, \ dx'_2 = dx_2, \ dx'_3 = dx_3,$$

with the **constant** velocity  $v$ , we recall the Lorentz factor

$$\gamma := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

and consider the

### Lorentz transformation (Poincaré 1905)

$$ct' = \gamma(ct - (v/c)x_1) \ \& \ x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \ x'_2 = x_2, \ x'_3 = x_3, \ \text{i.e.},$$

$$dt' = \gamma(dt - (v/c^2)dx_1) \ \& \ dx'_1 = \gamma(dx_1 - vdt), \ dx'_2 = dx_2, \ dx'_3 = dx_3,$$

with the **constant** velocity  $v$ .

• Has the key property that it preserves the Lorentzian metric, i.e.:

$$(ds')^2 = (cdt')^2 - (dx'_1)^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2(dt)^2 - dx_i^2 = (ds)^2.$$

## Lorentz invariance -2-

♣ Which transformation  $\Lambda_{\mu}^{\rho}$  satisfies the invariance property?

*Response:*

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (\Lambda_{\alpha}^{\rho} \eta_{\rho\mu} \Lambda_{\beta}^{\mu} = \eta_{\alpha\beta}),$$

i.e.  $ds^2 = dx_{\alpha} dx^{\alpha}$  and

$$(ds')^2 = (dx')_{\mu} (dx')^{\mu} = (dx')^{\rho} \eta_{\rho\mu} (dx')^{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\rho} dx^{\alpha} \eta_{\rho\mu} \Lambda_{\beta}^{\mu} dx^{\beta} = ds^2.$$

**Solutions:**

**Rotations:**

$$\Lambda = \Lambda^R = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

**Lorentz boost:**

$$\Lambda = \Lambda^B = \left( \begin{array}{cc|cc} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## Lorentz invariance -3-

- Lowering/Raising indices implies changing sign:

$$\eta_{\alpha\beta}x^\beta = x_\alpha = (ct, -x_k).$$

Lorentzian transformation (contravariant components):

$$\bar{x}^\beta = \Lambda_\alpha^\beta x^\alpha = (\gamma(ct - (v/c)x_1), \gamma(x_1 - vt), x_2, x_3).$$

- $\Lambda$  is a generalized Lorentz "rotation":  $\Lambda^T \Lambda = \text{Id}$ :

$$\Lambda_\alpha^\rho \eta_{\rho\mu} \Lambda_\beta^\mu = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda_\beta^\mu \eta^{\beta\gamma} = \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu\gamma} = \eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

- Covariant components:  $\bar{x}_\beta = \eta_{\beta\gamma} \bar{x}^\gamma = \eta_{\beta\gamma} \Lambda_\alpha^\gamma x^\alpha = (\Lambda^{-1})_{\beta\alpha} x^\alpha$ .

♣ **Main question:** how do object transform under Lorentzian transformations. Tensors are defined accordingly (covariant and contravariant components).

- **Example:** the 4-velocity  $U^\alpha$  and the momentum  $P^\alpha = mU^\alpha$  transform like vectors (i.e., contravariantly:  $\bar{U} = \Lambda U$ ).

## Lorentz invariance -5-

### Galileo-Einstein principle of invariance (or Lorentz covariance)

The laws of physics are the same in all inertial frames of reference, i.e.  $x^\beta \rightarrow \bar{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha$  (Invariance under the Poincaré group).

- Thus, to be admissible, the right and left hand-side of Maxwell's equations must transform as 4-vectors under Lorentz inertial transformations.

- Take the Lorentz transformation of  $F^{\alpha\beta}$ ,  $\hat{F}^{\rho\mu} = \Lambda^\rho_\alpha \Lambda^\mu_\beta F^{\alpha\beta}$ . In order to state that this is the expression of the EM tensor for a change of (relativistic) inertial observer, one needs to prove that  $\hat{F}$  is the solution of the EM-field under the same Lorentz transformation. Moreover  $\hat{F}_{\rho\mu} = \Lambda^\alpha_\rho \Lambda^\beta_\mu F_{\alpha\beta}$  and

$$\omega_{\hat{F}} = \frac{1}{2} \hat{F}_{\rho\mu} d\hat{x}^\rho \wedge d\hat{x}^\mu = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = \omega_F.$$

- The Maxwell system (LHS of Maxwell equations) reads under such a change of observer as

## Lorentz invariance -6-

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\gamma \hat{\partial}_\gamma \Lambda_\rho^\alpha \Lambda_\mu^\beta \hat{F}^{\rho\mu} = \Lambda_\mu^\beta \delta_{\gamma\rho} \hat{\partial}_\gamma F^{\rho\mu} = \Lambda_\mu^\beta \hat{\partial}_\rho \hat{F}^{\rho\mu}$ , where we have used the fact that  $\Lambda$  is a rotation.

### Consequences (continuation)

Hence it transforms as a 4-vector. On the other hand,  $d\omega_{\hat{F}} = d\omega_F$  and therefore the Maxwell system is (tensor) invariant under Lorentz transformations, and Einstein first postulate is in force for the relativistic Maxwell's equation.

♣ By Einstein principle of relativity, one deduces that the RHS of the equation, i.e. that the current also transforms as a 4-vector (i.e., as a 1-tensor under a Lorentz group):  $J^\alpha \rightarrow \bar{J}^\beta = \Lambda_\beta^\alpha J^\beta$ .

- Consequence:  $J^\alpha = (\rho, 0, 0, 0) \rightarrow \hat{J}^\beta = (\gamma\rho, -\gamma v/c\rho) \Rightarrow$  different observers see different charge densities ( $\rho \rightarrow \bar{\rho} = \gamma\rho > \rho$  because volume is squeezed by space contraction, see later).

Moreover  $-\gamma\rho v/c$  is the relative, relativistic current as seen by the

## Lorentz invariance -7- (non-relativistic interpretation)

- As a consequence  $A$  is a 1-tensor (under Lorentz group) by homework 3, and thus  $F$  is a 2-tensor, since  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , by homework 2.
- The main point of interpretation is that by inertial Lorentz transformations we have seen that the Maxwell's equations remain invariant and hence the meaning of  $(\hat{E}, \hat{B})$  is how the observer in the new frame describes the electric and magnetic fields identified as  $(E, B)$  by the first observer, although the meaning of the components might change in the sense that:

$$1) -\hat{E}_1 = \hat{F}^{01} = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F^{\rho\sigma} = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 F^{10} =$$

$$-E_1 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -E_1,$$

$$2) -\hat{E}_2 = \hat{F}^{02} = \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F^{\rho\sigma} = \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_2^2 F^{12} =$$

$$-\gamma E^2 + \gamma \frac{v}{c} B_3 = -\gamma (E_2 - v/c B_3),$$

$$3) -\hat{B}_3 = \hat{F}^{12} = \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 F^{\rho\sigma} = \Lambda_0^1 \Lambda_2^2 F^{02} + \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 F^{12} =$$

$$\gamma v/c E_2 - \gamma B_3 = -\gamma (-E_2 v/c + B_3), \text{ etc...}$$



## Lorentz invariance -8-: Galilean limit of Lorentz boost

emphasizing the fact that in post-relativistic physics,  $E$  and  $B$  (or rather  $H$ ) are no distinct fields but the components of one single tensor  $F$ .

♣ Summarizing: for a general space-vector  $v$  one obtains under a Lorentz transformation,

$$\hat{E} = \gamma(E + \frac{v}{c} \times B) \text{ and } \hat{B} = \gamma(B - \frac{v}{c} \times E).$$

• Classical (pre-relativistic) views are obtained as  $v/c \rightarrow 0$  and  $\gamma \rightarrow 1$  but to this aim we need to change units and work in SI, which was the setting adopted in the pre-relativistic treatment and the definition of the Lorentz force in part A. Thus we change coordinates and set  $B' = B/c$  and  $\hat{B}' = \hat{B}/c$  for which it holds  $\hat{E} = \gamma(E + v \times B')$  and  $\hat{B}' = \gamma(B' - \frac{v}{c^2} \times E)$ . In the non-relativistic model ( $v \ll c$ ) we let  $v/c \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$  and get  $\hat{E} = E + v \times B'$  and  $\hat{B}' = B'$ , that is recognized as the Galilean correction as found above.

## Lorentz invariance -9-: important consequences

### Space contraction

Consider an object  $\mathcal{O}$  on its proper frame, and consider another frame in relative motion given by a Lorentzian transformation. Then  $v$  is the relative velocity between the 2 frames. Let  $dx_1$  be its length in the proper frame that we call "rest" frame. The observer in the moving frame will measure a length given by  $dx'_1 = \gamma dx_1 - \gamma v dt$  with (assuming simultaneous measurement of the two extremities)  $dt' = 0$ , and hence  $dt = (v/c^2) dx_1$ . Thus  $dx'_1 = \gamma dx_1 - \gamma(v^2/c^2) dx_1 = \gamma^{-1} dx_1 \leq dx_1$ .

### Time dilation: "proper time = shortest time"

Consider a clock at rest on its proper frame, that is  $dx = 0$ , and consider another frame in relative motion given by a Lorentzian transformation. The observer in the moving frame will measure the time elapsed between 2 clicks. Then  $dt' = \gamma dt \geq dt$ .

## Lorentz invariance -10-: relativity of Spacetime displacement

- **Remark (Einstein notion of relativity):** the formula  $dx'_1 = \gamma dx_1 - \gamma v dt$  shows that the actual notion of displacement is in Spacetime, since  $\gamma dx_1$  is its "space"-component and  $-\gamma v dt$  its "time" component. The two are intimately related and cannot be set apart in general. For example if your car is parked, you can only speak of a time displacement of it, but if it is in motion, it shows a spacial and a temporal displacement. On the contrary, a photon, that has  $v = c$  and hence  $\gamma = \infty$  cannot, at all, have any temporal displacement: its displacement is purely spacial: if it had a watch, the watch will be stoped during its motion.

## Lorentz invariance -11-: relativity of Spacetime displacement

This new view on time and space originates from paradoxes found by lord Kelvin, elucidated later by Einstein and Minkowski precisely by inventing the four dimensional Minkowski geometry.

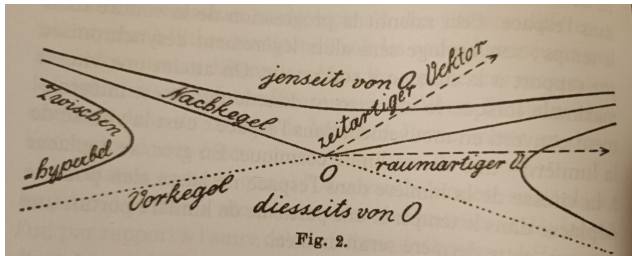


Figure: First diagram of Spacetime by Hermann Minkowski

## Lorentz invariance -12-: Lorentz force law

♣ Recall  $J^\alpha = (\rho, j_{\text{liv}k}/c)$  (note that the left subscript is contravariant, whereas on the RHS the value of the component is given with a lower indice; important here is that on the LHS one has a 4-vector); moreover,  $J_\beta = (\rho, -j_{\text{liv}k}/c) = (\rho, -\rho v_k/c)$  where  $v$  is the Newtonian velocity and  $\rho$  be the density if charge of particle submitted to an electromagnetic field. Let  $P = m_0 U$  be the momentum with  $m_0$  the rest mass and  $U^\beta = \gamma(c, v_k)$ .

♣ Then, with  $\tau$  the proper time, the momentum conservation (see (REL)') in the presence of an electromagnetic field only reads

$$\partial_\tau P^\beta = F^\beta = \gamma f^\beta,$$

where the Lorentz force  $f$  (see p. 223) equals to

$f^\beta = \eta^{\alpha\beta} J^\mu F_{\alpha\mu} = J_\mu F^{\beta\mu}$  (check this!), or  $F^\beta = \rho F^{\beta\nu} U_\nu$  (check this too!), i.e., indicewise, for  $\beta = j$ ,

$$\partial_\tau P^j = \gamma(J_0 F^{j0} + J_k F^{jk}) = \rho\gamma(E_j - v_k F^{jk}) = \gamma\rho(E_k + (v \times B)_j).$$

## Lorentz invariance -13-: Constancy of the rest mass

♣ Now for  $\alpha = 0$ , one obtains

$$\partial_\tau P^0 = c \partial_\tau (m_0 \gamma) = \gamma J_\mu F^{0\mu} = \rho \gamma (-v_k F^{0k}) = \gamma \rho E \cdot v.$$

- Assume that  $v$  is constant (and hence also  $\gamma$ ), then  $\partial_\tau(m_0) = \rho E \cdot v/c$ . Therefore, in the non-relativistic limit  $v/c \rightarrow 0$  one obtains the constancy of the rest mass, whereas for relativistic velocities ( $v \sim c$ ) the rest mass can vary with time as soon as the electric field and the particle velocity are not orthogonal.
- Physically  $m_0$  can be modified by chemical reactions (molecules) or absorption of photons (atoms).
- ♣ The relation  $\partial_\tau P^0 = \gamma \rho E \cdot v$  implies that  $\partial_\tau (mc^2) = \gamma \rho c E \cdot v$ , yielding

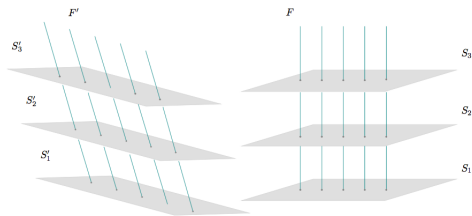
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \gamma \rho c E \cdot v,$$

i.e., the total energy is not conserved as soon as  $E \cdot v \neq 0$ .

## Lorentz invariance -14-: Invariance of the speed of light

- ♣ Einstein's second postulate claims that the speed of light  $c$  is the same in any inertial Spacetime frame.
  - One first argument is saying that by its very definition,  $c = \sqrt{\epsilon\mu}$  and is thus a constant.
  - But nevertheless  $c$  is, as we have seen, the speed of some massless particles, as photons, and by a change of inertial frame, the relative velocity should be added or subtracted to  $c$ .
- ♣ Again, complete understanding comes from the Lorentz transform: take for instance  $dt' = \gamma(dt - (v/c^2)dx_1)$  &  $dx'_1 = \gamma(dx_1 - vdt)$ ,  $dx'_2 = dx_2$ ,  $dx'_3 = dx_3$ , and compute
 
$$\frac{dx'_1}{dt'} = \frac{\gamma(dx_1 - vdt)}{\gamma(dt - (v/c^2)dx_1)} = \frac{(\frac{dx_1}{dt} - v)}{(1 - (v \frac{dx_1}{dt} / c^2))} \quad (\star).$$
 Now if  $\frac{dx_1}{dt} = c$  one has
 
$$\frac{(c - v)}{(1 - (v/c))} = c.$$
 Thus  $\frac{dx_1}{dt} = c$  if and only if  $\frac{dx'_1}{dt'} = c$ .
  - Side observation: from  $(\star)$ , relativistic relative velocities do not add simply as in Newtonian mechanics (they do only as  $\gamma \rightarrow 1$ ).

## Further thoughts on Frames of references



- ♣ The inertial frames  $F$  and  $F'$  are in relative motion, and therefore, as the Lorentz transformations indicate, they disagree on simultaneity.  $F$  and  $F'$  thus determine distinct decompositions of Spacetime into instantaneous spaces,  $S$  and  $S'$ , respectively.
- ♣ Moreover, the distances between points in space can only be determined if it is possible to determine which events are simultaneous, a fact which is not possible in Special relativity. Therefore, Einstein 1905 paper begins with a critical analysis of the entire notion of a frame of reference...



## PART C. Introdução à relatividade geral

Teoria post-relativística: Newton+Maxwell+Poincaré+Einstein

## PART C. Introduction to General relativity

♣ Main thoughts by Einstein (from Special Relativity): from Galileo Galilei we know that all bodies fall on the same manner, hence the concept of force (gravitational force) is presumably not the best one to understand trajectories. It is indeed preferable to talk of acceleration of a body: all bodies have the same acceleration,  $g$ , and thus the same trajectory. But it is equivalent to consider the bodies are fixed and the Earth is accelerating upwards. Thus the right notion is that of accelerated frame, i.e., of non-Galilean observers.

### Einstein's Equivalence Principle

A gravitational field is equivalent to the absence of such field but the existence of an accelerated motion of one's frame. As a consequence inertial frames are to be avoided, while the only frames of interest are accelerated.

♣ **Consequence:**  $ds^2$  is conserved under Galilean/Lorentz transformations only. If not, then  $ds^2$  changes, i.e. the geometry much change.

♣ Main ideas:

- From Minkowski (i.e. a given  $\text{diag}(1 - 1 - 1 - 1)$ - metric  $\eta$ ) to Lorentz metric (a metric  $g$  with Lorentzian signature)
- Spacetime as a dynamical property ( $\eta$  is one of the unknowns)
- Trajectories driven by curvature
- Mass creates curvature.

• Main question: what is the curvature of our room knowing that the earth is beneath us?

♣ Einstein introduced a mathematical object for the description of curvature, called  $G$  and related to the Ricci curvature.

♣ On the other hand, he introduces the Energy-momentum tensor  $T$  which describes the content of Spacetime (here Particles Physics enters the game).

♣ Einstein postulated a linear law given by the fundamental equation:  $G = \frac{8\pi G_N}{c^4} T$ . The proportionality constant  $G_E := \frac{8\pi G_N}{c^4}$  is such that Newton's setting is retrieved in a weak field. The gravitational constant value is  $G_N = 6,67259 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

♣ This revolution in Physics is also a revolution of Thought:

- ▶ Spacetime is now a phenomenon instead of a container:  
Spacetime is a physical **dynamical** object
- ▶ Thus there is a conceptual unification between Container and Content : both are properties, therefore related by an equation, an evolution law, the **Einstein Field Equations**.

♣ We observe that Spacetime is a "rigid" medium because of  $c^4$  at the denominator ( $G_E \sim 2.07710^{-43} \text{ N}^{-1}$ ).

• **Example:** for Newton, the moon turns around the Earth because of gravitational attraction. For Einstein, instead, the moon goes straight in a curved Spacetime itself deformed by the mass of the Earth.

♣ **Note:** in geometrized unit system, either  $G_N = 1$ : this means that inertial and gravitational masses are igual, or  $G_E = 1$ .

## Planck units

Four universal constants have, in the so-called Planck convention, a numerical value equals to 1: the speed of light in vacuum,  $c$ , the gravitational constant,  $G_N$ , Planck and Boltzmann constants.

As a consequence natural units for length, time, mass, temperature, length, momentum, energy are obtained.

♣ Summarizing:

**Newton:** Forces in a given 3d space and with a universal time.

**Einstein:** Absence of forces in a dynamical 4d Spacetime.

- The solutions are the same for the motion of our usual planets. But some phenomena are only describes and understood under the General Relativity standpoint.

♣ **Space and Spacetime:** instantaneous 3-spaces are obtained by global foliation of Spacetime.

♣ Space is **not an absolute notion**, because according to SR and GR, the length, mass and time are relative. Since length is relative, the space cannot be absolute. The distance between two points in space is different for different observers, the distance depends on the velocity as well as the mass of the observer.

♣ Einstein was the first (in his 1911 paper) to predict that the velocity of light would be **reduced** by a gravitational potential (i.e., a negative difference of potential), namely  $c_{\text{glob}} = c \left( 1 + 2 \frac{\Phi_G}{c^2} \right)$  (valid in a **global** reference frame). Thus, as opposed to vacuum (SR) the speed of light is not a constant in GR. However locally  $\Phi_G$  is constant and can be taken zero: thus  $c = c_{\text{loc}} = \text{cst}$ .

♣ Main Einstein references:

- ▶ *On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light, (1911)*
- ▶ *The Speed of Light and the Statics of the Gravitational Field (1912)*
- ▶ *On the Theory of the Static Gravitational Field (1912)*
- ▶ *Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity (1915)*

## Historical note

- ♣ Ricci and Levi-Civita had introduced the quadratic form  $ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$  which we know call the length element.
- ♣ Einstein had considered in Special Relativity the Minkowski metric  $ds^2 = cdt^2 - dx_i^2$  with  $c$  the constant value of the speed of light in vacuum. It is called the (spacetime-) "interval".
- ♣ While thinking of extending Special Relativity to Gravitation, Einstein first considered the modified interval  $ds^2 = c'(x_1, x_2, x_3)dt^2 - dx_i^2$  with  $c'$  a space-dependent light speed modified by gravitation.
- ♣ With Grossmann he realized the power of tensor and differential geometry calculus, and understood that as soon as one needs to consider non-inertial observers, thus avoiding Lorentz invariance (which is constant and inertial) the SR interval had to be replaced by the general (valid for all coordinates) interval  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ , where the metric  $g_{ij}$  accounts for both inertia and gravitation.



## General relativity law of motion

### Einstein weak equivalence principle

In General Relativity, massive pointlike objects in free fall are assumed to follow timelike geodesics of the metric, and their equations of motion are therefore independent of their mass, reading, in arbitrary coordinates,

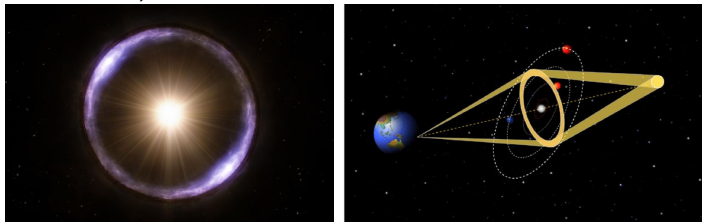
$$\frac{dU^\beta}{d\tau} = U^\alpha (\partial_\alpha U^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\lambda) = \frac{d^2 U^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda = 0,$$

with  $\tau$  the proper time. The connection  $\Gamma$  of the metric represents in the coordinates  $x^\beta$  **both gravitation and inertia**.

♣ Experimental confirmation of the theory: the advance of the perihelium of planet Mercury elliptic orbit was the first spectacular confirmation of Einstein General Relativity.

## Einstein rings

♣ Another recent confirmation: "NASA's James Webb Space Telescope has snapped a perfect shot of an "Einstein ring." The stunning halo is the result of light from a distant galaxy passing through warped Spacetime surrounding another galaxy aligned between the distant light source and Earth." (livescience.com on 02.09.2022)



The two galaxies are aligned and the far one should not be visible unless its light doesn't go "straight", because of ST curvature.

## Einstein field equations -1-

### Einstein field equations

Consider the Ricci tensor  $R_{ij}$  and the Einstein tensor  $G_{ij} = S_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}$ . The Einstein equations obtained by himself and Marcel Grossmann in 1915 read

$$S_{ij} = G_E T_{ij},$$

where  $T_{ij}$  is the "source" tensor called is the **stress–energy** symmetric 2-tensor, supposed to represent the pointwise value of the density of all the energies, momenta and stresses of the matter and classical field sources present in the Spacetime (i.e., all non-graviational energies, momenta and stresses).

♣ Reference: *Einstein & Grossmann.: Outline of a Generalized Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation, Zeitschrift für Mathematik und Physik 62 (1913): 225–244, 245–261.*

## Einstein field equations -2-

♣ We have  $G_E := \frac{8\pi G_N}{c^4}$ . Physicists take  $G_E = 8\pi G_N$  with  $G_N$  the gravitational constant. One can choose units such that either  $G_N = 1$  or  $G_E = 1$ . We take  $G_N = 1$  to have equality of inertial and gravitational masses.

### Homework 8 -a-

Show that if  $n + 1 > 2$  one has  $R_{ij} = G_E \rho_{ij}$ , with

$$\rho_{ij} = T_{ij} + \frac{T_k^k}{n-1} g_{ij}.$$

- Observe the similarities and differences between the law  $R_{ij} = G_E \rho_{ij}$ , and Newton's law  $-\Delta U = 4\pi \rho_G$  with  $\rho_G$  the "gravitational mass density" of the sources: the similarity is that it consists of a linear second-order differential equation, the differences are (i)  $R_{ij}$  is a second-order tensorial differential operator, whereas the Laplacian  $\Delta$  is scalar; (ii) the scalar gravitational mass density is replaced by a symmetric stress-energy-like tensor.

## Einstein field equations -3-

♣ It is a modelling problem to find the right tensor  $T$  for a given problem. However it should always be divergence-free.

### Conservation law

We have proven that from the contracted differential Bianchi identity, one has  $\nabla_j^\Gamma S_{ij} = 0$ , therefore necessarily:

$$\nabla_j^\Gamma T_{ij} = 0.$$

Moreover  $T_{ij}$  is a symmetric tensor. By the weak equivalence principle  $\Gamma$  takes into account both gravitational and inertial effects.

- In the case of dust (also called pure matter) one has  $T_{ij} = rU_iU_j$  with  $r$  the rest mass density; in the case of a perfect fluid one has  $T_{ij} = \mu U_iU_j + p(g_{ij} + U_iU_j)$ .  
For an electromagnetic field  $T_{ij} = \tau_{ij}$ .

## Einstein field equations -4-

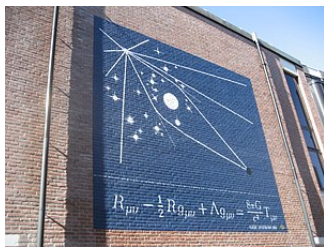
♣ It is known that the only tensorial operator for a metric  $g$  on a four-dimensional Spacetime that is second-order and quasilinear is the Einstein tensor with the possible addition of a linear term  $\Lambda g$ , with  $\Lambda$  an arbitrary constant.

### Cosmological constant

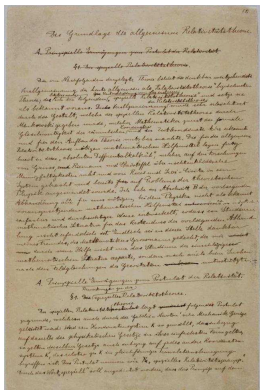
The Einstein equations with cosmological constant  $\Lambda$  read

$$S_{ij} + \Lambda g_{ij} = G_E T_{ij} \quad (\star)$$

- Right: Picture on a wall at Leiden university



# Einstein field equations -5-



## Homework 8 -b-

Show that equation (\*) can be written as  $R_{ij} = \rho_{ij}$  with  $\rho_{ij} = T_{ij} + \left(\frac{d}{d-2}\Lambda + \frac{T_k^k}{d-2}\right)$ .

- Left: first page of Einstein's 25th November 1915 paper on General Relativity: *The Field Equations of Gravitation*.

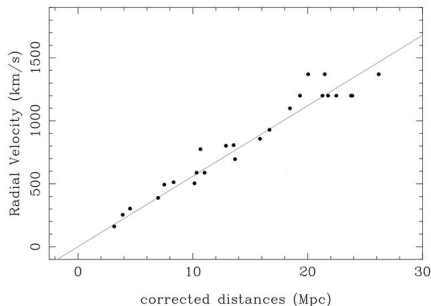
## Einstein field equations -6-

- Einstein had doubts about this linear terms and removed it from his theory. The value of the cosmological constant seems to have varied at different epochs of the Universe, but is very small currently. Modern treatments tend to include it as a source, i.e., energy-momentum tensor of the vacuum generated by quantum-particle processes:  $S_{ij} = G_E T_{ij} - \Lambda(\phi)g_{ij}$  with  $\text{PDE}(\phi) = 0$ .
- Einstein did introduce the cosmological constant because he believed that the Universe was static, a fact that seemed false (expansion or contraction) solving the equations without this term. But, he was eventually convinced by Lemaître and Hubble who believed and measured (see figure) that the Universe was in expansion.
- Tough, with a significative nuance: for Hubble the galaxies were simply moving away from each other, whereas for Lemaître



## Einstein field equations -7-

the Universe itself was in expansion, thereby carrying the Galaxies with him. The Hubble-Lemaître law shown on the figure represents radial recession velocity vs. distance from observer.



- **Remark/paradox:** The light travels at the speed  $c$  in space, but Space (i.e., the Universe) is expanding (see later), so light can travel faster than  $c$  as carried by the space expansion itself. As a consequence the observable universe is 13.8 billion years old, but has radius  $96c$  billion-year.

## Einstein field equations -8-

♣ **Historical note:** Interestingly, five days before Einstein submitted his 25th of November paper, Hilbert had submitted a paper, *The foundations of physics*, which also contained the correct field equations for gravitation. Notably Hilbert's paper contains some important contributions to relativity, which were not found in Einstein's work. Hilbert's paper contains the hope that his work will lead to the unification of gravitation and electromagnetism, which is essentially unified field theory; something Einstein would spend the second half of his life pursuing, quite unsuccessfully. Hilbert knew of Einstein's Relativity work, also had correspondence with him, and had even invited Einstein to Göttingen to deliver a week of lectures on General relativity in early 1915, yet Hilbert fully credited Einstein as the originator of the theory and no public priority dispute concerning the field equations ever arose between the two men during their lives. (Quoted from *Estelle Asmodelle*).

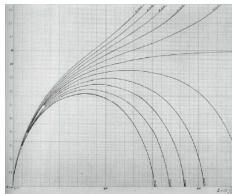
## Einstein field equations -9-

♣ **Physical comment:** Even in the vacuum case ( $T_{ij} = 0$ ), there exist many Einsteinian spacetimes. They have underlying manifolds with different topologies, as well as different metrics on each of these manifolds. A great number of exact solutions of Einstein equations possessing isometry groups have been constructed, in vacuum or with various sources. Some of these Spacetimes have (at least at present) a purely mathematical interest, but a few of them are models of known physical situations, at different time or space scales. There is no universal Einsteinian Spacetime as a model for reality— this is in disagreement with Newton's concepts, and also with Special Relativity. (from *Y. Choquet-Bruhat*).

♣ **Note (the rôle of Abbé Georges Lemaître):** the belgian priest and physicist abbé Georges Lemaître was one of the few who understood Relativity at the time, together with e.g. Sir Arthur Stanley Eddington with whom Einstein was in constant debate.

## Einstein field equations -10-

First, G. Lemaître had such an insight into Einstein's theory that he understood, most probably before anybody else, the importance of the cosmological constant, as associated to dark energy and the expansion of the Universe. Indeed, he suggested that the constant had to be present as a source of energy of the empty Spacetime and represented a stress or "tension" term that plays the rôle of a negative Gravitation, i.e., eventually making plausible an Universe in expansion, as Gravitation is balanced by this term. Second, he also proposed various shapes of the universe (see below: Universe radius vs. cosmological constant for a space of positive curvature).



- Main paper (1927): "A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-Galactic Nebulae"

## Einstein field equations -11-

### Asymptotically Euclidian Riemannian manifold

The "end" is a manifold asymptotically diffeomorphic to the exterior of a ball in  $\mathbb{R}^3$ .

A Spacetime manifold is said asymptotically Euclidian if the Riemannian curvature induced by the metric tends to be flat (zero) far away from the studied system. Indeed, as we have seen in the expansion of the metric by means of the Riemann tensor and its derivatives:  $g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(|R_{ij}|)$  and  $\partial^{(k)}g_{ij} = \mathcal{O}(|R_{ij}|^{-|k|+1})$ .

### Newtonian approximation

The Lorentz metric we consider is a "small" variation of the Minkowski metric  $-dx_0^2 + dx_i^2$ , i.e.,  $g_{00} = -1 + h_{00}$ ,  $g_{0\alpha} = h_{0\alpha}$  and  $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ , with  $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . We assume that  $h_{ij} \ll 1$ . We assume the masses moving slowly and hence  $h_{i\alpha} \ll h_{00}$  and  $\partial_0 h_{\alpha\beta} \ll \partial_i h_{\alpha\beta}$ . Moreover  $\partial_i h_{\alpha\beta} \sim h_{\alpha\beta}$ .

## Einstein field equations -12-

As a consequence  $R_{00} \sim \partial_i \Gamma_{00}^i \sim -\frac{1}{2} \Delta h_{00}$  to be compared with another Poisson equation, namely Newtonian gravitation equation  $\Delta U = -4\pi G_N \rho$  with  $\rho$  the mass density of the sources.

- Consider the case where the most important energy source is pure matter, i.e. the stress–energy tensor is of the following form, with  $\mu$  some positive scalar function and  $U$  the unit flow vector:  $T_{\alpha\beta} = \mu U_\alpha U_\beta$ . Take  $c = 1$  then  $T_{i\alpha} \ll T_{00} = 1$  and we have  $\rho_{00} = G_E (T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T) \sim \frac{1}{2} G_E \mu$ . This is Newton equation with  $h_{00} = 2U$ ; we deduce the formula  $G_E = 8\pi G_N$ .

- Let us consider now Einstein law of motion:

$\frac{dU^\beta}{d\tau} = \frac{d^2 U^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta U^\alpha U^\lambda = 0$ . For small velocities,  $U^0 \sim 1$  and  $U^i \sim 0$ , and hence  $\frac{d^2 x^i}{(dx^0)^2} \sim -\Gamma_{00}^i \sim \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$ . Again putting  $h_{00} = 2U$  yields Newton law of motion  $\frac{d^2 x^i}{(dx^0)^2} = \frac{\partial U}{\partial x^i}$  in first approximation and for small velocities.

## Einstein field equations -13-

### General covariance

Einstein Field Equations are tensor equations and hence invariant under the **class of diffeomorphisms**, i.e., under general non-constant and nonlinear change of coordinates, as opposed to Newtonian mechanics and Special Relativity, where the inertial coordinate systems—the Galilean and Lorentz transformations, respectively—correspond to symmetry transformations of uniform Spacetime. General covariance is required in order to consider accelerated frames which themselves are required by the Equivalence principle. Mathematically, what this means is that coordinate transformations are no longer required (as in the affine spaces) to take straight lines to straight lines, and to preserve further metrical structures, but only to preserve the smoothness of curves (i.e. their differentiability). (From *Stanford Encyclopedia of Philosophy*).

## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -1-

### Variation

Let us vary a given metric  $g_{ij}$  in the direction  $h_{ij}$  and obtain  $g^s = g + sh$ . Let us consider a functional  $\mathcal{F}(g)$ . Its first variation is defined as

$$\delta_h \mathcal{F} = \partial_s \mathcal{F} := \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{F}(g_{ij} + sh_{ij})|_{s=0}$$

In particular  $\delta_h g_{ij} = h_{ij}$ .

### Normal (or geodesical) coordinates

At any point, say 0, there exists coordinates such that  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ,  $\partial_k g_{ij}(0) = 0$  e  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ .

- For simplicity we write  $\nabla_i^\Gamma = \nabla_i$ .



## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -2-

### Homework 10

Prove the identities (i)  $\delta_h g^{ij} = -h^{ij}$  (●) (HINT: compute first  $0 = \partial_s(g^{ik}g_{kl})$ ); (ii)

$\delta_h \Gamma_{ik}^l = \partial_s \Gamma_{ik}^l(0) = \frac{1}{2}g^{lm} (\nabla_i h_{kl} - \nabla_k h_{im} + \nabla_m h_{ik})$  (●●) (HINT: use (●) and the properties of normal coordinates); (iii)  $\delta_h R_{ijk}^l =$

$\partial_s R_{ijk}^l = \frac{1}{2}g^{lm} (\nabla_j \nabla_k h_{im} - \nabla_j \nabla_m h_{ik} - \nabla_i \nabla_k h_{jm} + \nabla_i \nabla_m h_{jk} + \nabla_j \nabla_i h_{km} - \nabla_i \nabla_j h_{km})$  (●●●) (HINT: express the Riemann tensor in normal coordinates and derive using previous two identities).

### Homework 11

Prove the identities (iv)  $\delta_h R_{qlk}^i := \nabla_l(\delta_h \Gamma_{qk}^i) - \nabla_k \delta_h \Gamma_{ql}^i$  (◇) (HINT: take the first variation of the expression defining the Riemann tensor and consider normal coordinates);

## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -3-

$$(v) \delta_h R_{qk} = \nabla_i (\delta_h \Gamma_{qk}^i) - \nabla_k \delta_h \Gamma_{qi}^i \quad (\diamond \diamond); \quad (vi)$$

$$\delta_h R = -R_{qk} h^{qk} + \nabla_l \left( g^{qk} \delta \Gamma_{qk}^l - g^{ql} \delta \Gamma_{qi}^i \right) \quad (\diamond \diamond \diamond).$$

♣ Let  $dV_g := \sqrt{\det(g)} dx$  be the volume element of our Einsteinian manifold. We define  $\text{tr}_g A := g^{ij} A_{ij} = \text{tr} (g^{-1} A)$ .

**Lema: variation of the volume element**

We have  $\delta_h dV_g = \frac{1}{2} \text{tr}_g h dV_g$ .

DEM. From the Lemma p.21,  $\delta_h \det(g) = \det'(g)[h] = \text{tr} ((\text{adj } g) h) = \det(g) \text{tr} (g^{-1} h) = \det(g) \text{tr}_g h$ . Therefore,

$$\delta_h dV_g = \delta_h \sqrt{\det(g)} dx = \frac{\delta_h \det(g)}{2\sqrt{\det(g)}} dx = \frac{1}{2} \text{tr}_g h \sqrt{\det(g)} dx.$$

proving the thesis. QED ■

## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -4-

### Einstein-Hilbert functional

The Einstein-Hilbert functional on the Einsteinian manifold  $\mathcal{M}$  is

$$\mathcal{E}(g) := \int_{\mathcal{M}} R(g) dV_g.$$

### Lema: variation of Einstein-Hilbert

Assume that  $h = \nabla h = 0$  on  $\partial\mathcal{M}$ , then  $\delta_h \mathcal{E}(g) = - \int_{\mathcal{M}} h^{ik} S_{ik} dV$ .  
Thus  $\nabla \mathcal{E}(g_{ij}) = -S_{ij}$ .

DEM. From the previous identities and results,

$\delta_h \mathcal{E} = \int_{\mathcal{M}} (\delta_h R dV_g + R \delta_h dV_g) = \int_{\mathcal{M}} [-h^{ij} R_{ij} + \nabla_l \mathcal{A}^l + (R \frac{1}{2} \text{tr}_g h)] dV_g = \int_{\mathcal{M}} [\nabla_l \mathcal{A}^l + h^{ij} (-R_{ij} + \frac{1}{2} R \text{tr}_g h)] dV_g$ . The thesis follows from Stokes theorem and the assumption. QED ■

## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -5-

Assume that  $t \mapsto g_{ij}(t)$  is a unknown metrics depending of some time. The  $L^2$ -gradient flow of  $\mathcal{E}$  is

$$\partial_t g_{ij} = -\nabla \mathcal{E}(g_{ij}) = R_{ij} - \frac{1}{2} R \delta_{ij}.$$

It turns out that this flow is not parabolic and is not solvable even for short times. However the so-called "Ricci flow"

$$\partial_t g_{ij} = R_{ij}$$

is parabolic and solvable.

## The Einstein-Hilbert functional and the variational formulation of General relativity -6-

### Einstein-Hilbert functional with sources

The Einstein-Hilbert functional on the Einsteinian manifold  $\mathcal{M}$  is

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(g, \phi) := \int_{\mathcal{M}} [R(g) + L(g, \phi)] dV_g.$$

Its variation reads

$$\delta_h \mathcal{E}_{\text{tot}}(g, \phi) = \int_{\mathcal{M}} \{ [S^{ij}(g) - M^{ij}(g, \phi)] h_{ij} - \Phi(g, \phi) \cdot \delta\phi \} dV_g,$$

where  $M$  coincides (up to a constant) to the stress-energy tensor.

## Introduction to cosmology

We consider the Universe after the transition from quantum cosmology to classical astrophysics, with the Heisenberg cut located at a suitable cosmic time ( $\sim 10^5$  years after the Big Bang).

♣ **Cosmological principle:** is the notion that spatial distribution of matter in the universe is homogeneous and isotropic when viewed on a large enough scale, since the forces are expected to act uniformly throughout the universe, and should, therefore, produce no observable irregularities in the large-scale structuring over the course of evolution of the matter field that was initially laid down by the Big Bang. Indeed, astronomer W. Keel explains: "The cosmological principle is stated formally as "**viewed on a sufficiently large scale, the properties of the universe are the same for all observers.**" This amounts to the strongly philosophical statement that the part of the universe which we can see is a fair sample, and that the same physical laws apply throughout."

## Friedmann-Lemaître solution -1-

♣ In any dimension, it can be proven that the curvature tensor is isotropic iff  $R_{ijhk}(x) = K(x)(g_{ih}g_{jk} - g_{jh}g_{ik})(x)$ . Let us focus on the "spatial" part of the metric (i.e.,  $t$  is frozen),  $g_{(3)}^{hi}$ . The "spatial" part of the Ricci tensor reads  $R_{jk}^{(3)} = g_{(3)}^{hi} R_{ijhk}^{(3)} = 2K g_{jk}^{(3)}$ , the scalar curvature is  $R = 2K$ , i.e.  $K$  is the Gauss curvature; moreover,  $S_{ij}^{(3)} = K g_{ij}^{(3)}$ . The Bianchi identity  $\nabla_j^{(3)} S_{ij}^{(3)} = 0$  yields  $K = \text{cst.}$  The 3d space is said **isotropic and homogeneous with constant curvature**. Going back to the 4d Spacetime, assuming space isotropy thus means that  $K$  is only a function of  $t$ .

### Robertson-Walker Spacetimes

The solution to  $S_{ij}^{(3)} = K(t)g_{ij}^{(3)}$  reads ( $a^2 = |K|^{-1}$  if  $K \neq 0$ )

$$ds_{(4)}^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) ds_{(3)}^2, \quad ds_{(3)}^2 = \gamma_{ij}^\varepsilon ds^i ds^j.$$

with  $t \mapsto a(t)$  the "scaling factor". The spatial part of the metric is

## Friedmann-Lemaître solution -2-

obtained as the spherical metric  $ds_{(3)}^2 = \frac{dr^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2(\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2)$  with  $\varepsilon = \text{sign}(K)$ . Thus three Universes are allowed: (i) flat ( $\varepsilon = 0$ ), (ii) spherical ( $\varepsilon = +1$ ), and (iii) hyperbolic ( $\varepsilon = -1$ ).

- The Universe is in expansion if  $a' > 0$ . The Big Bang occurred at  $t = 0$  by convention and then expanded as a Robertson-Walker Universe. The observation of *redshift* instead of *blueshift* is an indication that at present time  $t$  the universe is in expansion. Recent observations also tend to validate the assumption of accelerating expansion,  $a''(t) > 0$ .

- **Remark:** in this model, time, as opposed to space, is not expanding, since  $dt^2$  is multiplied by a constant.

### Redshift vs. blueshift

Redshift and blueshift describe the change in the frequency of a light wave depending on whether an object is moving towards or



## Friedmann-Lemaître solution -3-

away from us. When an object is moving away from us, the light from the object is known as redshift, and when an object is moving towards us, the light from the object is known as blueshift. Astronomers use redshift and blueshift to deduce how far an object is away from Earth, the concept is key to charting the universe's expansion. Quoted from <https://www.space.com>

### The Friedmann-Lemaître Cosmos

The Friedmann-Lemaître Cosmos is based on a Robertson–Walker metric and the assumption of a Universe modelled as a perfect fluid with small velocities with a given mass density  $\rho$  and pressure  $p$ . Its stress-energy tensor reads (with  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  and for some metric  $\gamma_{ij}^\varepsilon$ , and putting  $c = 1$ ):

$$T_{00} = \mu \text{ (energy)}, \quad T_{ij} = pa^2 \gamma_{ij}^\varepsilon \text{ (stress)}, \quad T_{i0} = 0 \text{ (momentum)}.$$

## Friedmann-Lemaître solution -4-

As a consequence, the Christoffel symbols are found as

$$\Gamma_{ij}^0 = -1/2 \partial_0 \gamma_{ij}^\varepsilon = aa' \gamma_{ij}^\varepsilon, \quad \Gamma_{0i}^j = a^{-1} a' \delta_i^j, \quad \Gamma_{jh}^i(\gamma^\varepsilon),$$

and the Ricci tensor of  $ds^2$  reads (in a appropriate coordinate system where  $|K| = 1$ )  $R_{00} = -3a^{-1}a''$ ,

$R_{ij} = (2\varepsilon + aa'' + 2(a')^2)\gamma_{ij}^\varepsilon$ ; moreover the scalar curvature is

$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = -3a^{-1}a'' - a^{-2}\gamma_\varepsilon^{ij}(2\varepsilon + aa'' + 2(a')^2)\gamma_{ij}^\varepsilon$

$= -6a^{-2}(\varepsilon + aa'' + (a')^2)$ . Thus, the 00-component of Einstein tensor reads (putting  $G_E = 1$ )  $S_{00} = 3a^{-2}(\varepsilon + (a')^2) =$

$T_{00} - \Lambda g_{00} = \mu - \Lambda$ . Therefore  $\frac{\varepsilon + (a')^2}{a^2} = \frac{\mu - \Lambda}{3}$ . In physical units, it

reads  $\frac{Kc^2 + (a')^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N \rho - c^2 \Lambda}{3}$ . Defining the Hubble constant

$h := \frac{a'}{a}$  and letting  $K = 0$  (flat Universe), one gets

$$h^2 = \frac{8\pi G_N - c^2 \Lambda}{3} \rho.$$

## Friedmann-Lemaître solution -5-

♣ **Interpretation and comments:** The FL equation shows that ones we know the content,  $\rho$ , we know the expansion speed  $h$ . The content is twofold: matter (usual and dark) and radiation (light), but it is mainly made of matter, because as the Universe grows the density of light decreases faster than the energy/matter.

♣ As a consequence we obtain the following cosmos phases:

- ▶ first phase (Big Bang - 13.7 billion years ago):  
inflation-dominated ( $a \sim e^{\alpha t}$ )
  - ▶ second phase: radiation-dominated ( $a \sim t^{1/2}$ )
  - ▶ third phase: matter-dominated ( $a \sim t^{3/2}$ )
  - ▶ fourth phase: cosmological constant-dominated ( $a \sim e^{\alpha t}$ ).
- To determine the content one needs Particle Physics.

## Friedmann-Lemaître solution -6-

♣ **Current debate on the Universe's shape:** Several topological or geometric attributes of the universe may be discussed. Some of these are:

- ▶ Boundedness (whether the universe is finite or infinite)
- ▶ Flat (zero Gauss curvature), hyperbolic (negative curvature), or spherical (positive curvature)
- ▶ Connectivity: how the universe is put together, i.e., simply connected space or multiply connected space.

A universe with positive curvature is necessarily finite. Although it is usually assumed in the literature that a flat or negatively curved universe is infinite, this need not be the case if the topology is not the trivial one (i.e., simple connexity): for example, a three-torus is flat but finite. The exact shape is still a matter of debate in physical cosmology, but experimental data confirm that the universe is flat with only a 0.4% margin of error. (*from Wikipedia*)

## Friedmann-Lemaître solution -7-

### ♣ Further comments on terminology:

- ▶ **The universe:** all of three-dimensional space at the present time (the  $t$ -coordinate is frozen). Can also be called the "nowverse".
- ▶ **Flat universe:** When cosmologists say that the universe is flat (or isotropic, or homogeneous) they are referring to space—the nowverse and its parallel siblings of time past. Spacetime is not flat (indeed, see the above expressions of the curvatures in function of  $t$ ). It can't be: Einstein's general theory of relativity says that matter and energy curve spacetime, and there are enough matter and energy lying around to provide for curvature. (*Quoted from Scientific american blog*).
- ▶ **Cosmic scale flatness:** Moreover, when they talk about the flatness of space, cosmologists are referring to the large-scale

## Friedmann-Lemaître solution -8-

appearance of the universe. When you “zoom in” and look at something of less-than-cosmic scale, such as the solar system, space—not just spacetime—is definitely not flat. Remarkable fresh evidence for this fact was obtained recently by the longest-running experiment in NASA history, Gravity Probe B, which took a direct measurement of the curvature of space around Earth. But, on a cosmic scale, the curvature created in space by the countless stars, black holes, dust clouds, galaxies, and so on constitutes just a bunch of little bumps on a space that is, overall, boringly flat. (same quote)

- ▶ **Observable universe:** The most distant galaxies whose light we have detected emitted that light about 13.2 billion years ago. Because the universe (meaning space) has been expanding ever since, those galaxies are now at a much greater distance—some 96 billion light-years away.

## Friedmann-Lemaître solution -9-

♣ **Remark in the expansion rate:** in principle there is no objection for the Spacetime to expand more rapid than the speed of light. Indeed on the one hand the upper limit  $c$  is valid for particles with mass or carrying information, not for the dynamical Spacetime *per-se*. On the other hand as shown in the picture, the Spacetime between the cosmological masses increases, possibly faster than  $c$  but the masses stay fixed and are carried by the Universe proper expansion (as on an inflated baloon). Remark that being a rate of expansion it is not comparable, strictly speaking, to a velocity. So, yes the expansion rate can be greater than  $c$ .



## Black holes: Schwarzschild solution -1-

### Schwarzschild metric

The Schwarzschild metric corresponding to a body of mass  $M$  is the unique spherically-symmetric metric solution of the EFE in vacuum, and reads

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\blacktriangle)$$

with  $d\Omega^2$  the standard metric of the unit sphere.

- For  $M = 0$  the Schwarzschild metric reduces to the Minkowski metric.
- For  $M > 0$  the Schwarzschild metric is a regular Lorentzian metric with  $t$  timelike and  $r > 2M$  spacelike.  $r_S = 2M$  is called the Schwarzschild radius. For  $r \gg r_S$  one recovers in first



## Black holes: Schwarzschild solution -2-

approximation Newtonian theory for a spherical body of gravitational mass  $M$  centred at  $r = 0$ .

- At  $r = 0$  the Schwarzschild metric becomes singular.
- The trajectories of bodies of small size and mass in a spherically symmetric gravitational field, for instance the trajectories of the solar planets, are timelike geodesics of this field, i.e. of the Schwarzschild spacetime.
- The equation of motion are given by the 4 geodesics in  $t, r, \theta$  and  $\varphi$ . Solving them one gets  $1/r(\varphi) = 1/r_{\text{Newton}}(\varphi) + 3M^2\ell^{-4}e\varphi \sin \varphi$ . The correction term is non-periodic and was confirmed by observations (in 1845 by Leverrier) and measurements. It is called the **perihelion precession** term. Here  $\ell$  is the constant angular momentum per unit mass, and  $e$  the eccentricity. This was one of the first proof of validity of GR.

## Black holes: Schwarzschild solution -3-

- ♣ As an exercise in the physical interpretation of General Relativity, we compute the radial velocity with respect to an observer at rest in the Schwarzschild metric that must be applied to a test object in order for it to escape the gravitational attraction.
- Out of the four geodesics (in  $t, r, \theta, \varphi$ ) we now consider the first one and compute the escape velocity.

### Escape velocity

Assume the observer is located at a radius  $r_0 > 2M$ . Solution to the  $t$ -geodesic writes as  $(1 - \frac{2M}{r})\dot{t} = E = \text{cst} = (1 - \frac{2M}{r_0})\dot{t}_0$ . On the other hand since  $\theta$  and  $\varphi$  are constant, dividing ( $\blacktriangle$ ) by  $ds^2$  yields  $1 = (1 - \frac{2M}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}\dot{r}^2$ . As a consequence  $\dot{r}^2 = E^2 - 1 + \frac{2M}{r}$ . Hence, the rocket attains a maximum when  $\dot{r} = 0$ , i.e.  $r_{\max} = \frac{2M}{1-E^2}$ . Escape velocity means that  $r_{\max} \rightarrow \infty$ , i.e.  $E = 1$ , i.e.,  $\dot{r}_0^2 = \frac{2M}{r_0}$ .

## Black holes: Schwarzschild solution -4-

### Black hole (definition)

A black hole is a cosmic body sufficiently dense such that the velocity required to escape from its gravitational field is greater or equal to the speed of light in vacuum. In particular, since no light rays can escape from the black hole, it is, indeed, black.

♣ **Exercise:** what would be the radius of the sphere into which one needs to compress the Earth in order for the Earth to become a black hole? Let  $M$  be the earth mass.

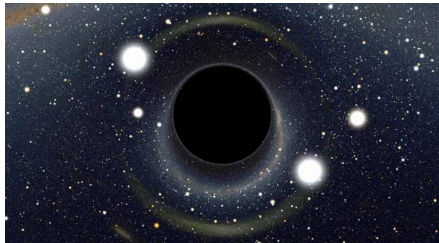
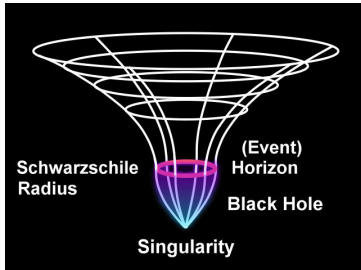
**Answer:** let  $\dot{r}_0 = c$ , thus  $c^2 = \frac{2M}{r_0}$ , i.e.,  $r_0 = \frac{2M}{c^2} \sim$  few millimeters.

• **Remark:** A black hole is a massive body that is extremely dense. If the sun became a BH we would notice no difference for 8 minutes. After that the Earth will continue to turn around the sun, with or without light emanating from it. Therefore it is wrong to take the analogy of the BH being a glutton!

└ PART C. Introdução à relatividade geral

└ Cosmologia: solução de Friedmann-Lemaître & Buracos negros: solução de Schwarzschild

## Black holes: Schwarzschild solution -5-

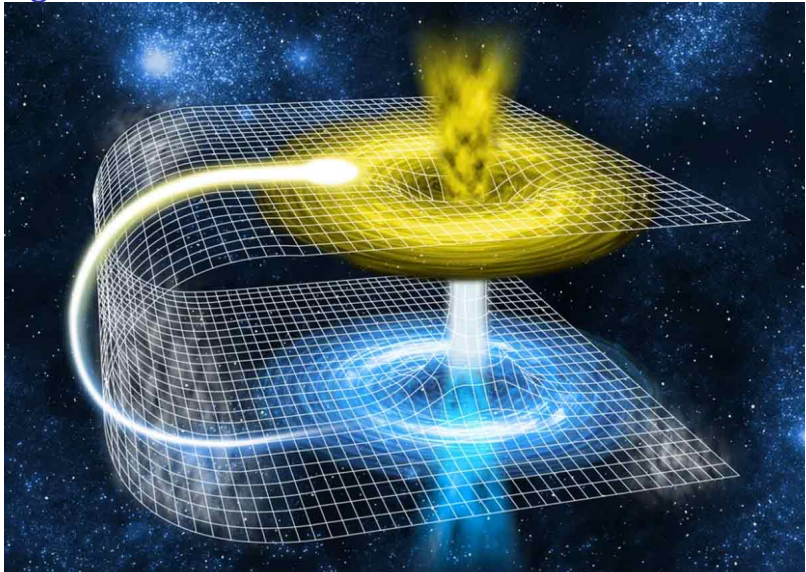


## Epilogue -1-

### ♣ Contributions of Einstein after General Relativity:

- **The Einstein-Rosen Bridge (ER) bridge** (Schwarzschild wormhole). In 1935 Einstein and his assistant Nathan Rosen slightly modified Einstein's field equations. The Schwarzschild metric was a solution of the new field equations. Einstein and Rosen considered a coordinate transformation that removes the region containing the coordinate singularity  $r = 2M$  and omitted part of the spacetime beyond this singularity. This led to the Einstein-Rosen bridge (metric), which is free from singularities. The Schwarzschild solution becomes a regular solution, which is a mathematical representation of physical space by two identical flat sheets connected by a finite bridge.

## Epilogue -2-



## Epilogue -3-

- **The EPR paradox.** In 1935, Einstein, Boris Podolsky, and Rosen (EPR) argued that quantum mechanics cannot be a complete representation of real things. They considered two separate but correlated particles for which the position/momentum of one particle can be determined by measuring the position/momentum of the other particle. Assuming that the measurement of the first particle does not affect the second particle, EPR argued that because the position/momentum of the second particle can be precisely determined without directly measuring it, then quantum mechanics is an incomplete theory of the real world.

Truly, Einstein was not right: see 2022 Nobel prize in physics (Alain Aspect et al.): quantum entanglement. Nevertheless his paradox led to challenging discussions and open new research avenues (e.g., quantum computation).