Mecânica racional: Mecanica do continuo

Aulas teoricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Conteúdo das aulas teoricas

- Aula 1-2: Conceitos de base. Tensores na M. do C. (20-27/9)
- Aula 3: Bases locais. Cinemática (04/10)
- Aula 4: Diferencial com o tempo do gradiente de deformação (11/10)
- Aula 5: Diferencial com o tempo de um conjunto, Conservação da massa, Centro de massa, Leis da dinâmica e Forças (18/10)
- Aula 6: Tensor das tensões, Teorema de Cauchy, Simetria. Eq.do movimento (25/10)
- Aulas 7: 1a Lei termodinamica, Conservação da Energia, Eq. Calor (08/11)

Conteúdo das aulas teoricas

- Aulas 8: Ciclos de Carnot, Entropia, 2a Lei da termodinamica, desigualdade de Clausius-Duhem (15/11)
- Aula 9: Outra abordagem da 2a Lei da termodinamica (22/11)
- Aula 10: Mecânica dos fluidos. (29/11)
- Aula 11: Eqs. de Stokes e de Euler (05/12)
- Aula 12: Eq. de Stokes e Navier-Stokes. (13/12)
- Aula 13: Calculo das variaçoes (complemento) (20/12)

Referências bibliograficas

- R. M.: Temam and A. M. Miranville: Matematical modelling in Continuum mechanics
- M. E. Gurtin: An introduction to continuum mechanics
- G. Duvaut: Mécanique des Milieux Continus
- F. Boyer, P. Fabrie: Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models

Avaliação

- Exame de teoria (40%)
- Exame de teorica-pratica (20%)
- Grande trablho (30%)
- Pequeno trabalho (10%)

Conceito de Modelo

Observação de quantidades fisicas e suas propriedades

$\Downarrow$ $\boxed{\text{Metodos matematicos}}$ $\Downarrow$

Modelos matematicos

$\boxed{\text{na Física}}$

Conceito de Modelo

Opinão de J. von Neumann

The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work-that is, correctly to describe phenomena from a reasonably wide area.

Opinão de P.- L. Lions

...What is called Newton's Laws for me are not laws, neither principles; it is a model. Which is false because the relativistic effects are not taken into account, or is not tractable because all forces are not taken into account.
Thus. it is an excellent model which is either false or untractable.

Conceito de Observador Galileano

Sistema de referência

Definido como um corpo rigido em movimento ao qual é legado uma base orthonormal $\{\underline{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$ e uma origem O. Uma outra base $\{\underline{e}'_j\}_{1\leq j\leq 3}$ neste mesmo sistema de referência verifica: $\underline{e}'_j(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_i$, onde $A = [a_{ij}]_{ij}$ (ou Q) é uma matriz orthogonal, dita de mudança de base. Portanto: $x = x_i\underline{e}_i, x' = x'_j\underline{e}'_j$, e $x' = A(x - x_O) + b$, com $b := \overrightarrow{OO'}$ and $x_0 := \overrightarrow{0O}$. Os acontecimentos são rapresentados pelo par (x, t) ou (x', t), conforme a base escolhida.

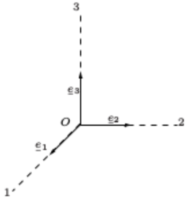
Sistema de referência inercial ou de Galileo

♣ Definido como um sistema de referência em translação uniforme.

Conceito de observador

♣ Definido somo um seres num sistema de referência, capaz de realizar experiências e mediçoes de quantidades fisicas (temperatura, tensões, velocidade, etc.), e de comunicalas com um outro observador.

Referêncial ortonormal

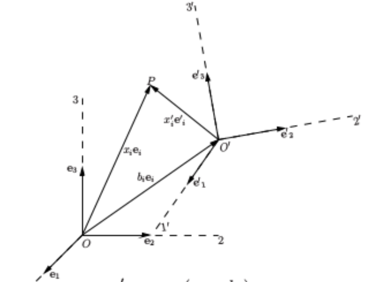


$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ **ortonormalidade**

$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \epsilon_{ijk}\underline{e}_k$ **orientação directa**

$\underline{x} = x_i\underline{e}_i$ **vector posição**

Mudança de refêrencial ortonormal (rotaçâo+translação)



$$x'_i = a_{ij}\,(x_j - b_j)$$
$$x_i = a_{ji}\,x'_j + b_i$$

$$\underline{e}'_i = a_{ij}\,\underline{e}_j$$
$$\underline{e}_i = a_{ji}\,\underline{e}'_j$$

Matriz de mudança de base

$$a_{ij} = \cos(\underline{e}'_i, \underline{e}_j) = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$$

ortonormalidade

$$a_{ik}\,a_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ki}\,a_{kj} = \delta_{ij}$$

Construcção de uma base de ordem superior

♣ Seja $\{\underline{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$ a base Cartesiana fixa, e $\{\underline{g}_j\}_{1\leq j\leq 3}$ uma base movél tal que $\underline{g}_j(x) = a_{ij}(x)\underline{e}_i$, onde a_{ij} são os componentes da matriz de mudança de base. Temos tambem $\underline{e}_i = a_{ji}(x)\underline{g}_j(x)$

♣ Definimos $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\}_{1\leq i,j\leq 3}$ como elemento de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ igual a $(0,\cdots,1,0,\cdots,0)$, ou seja com 8 entradas nulas excepto a entrada ij. Desta forma definimos os 9 elementos da base Cartesiana de ordem 2.

♣ Temos então $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l$, e, invertindo a matriz de mundança de base, $\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l = a_{ki}(x)a_{lj}(x)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$. Desta forma, definimos os 9 elementos da base movél de ordem 2, $\{\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l\}_{kl}$.

♣ Por uma construcção parecida, definimos tambem os elementos da base de ordem 3, $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k\}_{1\leq i,j,k\leq 3}$ (26 entradas nulas excepto a ijk egual a 1) e $\{\underline{g}_m \otimes \underline{g}_n \otimes \underline{g}_p\}_{1\leq m,n,p\leq 3}$, e todos os ordem superiores.

Definição de um tensor de ordem k

♣ Uma propriedade fisica (ou um campo) é dada por um tensor de ordem 0 (um escalar), 1 (um vector: $v(1)$), $2, 3, 4$ ou mais.

Tensor de ordem 2: $T(2)$

♣ Um campo T é um tensor de ordem 2 se for dado por um conjunto de 9 scalares $x \mapsto T_{ij}(x), 1 \leq i, j \leq 3$ tais que $T = T_{ij}(x)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ (suma em i e j). O mesmo campo é tambem dado na base movél por 9 scalares $x \mapsto T'_{ij}(x), 1 \leq i, j \leq 3$ tais que $T = T'_{kl}(x)\underline{g}_k \otimes \underline{g}_l$ (suma em k e l). Portanto, este tensor verifique a seguinte propriedade por mudança de base: $T'_{kl} = a_{ki}a_{lj}T_{ij}$

Tensor de ordem k: $T(k)$

♣ Um campo U é rapresentado por um tensor de ordem k se for dado por 3^k componentes numa base tensorial de ordem k, do tipo $\{\underline{g}_m \otimes \cdots \otimes \underline{g}_p\}_{1 \leq m, \cdots, p \leq 3}$ (efetua-se k vezes o produto tensorial da base de ordem 1). A relação por mudança de base é: $U'_{m \cdots p} = a_{mi} \cdots a_{pj} U_{i \cdots j}$.

Operações com tensores

- Suma de $P(m)$ com $Q(m)$ (mesma ordem), componente por componente: $P_{ijkl\ldots} + Q_{ijkl\ldots}$.
- Produto tensorial de $u(1)$ com $v(1)$=$w(2)$: $w_{ij} = u_i v_j$. Propriedade (comutatividade): $w'_{ij} = u'_i v'_j$ ($\star$).
- Produto tensorial de $U(m)$ com $V(n)$= $W(n+m)$: tensor de ordem $n+m$.
- Contracção: traço de $U(2)$=scalar $s = U_{ij}\delta_{ij} = U_{ii}$. Propriedade (comutatividade): $s = U'_{ii} = U_{ii}$ ($\star$).

Tensores especiais

- Identidade (de substituição): $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$
- Simbolo de Levi-Civita (de permutação):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se a permutaão de } ijk \text{ for par} \\ -1 & \text{se for impar} \\ 0 & \text{senão} \end{cases} .$$

Conceito de tensores objetivos-1-

Mudança de observador

♣ Definido atravez uma mudança de sistema de referência. Os acontecimentos são rapresentados pelo par $(x^\star, t^\star)$. Portanto, existe uma matriz orthogonal $t \mapsto Q(t)$, um vector $t \mapsto c(t)$ e um scalar a tais que $x^\star = Q(t)(x - x_O) + c(t)$ e $t^\star = t - a$.
♣ Alem disso, existe uma mapa, dita de **deformação**, $\Phi^\star$ tal que $x^\star = \Phi^\star\left(\Phi^{-1}(x,t), t^\star\right)$, onde $X := \Phi^{-1}(x,t)$ é o chamado **ponto material** associado a x (em t) na configuração de referência (ou inicial) escolhida no primeiro sistema de referência .

Conceito de tensores objetivos-2-

Transformação objetiva por mudança de observador

Logo: $x_2^\star - x_1^\star = Q(t)(x_1 - x_2)$. Agora um vector v é dito **objetivo** se se verifica: $v^\star = \hat{v}(x^\star) = Q(t)v$, ou seja se transforma por mudança de observador como um tensor.
♣ Um tensor de ordem 2 será objetivo se $U^\star = \hat{U}(x^\star)$ $= Q(t)UQ^T(t)$. Um escalar é sempre objetivo: $\alpha^\star = \alpha$.

Exemplos

- Seja $T = u \otimes v$, onde u e v são 2 vectores objetivos. Portanto $T^\star = u^\star \otimes v^\star = Q(t)u \otimes Q(t)v = Q(t)(u \otimes v)Q^T(t)$. ($\star$)
- Seja o campo escalar $\alpha = \hat{\alpha}(x,t)$. Portanto $\partial_{x_i^\star}\alpha^\star = \partial_{x_j}\alpha\frac{\partial x_j}{\partial x_i^\star}$, ou seja $\nabla_{x^\star}\alpha^\star = Q(t)\nabla_x\alpha$. ($\star$)
- Seja $f(x,t) = 0$ uma superficie com normal exterior $N(x) := \frac{\nabla f(x,t)}{|\nabla f(x,t)|}$. Portanto

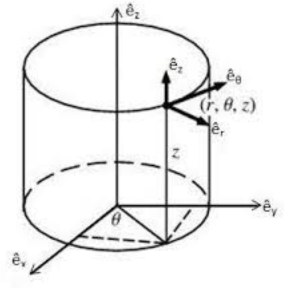
Conceito de tensores objetivos-2-

Contra-exemplos

- Velocidade: $\dot{x}^\star = Q(t)\dot{x} + \dot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{c}$
- Acceleração: $\ddot{x}^\star = Q(t)\ddot{x} + \ddot{Q}(t)(x - x_O) + \dot{Q}(t)\dot{x} + \ddot{c}$
  ♣ Nota que $\ddot{x}$ será objetivo por mudança inercial de observador, i.e., onde $\dot{Q} = \ddot{c} = 0$: a acceleração é um vector objectivo Galileano (rotação rigida + translação uniforme).
- Gradiente de velocidade:
  $\nabla_{x^\star}\dot{x}^\star = Q(t)\nabla\dot{x}Q^T(t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)$ (Nota: $\nabla^\star x = Q^T$).
  ♣ Nota que $\frac{d}{dt}QQ^T = 0$ e portanto $\dot{Q}Q^T$ é antisimetrica.
  ♣ Logo, a parte simmetrica do gradiente de velocidade, $\nabla^S_{x^\star}\dot{x}^\star$, é um tensor objetivo.
  ♣ NOTA: parte simetrica de um tensor U de ordem 2: $U^S := \frac{1}{2}(U + U^t)$.

Componentes e coordenadas polares cilindricas

Rotação em torno de $\underline{e}_3 = \underline{g}_z (A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$



$$x = x_i \underline{e}_i$$
$$\underline{g}_r := \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_y$$
$$\underline{g}_\theta := \frac{\partial x}{\partial \theta} / \| \frac{\partial x}{\partial \theta} \| = -\sin\theta \underline{e}_x + \cos\theta \underline{e}_y$$
$$x = x_{3D} = r\underline{g}_r + z\underline{g}_z$$

Velocidade, Acceleração

$$\dot{x}_{3D} = \dot{r}\underline{g}_r + r\dot{\theta}\underline{g}_\theta + \dot{z}\underline{g}_z$$
$$\ddot{x}_{3D} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{g}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\underline{g}_\theta + \ddot{z}\underline{g}_z$$

Acréscimo de caminho

$$dx = d(r\underline{g}_r + z\underline{g}_z) = dr\underline{g}_r + dz\underline{g}_z + rd\underline{g}_r + zd\underline{g}_z = dr\underline{g}_r + dz\underline{g}_z + rd\theta\underline{g}_\theta$$

Operador gradiente cilindrico

$$du = dx \cdot \nabla u = u_{,r}dr + u_{,\theta}d\theta + u_{,z}dz$$
$$\Rightarrow \nabla = \underline{g}_r\partial_r + \frac{\underline{g}_\theta}{r}\partial_\theta + \underline{g}_z\partial_z.$$

Div,Curl,Δ

Trabalho em casa

Seja o vector $\underline{v} = v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z$. Calcular em componentes e coordenadas cilindricas, com ajuda do operador ∇ cilindrico definido em cima,

- A divergência $\nabla \cdot \underline{v}$ de $\underline{v}$
- O rotor $\nabla \times \underline{v}$ de $\underline{v}$
- O Laplaciano $\Delta u := \nabla \cdot \nabla u$ do escalar u.

Resposta partial

♣ Calcula-se formalmente o produto interno:
$(\underline{g}_r \partial_r + \frac{\underline{g}_\theta}{r} \partial_\theta + \underline{g}_z \partial_z) \cdot (v_r \underline{g}_r + v_\theta \underline{g}_\theta + v_z \underline{g}_z)$, tendo em conta que (por exemplo) $\frac{\underline{g}_\theta}{r} \partial_\theta \cdot v_r \underline{g}_r = \frac{\underline{g}_\theta}{r} \cdot v_r \partial_\theta \underline{g}_r = v_r / r$.
Portanto: $\nabla \cdot \underline{v} = 1/r \partial_r (r v_r) + 1/r \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z$.
Tomando $v = \nabla u$, logo $\Delta u = 1/r \partial_r (r \partial_r) + 1/r^2 \partial_\theta^2 v_\theta + \partial_z^2 v_z$.

Movimento e sua observação

Cinematica

♣ Estudo do movimento de um sistema relativamente a um observador, chamado sistema de referência. Precisamos de:

- um parametro continuo t chamado tempo
- um sistema de coordenadas fixo: $\mathcal{B}_0 = \{0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

♣ No tempo $t \subset I \subset \mathbb{R}$, o sistema é rapresentado pelo dominio $\Omega_t \in \mathbb{R}^3$. O movimento é definido por uma familia de **mapas de deformação** dependentes do tempo:
$X \in \Omega_{t_0} \mapsto x = \Phi(X, t; t_0) \in \Omega_t$: aplica a posição X em t_0 na nova posição $x = \Phi(X, t)$ em t. Temos:

- $\Phi(\cdot, t_0; t_0) = \mathrm{Id}$
- $\Phi(\cdot, t'; t) \circ \Phi(\cdot, t; t_0) = \Phi(\cdot, t'; t_0)$
- $(t, X) \mapsto \Phi(\cdot, t; t_0)$ é pelo menos $\mathcal{C}^1$
- Φ bijetiva, regular, Φ^{-1} diferenciavél $\Rightarrow \det \nabla_X \Phi \neq 0$.

O movimento de um ponto material

Posição de um ponto material

♣ $x = \overrightarrow{OM}(t) = \Phi(X, t; t_0) = \Phi(X, t)$ (t_0 é fixado).
$X = \Phi^{-1}(x, t)$

Deslocamento de um ponto material

♣ $u = \hat{u}(X, t) = \Phi(X, t) - X$.

Velocidade de um ponto material

♣ $\dot{x} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(t) = v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(X, t)$.

Acceleração de um ponto material

♣ $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}(t) = \frac{d}{dt}v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(X, t)$.

Lemma: Velocidade e acceleração são independentes da escolha de t_0 (origem do tempo). (homework)

Representação do movimento

♣ Nota: Tomamos $t_0 = 0$ e portanto $\Omega_{t_0} = \Omega_0$.

Representação Lagrangiana

$x = \Phi(X, t; 0) = \Phi(X, t)$ $(t_0 = 0)$.

♣ É uma representação pelas trajetórias. Em funcção do ponto material na sua posição de referência, i.e. na origem.

Representação Euleriana

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & v(x,t) = \partial_t \Phi\left(\Phi^{-1}(x,t), t\right) \\ x(0) & = & X \end{cases} .$$

♣ É uma representação pelo campo de velocidades. Em funcção do ponto material na sua posição corrente, i.e. no tempo t.

Derivadas eulerianas e lagrangiana

Seja um ponto material M que estava em X em t_0 e em x em t.
Seja $f_M(t)$ uma funcção (tensorial de ordem k).
♣ Rapresentação Lagrangiana: $f_M(t) = f^L(X,t)$
♣ Rapresentação Euleriana: $f_M(t) = f^E(x,t)$,
onde $x = \Phi(X,t)$. Portanto $f^L(X,t) = f^E(\Phi(X,t),t)$.

Derivadas Euleriana de f_M: $\frac{\partial f^E}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial f^E}{\partial t}$

Derivadas Lagrangiana de f_M: $\frac{\partial f^L}{\partial X_i}$ e $\frac{\partial f^L}{\partial t}$.

♣ Derivada **material** $\frac{D}{Dt} f_M := \partial_t f^L = \frac{d}{dt} f^L_{|X \text{ fixo}} = \frac{d}{dt} f^E \circ \Phi_{|X \text{ fixo}} = \partial_t f^E(t) + v(x,t) \cdot \nabla f^E(x,t)$.

Velocidade de um corpo rigido -1-

Representação Euleriana da acceleração

Temos $f_M = v_M =$ velocidade do ponto material M. Portanto $v_M = v^E(x,t) = v(x,t)$ ou $v_M = v^L(X,t)$.

Lemma: $a_M = \frac{D}{Dt}v_M(t) = \partial_t v^L = \partial_t v(x,t) + v \cdot \nabla v(x,t)$. $(\star)$

Movimento rigido

Ω_t é um corpo rigido se $t \mapsto d(x,x') = \mathrm{cste}$ para cada $x, x' \in \Omega_t$. Movimento é rigido se $d(X,X') = d(x,x')$, onde $x = \Phi(X,t)$ e $x' = \Phi(X',t)$. Portanto Φ é uma isometria de Ω_{t_0} a Ω_t, ou seja, Φ é uma transformação afim, i.e., uma roto-translação: temos então $x = QX + c$, onde $c \in \mathbb{R}^3$ e $Q^T = Q^{-1}$.

Velocidade de um corpo rigido -2-

Lemma 1:

♣ A velocidade $v(x,t)$ corresponde ao movimento de um corpo rigido, se o somente se, $(x-x')\cdot(v(x,t)-v(x',t))=0$ para cada $x,x'\in\Omega_t$ e cada $t\in I$. $(\star)$

Demonstração

$\frac{d}{dt}\|x'(t)-x(t)\|^2=\frac{d}{dt}(x'(t)-x(t),x'(t)-x(t))=0$, ou seja, $0=2(x'(t)-x(t),\frac{d}{dt}x'(t)-\frac{d}{dt}x(t))=(x'(t)-x(t),v'(x',t)-v(x,t))$.

Lemma 2:

♣ A condição $(x-x')\cdot(v(x,t)-v(x',t))=0$ para cada $x,x'\in\Omega_t$ no tempo t se, e somente se, existe $b(t)\in\mathbb{R}^3$ e $A(t)\in\mathbb{R}^{3\times3}$ antisimetrica t.q. $v(x,t)=A(t)x(t)+b(t)$, onde (existe ω t.q.) $A_{ij}=-\epsilon_{ijk}\omega_k(t)$, i.e., $v(x,t)=\omega(t)\times x(t)+b(t)$. $(\star)$

Velocidade de um corpo rigido -3-

Demonstração

Seja $U(x) = v(x,t)$ e $V(x) = U(x) - U(0)$. Supomos que $0 \in \Omega$.
♣ Se $U(x) = Ax + b$, logo $U(x) - U(x') = A(x - x')$ e portanto $(U(x) - U(x')) \cdot (x - x') = 0$ por A ser antisimetrica.
♣ Assumindo $(U(x) - U(x')) \cdot (x - x') = 0$ para qualqueis x, x', tomando $x' = 0$ logo $V(x) \cdot x = 0$. Tomando $x' = \underline{e}_i$, temos $(U(x) - U(\underline{e}_i)) \cdot (x - \underline{e}_i) = 0$, ou seja $(V(x) - V(\underline{e}_i)) \cdot (x - \underline{e}_i)$ $= 0$ $(\star)$. Por $(\star)$, $V(x) \cdot \underline{e}_i = -V(\underline{e}_i) \cdot x$. Escrevendo $V(x)$ em componentes, temos $V(x) = V_i(x)\underline{e}_i$ com $V_i(x) = V(x) \cdot \underline{e}_i$. Temos $x = x_j \underline{e}_j$ e portanto $V_i(x) = -V(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j x_j$. Logo, $v_i(x,t) = A_{ij} x_j + b$ com $A_{ij} = -V(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j$ e $b = U(0)$. Por $(\star)$ com $x = \underline{e}_j$, $A = -A^T$ e $A_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k(t)$ com $w_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kmn} A_{mn}$.

Determinante

Expressão indicial do determinante

♣ Seja uma matriz $M \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Temos $\det M = (M_{2\star} \times M_{3\star}) \cdot M_{1\star} = M_{1i}\epsilon_{ijk}M_{2j}M_{3k}$. Invertindo duas linhas, muda o signal, portanto $\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{ijk}M_{pi}M_{qj}M_{rk}$. Invertindo linhas e colunas e multiplicando por ϵ_{pqr}, logo $\epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} \det M = \epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$
$\Rightarrow \det M = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$

♣ Toma $M = F := \nabla_X \Phi = \nabla_X x$ (i.e., $M_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}$). Logo $\partial_t F = \partial_t \nabla \Phi = \nabla_X v = \nabla_x v \nabla_X x = \nabla_x v F$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{Curl}\ F = 0$).

Lema: diferencial do determinante do gradiente de deformação

$\partial_t (\det \nabla\Phi) = 3 \times \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}(\partial_t \nabla\Phi_{ip})\nabla\Phi_{jq}\nabla\Phi_{kr} =$
$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\nabla_x v)_{il}\epsilon_{pqr}F_{lp}F_{jq}F_{kr} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\nabla_x v)_{il}\epsilon_{ljk} \det F =$
$\frac{1}{2}(2\delta_{il})(\nabla_x v)_{il} \det F = (\nabla_x v)_{ii} \det F = \mathrm{div}\ v \det F$.

Diferencial de um integral de volume dependente do tempo

Objetivo: Calcular

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{K}(t) := \int_{\omega_t} k_M(t)dx\right), \forall \omega_t \subset \Omega_t,$$

onde k_M é um campo tensorial de ordem $k \geq 0$.
Assumimos que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega_0 \times I)$ e que $v \in \mathcal{C}^1(\Omega_t \times I)$.

Lei de conservação: forma geral

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = \int_{\omega_t} B(x,t)dx + \int_{\partial\omega_t} s(x,t)dx,$$

onde B é a contribuição de volume (bulk part) e s a de superficie.

Teorema do transporte de Reynolds

Teorema do transporte de Reynolds

Seja $k_M(t) = k(x,t)$, com $k \in \mathcal{C}^1(\Omega_t \times I)$, e $\omega_t \subset \Omega_t$.
Logo

$$\boxed{\frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) = \int_{\omega_t} \partial_t k(x,t)dx + \int_{\omega_t} \mathrm{div}\ \left(k(x,t) \otimes v(x,t)\right) dx,}$$

ou seja (com N, a normal unitaria a $\partial\Omega_t$),

$$\boxed{\frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) = \int_{\omega_t} \partial_t k(x,t)dx + \int_{\partial\omega_t} (k \otimes v)(x,t)N(x,t)dS(x),}$$

DEM.

♣ Seja $J := \det F = \det \nabla\Phi$. Mudança de variável:
$\mathcal{K}(t) := \int_{\omega_t = \Phi(\omega_0)} k(x,t)dx = \int_{\omega_0} k(\Phi^{-1}(X,t),t)JdX$

♣ Pelo lema anterior: $\frac{d}{dt}(kJ) = J\partial_t k + J(\nabla k)v + k\partial_t J =$
$J\partial_t k + J\,\mathrm{div}\ (k \otimes v) - Jk\,\mathrm{div}\ v + kJ\,\mathrm{div}\ v = \left(\partial_t k + \mathrm{div}\ (k \otimes v)\right) J$.

Conservação da massa

Seja $\rho(x,t)$ a massa volumica (ou densidade) de um corpo.

Conservação da massa (forma global)

♣ $m(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho(x,t)dx = m(\omega_0) = \text{cste}$ $(\forall \omega_t \subset \Omega_t)$.

Condição no Jacobiano $(J = \det F = \det \nabla\Phi)$

♣ $m(\omega_t) = \int_{\omega_0} \rho(\Phi(X,t),t)JdX = \int_{\omega_0} \rho_0(X,0)dX, \ \forall \omega_t \subset \Omega_t.$
Logo, a forma local: $\rho J = \rho_0$, e

$\rho = \text{cste} \Rightarrow$

$\boxed{\text{incompressibilidade} \Leftrightarrow J = 1.}$

Pequenas deformações

♣ $F = \nabla_X \Phi = \mathbb{I} + \nabla_X u$
♣ $6 \det F = \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}(\mathbb{I} + \nabla_X u)_{ip}(\mathbb{I} + \nabla_X u)_{jq}(\mathbb{I} + \nabla_X u)_{kr} =$
$((\nabla_X u)_{ip}\epsilon_{iqr}\epsilon_{pqr} + (\nabla_X u)_{jq}\epsilon_{pjr}\epsilon_{pqr} + (\nabla_X u)_{kr}\epsilon_{pqk}\epsilon_{pqr} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk})$
$+O(|\nabla u|^2) = 6((\nabla_X u)_{ii} + 1) + O(|\nabla u|^2)$. (Nota: $\epsilon_{pqk}\epsilon_{pqr} = 2\delta_{kr}$)
♣ Em deformações linearizadas: $J = \det F \sim \text{ div } u + 1$, i.e.:
$\rho/\rho_0 \sim 1 - \text{ div } u$ ($\rho < \rho_0$ em tracção $\Rightarrow \text{ div } u > 0$).

Equação de continuidade

Equação de continuidade

Consideramos $\frac{d}{dt}m(\omega_t) = 0$. Logo, para cada $(x,t) \in \Omega_t \times I$ temos

$$\boxed{\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(v\rho) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\, v = 0.\ (\star).}}$$

♣ Para um fluido: se ρ for constante longo as linhas de flusso, i.e., $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, então o fluido tem $\operatorname{div}\, v = 0$.

Densidade de massa de um campo

Seja $\mathcal{C}(x,t)$ uma densidade de volume de um campo. Então a densidade de massa (ou "especifica") é $c(x,t) := \frac{\mathcal{C}(x,t)}{\rho(x,t)}$ e portanto

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \mathcal{C}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} c(x,t)\rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dc(x,t)}{Dt}\rho(x,t)dx.\ (\star).}$$

♣ E como dizer que a massa $dm = \rho dx$ do ponto material não varia com o movimento do mesmo.

Centros de massas

Seja $m := m(\Omega_t)$ a massa de Ω_t.

Centro de massa

♣ Centro de massa: $\boxed{\mathrm{CM}(\Omega_t) := \frac{1}{m}\int_{\Omega_t} x(t)\rho(x,t)dx}$.

♣ Pelo Lema, $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} c(x,t)\rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dc(x,t)}{Dt}\rho(x,t)dx$.

Tomando $c(x,t) = x(t)$,
$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} x(t)\rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{Dx(t)}{Dt}\rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} v(x,t)\rho(x,t)dx$.

Momentos

♣ Momento linear: $\boxed{P(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} v(x,t)\rho(x,t)dx}$,

♣ Momento cinetico: $\boxed{L_O(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} x \times v(x,t)\rho(x,t)dx}$,

sendo $x := \overrightarrow{OP}$ (L_O=o momento relativo ao ponto O).

Cinematica

Derivadas do centro de massa

$\frac{d}{dt}\mathrm{CM}(\Omega_t) = \frac{1}{m}\int_{\Omega_t} v(x,t)\rho(x,t)dx = \frac{1}{m}P(\Omega_t) =: \mathrm{CMV}(\Omega_t)$.

Centros de massa de velocidade e acceleração

$\frac{d}{dt}\mathrm{CMV}(\Omega_t) = \frac{1}{m}\int_{\Omega_t} \frac{Dv}{Dt}(x,t)\rho(x,t)dx =$
CMA$(\Omega_t) := \frac{1}{m}\int_{\Omega_t} a(x,t)\rho(x,t)dx$.

Derivadas dos momentos= Resultante dinamica

$$\boxed{\mathrm{RD}(\Omega_t) := \frac{d}{dt}P(\Omega_t) = m\frac{d^2}{dt^2}CM(t) = \int_{\Omega_t} a(x,t)\rho(x,t)dx.}$$

$$\frac{d}{dt}L_O(\Omega_t) := \int_{\Omega_t}\left(\frac{Dx}{Dt}\times v(x,t) + x\times\frac{Dv}{Dt}\right)\rho(x,t)dx.$$

i.e. $\boxed{\frac{d}{dt}L_O(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} x\times a(x,t)\rho(x,t)dx.}$

Forças-1-

Seja dois sistemas S e S'

♣ Em cada tempo t o sistema S' atua uma força no sistema S. A mesma é representada por uma medida vectorial $d\sigma_t(x)$.

Os 4 tipos de forças

- Força de volume: $d\sigma_t(x) = f(x,t)dx$
- Força de superficie: $d\sigma_t(x) = f_S(x,t)dS(x)$
- Força de linha: $d\sigma_t(x) = f_L(x,t)dL(x)$
- Força pontual: $d\sigma_t(x) = f_P(x)\delta_x(t)$

  Lembrete: massa de Dirac: seja φ uma funcção continua com suporte compato, então $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$

Forças resultantes

$\sigma_t(\Omega_t) := \int d\sigma_t(x) = \int_{\Omega_t} f(x,t)dx$ ou
$\sigma_t(\Omega_t) := \int d\sigma_t(x) = \int_{\Sigma_t} f_S(x,t)dS(x)$, onde $\Sigma_t \cup \Omega_t \neq \emptyset$, etc.

Leis fundamentais da dinamica

Propriedade de aditividade

♣ Seja $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ disjuntos mas não mutuamente separados. Então
$F_{\Omega \to \Omega_1 \cup \Omega_2}(t) := \sigma_t^{\Omega}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \sigma_t^{\Omega}(\Omega_1) + \sigma_t^{\Omega}(\Omega_2) =$
$F_{\Omega \to \Omega_1}(t) + F_{\Omega \to \Omega_2}(t)$
representa a força atuada por Ω sobre $\Omega_1 \cup \Omega_2$.
♣ Tambem: $F_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \to \Omega}(t) := \sigma_t^{\Omega_1 \cup \Omega_2}(\Omega) = \sigma_t^{\Omega_1}(\Omega) + \sigma_t^{\Omega_2}(\Omega) =$
$F_{\Omega_1 \to \Omega}(t) + F_{\Omega_2 \to \Omega}(t)$
representa a força atuada por $\Omega_1 \cup \Omega_2$ sobre Ω.

Leis fundamentais da dinamica (Modelo de Newton)

Num referêncial inercial temos:
♣ $\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} v(x,t)\rho(x,t)dx = \mathrm{RD}(\Omega_t) =$
$\int_{\Omega_t} a(x,t)\rho(x,t)dx = d\sigma_t(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(x,t)dx = F_{\to \Omega_t}(t).$
♣ $\frac{d}{dt} L_O(\Omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \times v(x,t)\rho(x,t)dx =$
$\int_{\Omega_t} x \times a(x,t)\rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} x \times d\sigma_t(x) = \int_{\Omega_t} x \times f(x,t)dx.$

Terceira lei de Newton

Principio de Acção-Reação

Seja Ω_1, Ω_2 disjuntos mas não mutuamente separados. Então $F_{\Omega_1 \to \Omega_2}(t) = -F_{\Omega_2 \to \Omega_1}(t)$.

♣ DEM. Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então
$F_{\to \Omega_2}(t) = F_{\Omega_1 \to \Omega_2}(t) + F_{\Omega^c \to \Omega_2}(t)$ e
$F_{\to \Omega_1}(t) = F_{\Omega_2 \to \Omega_1}(t) + F_{\Omega^c \to \Omega_1}(t)$.
Pela aditividade e a segunda lei de Newton, $\mathrm{RD}(\Omega) = F_{\to \Omega}(t) = F_{\Omega^c \to \Omega}(t) = F_{\Omega^c \to \Omega_1 \cup \Omega_2}(t) = F_{\Omega^c \to \Omega_1}(t) + F_{\Omega^c \to \Omega_2}(t) = F_{\to \Omega_2}(t) - F_{\Omega_1 \to \Omega_2}(t) + F_{\to \Omega_1}(t) - F_{\Omega_2 \to \Omega_1}(t) = \mathrm{RD}(\Omega_1 \cup \Omega_2) - F_{\Omega_1 \to \Omega_2}(t) - F_{\Omega_2 \to \Omega_1}(t) \Rightarrow F_{\Omega_1 \to \Omega_2}(t) = -F_{\Omega_2 \to \Omega_1}(t)$.

Movimento do centro de massa (Modelo de Newton)

♣ O movimento do centro de massa de um corpo é o mesmo de o de uma massa pontual, cuja massa é a massa total do corpo, e sobre a qual atua uma força igual a força resultante (i.e., total) no corpo: $m\frac{d^2}{dt^2}CM(t) = RD(\Omega_t) = F_{\to \Omega_t}(t)$. $(\star)$

O tensor de Cauchy -1-

♣ Seja Ω_1, Ω_2 disjuntos mas não mutuamente separados, e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Seja $\Sigma := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

Forças coesivas

♣ A força atuada por Ω_2 sobre Ω_1 é uma força de contacto em Σ, ou seja é representada por uma medida vectorial absolutamente continua respeito a dS, cuja densidade é $T(x)dS(x)$ (no tempo t).
♣ O vector T so depende da posição $x \in \Sigma$ e da normal $N(x)$: $T = \hat{T}(x, N)$.
♣ Fixado N, $x \mapsto T(x, N)$ é continuo.
T é chamado força interna (ou coesiva, ou das tensões internas) em x na direcção N.

Lemma 1

♣ Para todos os $x \in \Omega$ and todos os $N \in \mathbb{S}^2$ ($|N| = 1$) temos: $T(x, N) = -T(x, -N)$. $(\star)$

O tensor de Cauchy -2-

Tomando $x = 0$ e $N = \underline{e}_i$, o vector $T(0, \underline{e}_i)$ tem 3 componentes $\sigma_{ji}, 1 \leq j \leq 3$, ou seja: $T(0, \underline{e}_i) = \sigma_{ji}\underline{e}_j$. Portanto $T_j(0, \underline{e}_i) = \sigma_{ji}$ é a componente j da força atuada pelo meio continuo em x num faceta de normal $\underline{e}_i$.

Tetraedro de Cauchy

♣ Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ um tetraedro de cume a origem 0, e dado pelos 3 outros pontos A_i no eixo $\underline{e}_i$. Portanto a base $A_1A_2A_3$ tem uma normal N, enquanto $0A_1A_2$ tem normal $-\underline{e}_3$, $0A_2A_3$ tem normal $-\underline{e}_2$, $0A_2A_3$ tem normal $-\underline{e}_1$.

♣ Temos tambem $N_i = N \cdot \underline{e}_i =$ o angulo entre $A_1A_2A_3$ e $0A_kA_l, k, l \neq i$.

♣ Para alem, a equação de $A_1A_2A_3$ é $N_ix_i = h$, onde h é a distância de $A_1A_2A_3$ a 0.

Equação do movimento de um contínuo

Teorema de Cauchy (linearidade das tensões)

Temos $T(x,N) = N_i T(x, \underline{e}_i) = \sigma_{ji} N_i \underline{e}_j$, ou $T_j(0,N) = \sigma_{ji} N_i$. $(\star)$

Equação do movimento, ou Conservação do momento linear

♣ Seja um contínuo de massa volumica $\rho(x,t)$ sobre o qual atua um força de densidade volumica $f(x,t)$. Portanto $\rho a = \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{D^2 x}{Dt^2} = f + \mathrm{div}\ \sigma$. As equações do corpo em equilibrio são $-\mathrm{div}\ \sigma = f$.

♣ DEM. Toma $\omega_t \subset \Omega_t$. Portanto $\int_{\omega_t} a(x,t)\rho(x,t)dx = \int_{\partial\omega_t} T(x,N;t)dS(x) + \int_{\omega_t} f dx$. Pelo Teorema da divergência e o teorema de Cauchy ($T = \sigma N$): $\int_{\omega_t} a(x,t)\rho(x,t)dx = \int_{\omega_t} (f - \mathrm{div}\ \sigma)dx$, $\forall \omega_t \Rightarrow$ forma local.

Simetria do tensor de Cauchy, ou Conservação do momento cinetico

O tensor de Cauchy é simmetrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. $(\star)$

Conservação da Energia cinética

Potência das tensões internas

Para qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, a potência das tensões internas é igual à $\mathcal{P}_i(\omega_t) := \int_{\omega_t} (\sigma \cdot d) dx$, com $d := \nabla^S v$ a taxa de deformação associadas à velocidade v (não devem ser pequenas!).

Teorema: Conservação da Energia cinética

Para qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$ e num qualquer referêncial inercial, a derivada com o tempo da energia cinética é igual à suma das potência das forças externas de volume f e de contacto T atuadas no sistema, menos $\mathcal{P}_i(\omega_t)$.

Forma global (num referêncial inercial, $\forall \omega_t \subset \Omega_t$)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{\rho v^2}{2} dx = \int_{\omega_t} (f \cdot v - \sigma \cdot d) dx + \int_{\partial \omega_t} \sigma N \cdot v dS(x).$$

♣ DEM. Utilisa-se a equação do movimento, e integrações por parte e o facto de $\sigma \cdot \nabla v = \sigma \cdot d$ (pela simetria de σ).

Conservação da Energia total

Lei: Primeiro princípio da termodinamica

$\forall$ sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, existe uma funcção "energia interna" especifica e (i.e., por unidade de massa) tal que a derivada com o tempo da suma da energia interna e da energia cinética seja igual à suma das potência das forças externas de volume f e de contacto T atuadas no sistema mais a suma das contribuições por unidade de tempo de calor volumico (i.e. fonte de calor Q mais radiação r) e da contribuição de calor χ na superficie.

Lemma: $\exists$ fluxo de Calor J t.q. $\chi = -J \cdot N$. (Cf. Cauchy)

Forma global (num referêncial inercial, $\forall \omega_t \subset \Omega_t$)

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(e + \frac{v^2}{2})dx =$$
$$\int_{\omega_t}(f \cdot v + Q + r)dx + \int_{\partial\omega_t}(\sigma N \cdot v - J \cdot N)dS(x) \ (\star).$$

Forma local (derivada material da energia interna)

$$\rho\frac{De}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r - \operatorname{div} J \text{ em } (x,t) \in \Omega_t \times [0,T].$$

Conservação da Energia total como princípio primeiro

♣ DEM. Utilisa-se a eq. do movimento, e integrações por partes.

Pela conservação da Energia, a conservação da massa e do momento linear

♣ A invariança de Galileo ou inercial diz que a forma global deve ser invariante por transformação $v \to v + v_0$ one v_0 é uma velocidade constante. Portanto substituimos v por $v + v_0$ em $(\star)$. Por $\partial_t v_0 = \nabla v_0 = 0$ obtemos a forma local:

$$(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\ v)\frac{v_0^2}{2} + v_0(v(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\ v) + \rho \frac{Dv}{Dt} - f - \mathrm{div}\ \sigma) = 0.$$

♣ Pela arbitrariedade de v_0 obtemos:

- Massa: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\ v = 0$,
- Momento linear: $\rho \frac{Dv}{Dt} - f - \mathrm{div}\ \sigma = 0$.

As 3 leis de conservação: forma generica

♣ Seja C_M uma quantidade extensiva do sistema no ponto material M, de densidade especifica $c_M(t) = c(x,t)$.

♣ A conservação de C_M screve se como:

$$\int_{\omega(t)} \partial_t(\rho c)(x,t)dx = \int_{\omega(t)} \eta^c(x,t)dx - \int_{\partial\omega(t)} \xi^c \cdot N dS(x),$$

onde (N é a normal exterior a $\omega(t)$)

- η^c: taxa de producção (≥ 0) ou destruição (≤ 0) de C_M por unidade de volume
- ξ^c: flusso de C_M atravez de $\partial\omega(t)$ por unidade de area e tempo

As 3 leis

Quantidade(C_M)	Flusso :ξ^c	Fonte :η^c
Massa(ρ)	ρv	0
Momento linear(ρv)	-$\sigma + \rho v^2$	f
Energia interna(ρe)	J+$\rho e v$	Q+r+$\sigma \cdot d$

Equação do Calor

Interpretação fisica da energia interna

A energia interna de um ponto material representa a suma de todas a energias (cinética, potencial) das moleculas do ponto material.

Equação do Calor

Tomando $e = cT$, com c o calor especifico, e T a temperatura, temos pela Lei de Fourier $J = -k\nabla T$ e a forma local da conservação da Energia :

$$\boxed{\rho c \frac{DT}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r + k\Delta T}.$$

Observa-se que

- $\frac{DT}{Dt} = \partial_t T + \nabla T \cdot v$ (tomar conto do termo de transporte)
- $\sigma \cdot d$ representa o aquecimento devido ao trabalho das tensões
- Equação do Calor é acoplada com a do movimento.

Simplificações usuais

Sistema no reposo: $v = \nabla v = d = 0$ e portanto $\frac{DT}{Dt} = \partial_t T$.
♣ Em deformações infinitesimais: $\frac{D}{Dt} = \partial_t$ se
$|\nabla T| \sim |\nabla v| \sim |\nabla u| \ll 1$.

Segunda Lei da termodinamica -1- Introducção

Preâmbulo

A 1^a Lei da termodinamica é um princípio em relação a conservação da **quantidade de energia**. Por sua vez, a 2^a Lei da termodinámica nos diz algo sobre a **qualidade da energia**. O princípio é o seguinte: havendo a conservação da energia total de um sistema pela primeira Lei, o 2^o princípio nos diz que a parte da energia "utilizavél" diminui enquanto a parte "inutilizaél" aumenta.

♣ Em termos microscopicos, a 2^a Lei da termodinámica nos diz que um sistema tende a evoluir a mais desordem, disorganização, caos. Esta evolução não pode voltar atraz: chama-se a **irreversibilidade** do processo.

♣ Portanto a 2^a Lei da termodinámica da uma orientação ao tempo (fora dos sistemas reversíveis, onde "não ha tempo".)

♣ Exemplo: o Calor vai da parte quente a parte fria, e não o oposto (sem outras forças a atuar no sistema).

Segunda Lei da termodinamica -2- Introducção

Energia "utilizavél"

E basicamente a energia que se transforme em trabalho (tipicamente: ativar um pistão) necessario para a producção, crescimento, reparação, etc., de subsistemas.

Energia "inutilizavél"

Os processos indicados acima não existem sem gastar energia (tipicamente: por dissipação termica, atrito, etc.) Esta parte consiste em energia perdida, por não ser transformável.

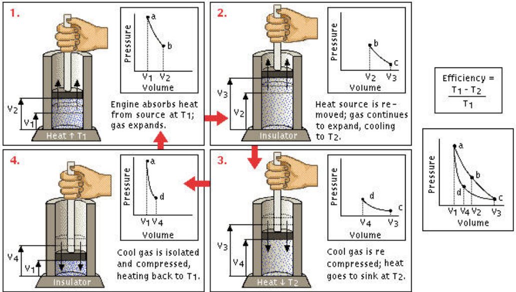
Entropia

A **entropia** é uma medida da parte "inutilizavél" da energia de um sistema. Portanto é uma quantidade escalar que aumenta com esta ultima energia. Por isso, diz-se que a entropia mede o desordem de um sistema.

Segunda Lei da termodinamica -3-: Estados em equilibrio

Máquina de Carnot

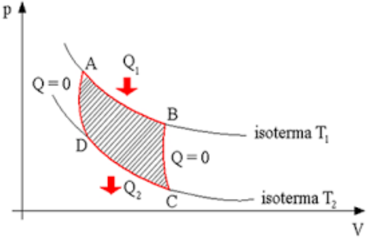
Até meados do século XIX, acreditava-se ser possível a construção de uma máquina térmica ideal, que seria capaz de transformar toda a energia fornecida em trabalho, obtendo um rendimento total (100%). Para demonstrar que não seria possível, o engenheiro N. Carnot (1796-1832) propôs uma máquina térmica teórica que se comportava como uma máquina de rendimento máximo.



♣ Este ciclo seria composto de quatro processos

♣ Consideramos o caso idal onde não ha atrito em nenhum dos quatros.

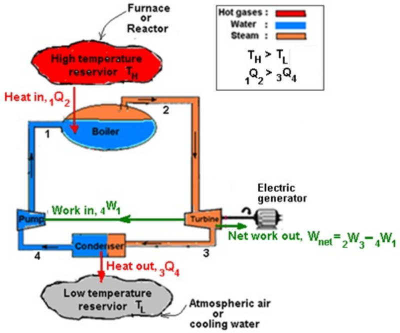
Segunda Lei da termodinamica -4-: Ciclo de Carnot

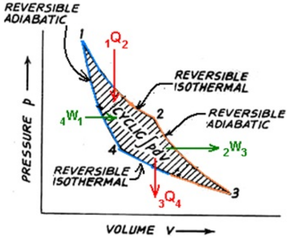


♣ Medimos que: $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$
♣ Pela 1^a Lei, o rendimento é $\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ (partes utíl/fornecida da energia em saida)$= 1 - \frac{T_2}{T_1}$
♣ $100\% \Leftrightarrow T_2 = 0$ ou $T_1 = \infty$ (fisicamente impossível)

- A-B: Uma expansão **isotérmica** reversível. O sistema recebe calor da fonte de aquecimento
- B-C: Uma expansão **adiabática** reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas
- C-D: Uma compressão isotérmica reversível. O sistema cede calor para a fonte de resfriamento
- D-A: Uma compressão adiabática reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas

Segunda Lei da termodinamica -5-: Máquina de Carnot





Segunda Lei da termodinamica -6-: Consequências

Existência de energia "inutilizavél"

O ciclo ideal de Carnot mostre-nos que mesmo sem atrito, ou seja no caso de uma máquina perfeita **não é possível** transferir todo o Calor fornecido em trabalho utíl, pelo que existerá sempre uma parte da energia "inutilizavél".

Ciclo real (A,B,C,D em equilibrio)

Introduzimos a forma diferêncial $\frac{\delta Q}{T}$. Num ciclo de Carnot temos $\oint_{ABCD} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$. Sendo esta forma fechada, é exata, i.e. existe uma funcção escalar S (dita "de estado") tal que $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

♣ Num sistema real (con atrito) teriamos $Q_1' \geq Q_1$ e $Q_2' \leq Q_2$.

Portanto num sistema real, i.e., não reversível: $\frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_2'}{T_2} - \frac{Q_1'}{T_1} \leq 0$.

♣ Logo, num processo real do estado A ao estado B temos

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\mathrm{irrev}} + \int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\mathrm{rev}} = \oint_A^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\mathrm{irrev}} \leq 0, \quad \forall A, B$$

$\Rightarrow \boxed{\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} - dS\right) \leq 0,\ \forall A, B}$: Relação de Clausius-Plank.

Segunda Lei da termodinamica -7- 2^o Princípio

♣ No âmbito da Mecânica racional, assumimos a validade de Clausius-Plank mesmo fora do equilibrio.

2^o Princípio da Termodinamica: $\exists S$ (a entropia) t.q $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$.

Para um qualquer sistema material $\omega_t \subset \Omega_t$, existe uma funcçã "entropia" especifica s tal que a derivada com o tempo da entropia do sistema seja maior ou igual à suma das contribuições por unidade de tempo de calor volumico e do fluxo de calor J atuados no sistema, ambos divididos pela temperatura.

Forma global

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho s dx \geq \int_{\omega_t} \frac{Q+r}{T} dx - \int_{\partial\omega_t} \frac{J \cdot N}{T} dS(x).$$

Forma local

♣ Pelo teorema de Transporte, $\boxed{\forall (x,t) : \rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{Q+r}{T} - \text{div}\,\left(\frac{J}{T}\right)}$.

Segunda Lei da termodinamica 8- Energia livre

Desigualdade de Clausius-Duhem

Pela conservação da energia (forma local):

$$\boxed{\forall \text{ referêncial inercial, } \forall(x,t) : \rho T \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{De}{Dt} \geq -\sigma \cdot d + J \cdot \frac{\nabla T}{T}}$$

(Nota: $\operatorname{div}\,(\frac{J}{T}) = \frac{1}{T}\operatorname{div}\, J - J \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \frac{1}{T}\operatorname{div}\, J + J \cdot \nabla \frac{1}{T}$).

Energia livre de Helmholtz

Definida como $\boxed{h := e - Ts}$.

2^o Princípio da Termodinamica em forma local

Pela desigualdade de Clausius-Duhem: em qualquer referêncial inercial temos: $\boxed{\forall(x,t) : 0 \leq \sigma \cdot d - \rho \left(\frac{Dh}{Dt} - s\frac{DT}{Dt}\right) - J \cdot \frac{\nabla T}{T}}$.

Dissipação mecânica

Definida como $\boxed{\mathcal{D} := \sigma \cdot d - \rho \frac{Dh}{Dt} \geq 0}$ ($T =$constante em C.-D.).

Segunda Lei da termodinamica -7a- Irreversibilidade

Conservação da Entropia

Podemos tambem exprimir o segundo princípio na forma seguinte:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \eta^s - \operatorname{div} \xi^s,$$

onde

- η^s: fonte volumica de entropia (processo interno ao sistema), ou taxa de producção local (= dissipação local)
- ξ^s: fluxo local de entropia (do ou para o exterior) (tipicamente: $\xi^s = \frac{J}{T}$ em primeira aproximação)
- Clausius-Plank / Duhem implica que: $\eta^s \geq \frac{Q+r}{T}$

Segunda Lei da termodinamica -9- Modelização

Regra de modelização

Uma lei constitutiva (ou de comportamento) de um modelo deve sempre ser amissível pelo 2^o princípio da Termodinâmica, ou seja deve satisfazer à desigualdade de Clausius-Duhem.

Exemplo

Assumimos que $e = \hat{e}(F, s)$ e que $v = 0$. Portanto C.-D. implica que $\rho \frac{Ds}{Dt}(T - \frac{\partial e}{\partial s}) - J \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0$. Portanto a escolha

$$\left\{ \begin{array}{lcl} J & = & -k\nabla T \text{ (Fourier)} \\ T & = & \frac{\partial e}{\partial s} \end{array} \right. \quad \text{é consistente.}$$

♣ Geralmente, para uma transformação isovolumica, a unica maneira de garantir a desigualdade é de tomar $\boxed{T := \frac{\partial e}{\partial s}}$ (pode ser visto como uma definição da temperatura).

♣ Outra interpretação (Liu, 1972): T^{-1} é um multiplicador de Lagrange relativo a conservação da energia.

Segunda Lei da termodinamica -10- Princípo de maxima entropia maxima

♣ Seja a **energia total** $\mathcal{E} := E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$, onde $E_{\text{int}} := \int_{\omega_t} \rho e dx$, $E_{\text{cin}} := \int_{\omega_t} \rho \frac{v^2}{2}$, $E_{\text{pot}} := \int_{\omega_t} -f \cdot u dx + \int_{\partial\omega_t} -g \cdot u dS(x)$. A 1^a Lei escreve-se como (i) $\frac{d}{dt}\mathcal{E} = \int_{\omega_t} (Q + r) dx - \int_{\partial\omega_t} J \cdot N dS(x)$ e a 2^a como (ii) $\frac{d}{dt} S \geq \int_{\omega_t} \frac{Q+r}{T} dx - \int_{\partial\omega_t} \frac{J \cdot N}{T} dS(x)$, com a **entropia** $S := \int_{\omega_t} \rho s dx$.

Princípo de maxima entropia maxima de Clausius (1822–1888)

Consideramos um sistema adiabatico (i.e., $J = r = 0$) sem fontes de Calor volumicas (i.e., $Q = 0$). Portanto, a 1^a Lei, (i), significa a conservação no tempo de $\mathcal{E}$. i.e., $\frac{d}{dt}\mathcal{E} = 0$ enquanto a 2^a Lei, (ii), o crescimento no tempo de S, i.e., $\frac{d}{dt} S \geq 0$.

♣ Esta observação conduz Rudolf. E. Clausius a escrever: "The energy of the universe is constant, and the entropy of the universe tends to a maximum".

Segunda Lei da termodinamica -11- Princípo de maxima entropia/minima energia

Princípo de maxima entropia/minima energia

Consideramos um sistema com $Q + r = 0$, de volume constante e de temperatura constante $T = T_0$ na fronteira (só). Pela 2^a Lei, $\frac{d}{dt}(T_0 S) \geq -\int_{\partial\Omega_t} J \cdot N dS(x)$, i.e. temos $\frac{d}{dt}\mathcal{A} \leq 0$, $\mathcal{A} := \mathcal{E} - T_0 S$:

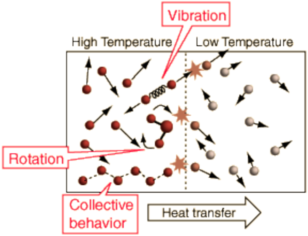
- Minimiza-se $\mathcal{E}$ (energia) a entropia constante, ou
- Maximiza-se S (entropia) a energia constante.

♣ Notamos:

- $T = \mathrm{cst}, f, g = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \int_{\omega_t}(\rho h + \rho\frac{v^2}{2})dx : \frac{d}{dt}\mathcal{A} \leq 0$ and $\int_{\omega_t} \rho\frac{v^2}{2} dx \leq 0 \Rightarrow \frac{Dh}{Dt} \leq 0$. (cf. fluido Newtoniano) .
- Pode-se maximizar S e minimizar $\mathcal{E}$ simultaneamente.
- Existe sistemas onde maximizar S é contraditório com minimizar $\mathcal{E}$: neste caso, um princípio só é que ganha.
- Não é preciso chegar aos valores minimos/maximos: é suficiente ter $\mathcal{E}$ a diminuir, enquanto S aumentar.

Segunda Lei da termodinamica -12- Temperatura

♣ A relação $T := \frac{\partial e}{\partial s}$ vem do 2^o Princípio: é uma definição macroscopica da temperatura, atravez a Lei de comportamento $s \mapsto e(\cdot, s)$. Portanto a noção de temperatura segue a de entropia e de energia interna. Contudo, nem s nem e foram definidas a escada macroscopica (foi só postulada suas existências).



♣ A temperatura é a tendência de um ponto material ceder energia espontaneamente à propria vizinhança.

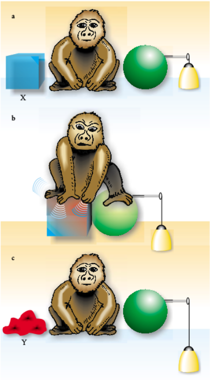
♣ Ambos s e T têm uma definição à escada microscopica.

Cadeia de decaimento da energia

♣ $E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} \looparrowright E_{\text{cin}} \looparrowright \mathcal{D} :=$ dissipação de Calor

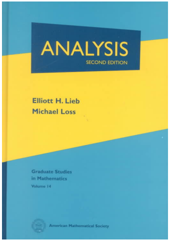
♣ Energias utilizaveis acabam por se transformar em dissipação termica, aumentando a entropia do sistema

Segunda Lei da termodinamica -13- Abordagem axiomatico



♣ O peso significa que só foi realizado trabalho (força do Gorilla considerada infinita)

♣ Devido a Elliott H. Lieb e Jakob Yngvason (*Phys. Today 53 (4), 32 (2000)*)



Transformação adiabatica

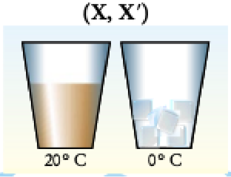
Definida como um processo termodinamico de um estado X (de equilibrio) de um sistema a um estado Y deste sistema, onde

- não existe transferência de Calor com o exterior ao sistema (i.e., é isolado)
- trabalho tem sido realizado (sobre o sistema pelo exterior ou sobre o do exterior sobre ou sistema).

Segunda Lei da termodinamica -14- Abordagem axiomatica

Relação logica entre dois estados: $X \prec Y$

Se existe uma transformação adiabatica que faz evoluir o sistema do estado X ao estado Y, escrevemos que $X \prec Y$ e digamos que X precede Y.



Estados conjuntos (combinados)

Seja X e X' dois estados. Portanto o estado conjunto é o par (X, X').

Entropia

Sejam un conjunto de pares (X, Y) onde $X \prec Y$. Pela 2^a Lei, podemos codificar esta lista numa funcção S definida sobre todos o estados do sistema tal que $\boxed{X \prec Y \Leftrightarrow S(X) \leq S(Y)}$ (temos $=$ se a transformação estiver reversível).

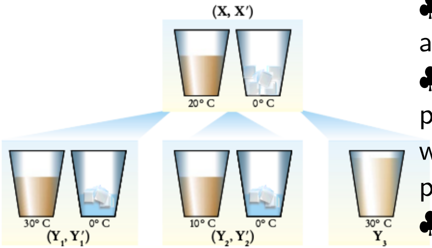
Segunda Lei da termodinamica -15- Additividade da entropia

♣ Pelo 2^o princípio, a entropia S deve verificar a propriedade de aditividade: $S(X, X') = S(X) + S(X')$.

♣ $\forall (Y, Y')$ tal que $X \prec Y$ e $X' \prec Y'$. Portanto $(X, X') \prec (Y, Y')$.

♣ O oposto é falso: $\exists (X, X') \prec (Y, Y')$ sem que $X \prec Y, X' \prec Y'$.

♣ Portanto $S(X) + S(X') \leq S(Y) + S(Y')$ (mesmo se $S(X) \geq S(Y)$).



Exemplos (precedência adiabatica)

♣ Misturando (adiabatico!) pode-se aquecer whiskey e fundir gelo

♣ Colocando os 2 copos em contacto pode-se aquecer o gelo e arrefecer o whiskey: o estado conjunto é dado por uma transformação adiabatica.

♣ Mas arrefecer o whiskey sozinho não é adiabatico (e $S(X) \geq S(Y_2)$).

Segunda Lei da termodinamica -16- Scaling da entropia

Grandeza intensiva ou extensiva

As propriedades intensivas são propriedades físicas que não dependem da extensão do sistema (i.e., do scaling), isto é, são independentes do tamanho ou da quantidade de matéria de um dado sistema. Jà as propriedades extensivas, dependem da extensão do sistema, isto é, variam de forma proporcional com o tamanho ou a quantidade de matéria existente num dado sistema.

- Propriedades intensivas: temperatura (T em K), pressão (p em Pa), massa volúmica (ρ em kg/m^3), ponto de ebulição.
- Propriedades extensivas: massa (m em kg), volume (V em m^3), energia interna (U em J), **entropia** (S em J/K), capacidade calorífica (Cp ou CV em J/K)

A entropia é uma grandeza extensíva: $S(\lambda X) = \lambda S(X)$.

Segunda Lei da termodinamica -17- Propriedades

Sumario das propriedades basicas de $\prec$

- Reflexividade: $X \prec X$
- Transitividade: $X \prec Y$ and $Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z$
- Junção adiabatica: $X \prec Y$ and $X' \prec Y' \Rightarrow (X, X') \prec (Y, Y')$
- Extenção adiabatica: $X \prec Y \Rightarrow \lambda X \prec \lambda Y$
- Corte adiabatico: $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, X \prec ((1-\lambda)X, \lambda X)$
- Recombinação adiabatica: $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, ((1-\lambda)X, \lambda X) \prec X$

Segunda Lei da termodinamica -18- Hipótese de Comparação

Hipótese de Comparação

Seja X e Y estados (em equilibrio) de um sistema (massa total e composição quimíca dadas), simples ou combinados. Então $\boxed{X \prec Y \text{ ou } Y \prec X}$.

♣ Sejam X_0, X e X_1, 3 estados de um sistema. Pelas Hipótese de Comparação e as propriedades de corte e de recombinação, temos $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$, $X \prec ((1-\lambda)X_0, \lambda X_1)$ ou $((1-\lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X$.

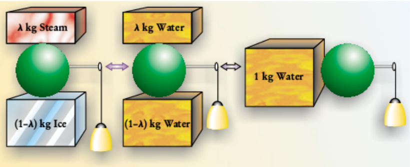
♣ Seja X_0, X e X_1 estados (em equilibrio) de um sistema tal que $X_0 \prec X \prec X_1$ (exemplo: mesma massa de aqua no estados de gelo, líquido, e vapor).

Segunda Lei da termodinamica -19- Existência

Teorema de existência de um limite inferior à entropia

Existe pelo menos um $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $((1-\lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X$.

♣ Logo, $(1-\lambda)S(X_0) + \lambda S(X_1) \leq S(X)$. Tomando $S(X_0) = 0$ e $S(X_1) = 1$ como entropias de referência dos estados de referência X_0 e X_1 (equivale a dizer que $S(X_0)$ e $S(X_1)$ são os valores minimo e maximo da entropia para este sistema), temos $\lambda \leq S(X)$.



♣ Extraimos or introduzimos energia no sistema sob a forma de trabalho só, por exemplo com uma máquina de Carnot reversível que funciona entre as parte do sistema com alta e baixa temperaturas.

Segunda Lei da termodinamica -20- Definição da entropia

Unicidade da entropia

$$\boxed{S(X) := \lambda_{\max} = \max\{\lambda : ((1-\lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X\}}.$$

♣ Corollario (reversibilidade adiabatica):
$X \prec ((1-\lambda_{\max})X_0, \lambda_{\max}X_1)$ (visto que temos $=$).

Definição da entropia

Seja $X_0 \prec X \prec X_1$.
DEF: A entropia $S(X)$ do estado X de um sistema é igual à fração maxima de X_1 necessaria par transformar X_1 em 1kg de X com ajuda de $(1 - S(X))$ de X_0.

♣ Nota-se que esta definição é puramente derivada de princípios lógicos. Em particular, não se fala nem de temperatura, nem de energia ou de Ciclos de Carnot reversíveis.

Mecânica dos fluidos -1- O fluido Newtoniano

Definições

- Um continuo é dito fluido se o tensor das tensões é uma funcção isotropa de $d = \nabla^S v$. i.e., $\sigma = \hat{\sigma}(d)$.
- Um fluido é dito Newtoniano se $\hat{\sigma}(d)$ é afina em d.
- Um fluido é dito incompressivél se $\mathrm{tr}\ d = \mathrm{div}\ v = 0$.

♣ Pela estrutura de uma forma quadratica isotropa, um fluido Newtoniano verifique $\sigma \cdot d = -p\,\mathrm{tr}\ d + A(\mathrm{tr}\ d)^2 + B\,\mathrm{tr}\ d^2$. Logo, sua Lei constitutiva é $\boxed{\hat{\sigma}(d) = -p\mathbb{I} + 2\mu d + \lambda\,\mathrm{tr}\ d\mathbb{I} = -p\mathbb{I} + \mathbb{A}d.}$

Pressão

♣ p é chamada pressão hidrostática: $p = \hat{p}(T, \rho)$

♣ Para fluido incompressivél, a pressão é definida como menos um terço do traço das tensões, i.e. $\boxed{p := -\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\ \sigma.}$ A partida, não existe uma lei constitutiva entre p e d, pois que $p = \tilde{p}(x, t)$ é considerado um multiplicador de Lagrange pelo vinculo $\mathrm{div}\ v = 0$.

Mecânica dos fluidos -2- Estatica

♣ No reposo, i.e., se $v = 0$, temos $d = 0$ e portanto $\sigma = -p\mathbb{I}$.

Lema 1

Seja um fluido no reposo e supomos que as forças de volume derivam de um potencial, i.e., $f = -\nabla\mathcal{P}$. Portanto $p + \mathcal{P} = \mathrm{cste}$.

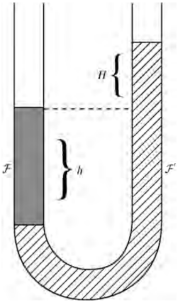
♣ DEM. Logo, pelo equilibrio $-\operatorname{div}\, \sigma = f$.

♣ Caso da gravidade: $\mathcal{P} = \rho_0 g z$ onde ρ_0 é a densidade constante du fluido.

♣ Fluido no reposo com fronteira livre:
$p_a + \mathcal{P} = \mathrm{cste} \Rightarrow \mathcal{P} = \mathrm{cste}$. Logo $z = \mathrm{cste}$.

♣ Caso de um fluido em rotação mas com $d = 0$ numa base em rotação (i.e. imovél com respeito ao suporte): acrescenta-se as forças centrifugas, $\mathcal{P} = \rho_0 g z - \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2}$. Logo, $z = \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2g} + \mathrm{cste}$: perfíl=paraboloide de revolução.

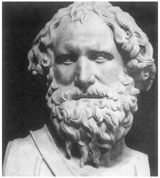
Mecânica dos fluidos -3- Estatica



Equilibrio entre 2 fluidos

Temos $f = \nabla p$ and $f = -\rho g \underline{e}_z$.
Logo, $p = p_a - \rho g z$ e portanto:

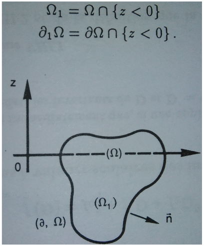
$$\rho h = \rho'(h + H).$$



Princípio de Archimedes (287-212 BC. Syracusa (Sicilia), Alexandria (Grecia))

A suma das forças de contacto atuadas sobre um corpo inteiramente ou parcialmente imerso num fluido no reposo é uma força vertical igual a menos o peso do volume de agua deslocado, e atuando no centro de massa G do volume imerso.

Mecânica dos fluidos -4- Princípio de Archimedes



♣ Seja $\Gamma = \{z = 0\} \cap \Omega_1$ e N a normal exterior á $\partial_1\Omega$.

DEM. (Archimedes). Trata-se de calcular $A = \int_{\partial\Omega_1 = \partial_1\Omega\cup\Gamma} \sigma N dS(x) = \int_{\partial_1\Omega} -p\mathbb{I}N dS(x) - \int_\Gamma p_a \mathbb{I}\underline{e}_z dS(x) = \int_{\partial_1\Omega}(\rho_0 g z - p_a)\mathbb{I}N dS(x) - \int_\Gamma p_a \mathbb{I}\underline{e}_z dS(x) = \int_{\partial\Omega_1}(\rho_0 g z - p_a)\mathbb{I}N dS(x)$, pois que $z = 0$ em Γ.

Pelo teorema da divergência,
$A = \int_{\Omega_1} \nabla(\rho_0 g z) dx = \int_{\Omega_1} \rho_0 g \underline{e}_z dx = m(\Omega_1) g \underline{e}_z$.

Para alem, $\int_{\partial\Omega_1 = \partial_1\Omega\cup\Gamma} \overrightarrow{Gx} \times (\sigma N) dS(x) = \left(\int_{\Omega_1} \overrightarrow{Gx} dx\right) \times \rho_0 g \underline{e}_z = 0$, pela definição intrinseca do centro de massa.

Mecânica dos fluidos -5- Navier-Stokes

Equação de Navier-Stokes geral ou **compressível**

Pela equação do movimento, temos
$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + f = -\nabla(p + \lambda \operatorname{tr} d) - 2\mu \operatorname{div} d + f.$
Lembrando que $\operatorname{tr} d = \operatorname{div} u$ e $\operatorname{div} \nabla^T v = \nabla \operatorname{div} v$, temos a equação de Navier-Stokes **compressível**:
$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v + \nabla \left(p - (\lambda + \mu) \operatorname{div} v\right) = f,}$ $p = \hat{p}(\rho, T) = \alpha \rho T$
$\Rightarrow$ acoplado com
(i) (Massa) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$ e
(ii) (Energia/Calor) $\rho c \frac{DT}{Dt} = \sigma \cdot d + Q + r + k \Delta T$

Restrições

A forma bilinear $\sigma \cdot d$ que aparece na formulação fraca deve ser fortemente elitica. E suficiente pedir estabilidade puntual. Isto vale, pois que $\mathbb{A} \geq 0$: $\mathcal{P}(d) := \mathbb{A} d \cdot d \geq 0, \ \forall d$ (i.e., a parte principal). Escrevendo $d = d^{\text{dev}} + d^{\text{sph}}$ com $d^{\text{sph}} := \mathbb{I} \operatorname{tr} d/3$:
$\mathcal{P}(d) = 2\mu d^{\text{dev}} \cdot d^{\text{dev}} + (\lambda + 2/3\mu)(\operatorname{tr} d)^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mu, \lambda + \frac{2\mu}{3} \geq 0}.$

Mecânica dos fluidos -6- Navier-Stokes incompressível

♣ Incógnitas: (v, p). (Caso compressível: tambem T e ρ).

Equação de Navier-Stokes **incompressível**: $\mathrm{div}\ v = 0$

$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v + \nabla p = f \quad (\,\mathrm{div}\ v = 0),}$ onde $\rho = \rho_0 = \mathrm{cst}$ e p obtido a partir de v e f como $\Delta p = \mathrm{div}\ f - \rho_0 \nabla v \cdot \nabla^T v$.

$\left(\frac{Dv}{Dt}(t) = \frac{d}{dt} v^E(\Phi(X,t),t) = \partial_t v(x,t) + (v(x,t) \cdot \nabla) v(x,t)\right.$, onde $v^E = v$. Com indices: $\left.\frac{Dv_i}{Dt} = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i\right)$.

ENS-i: propriedades

- Translação espacio-temporal: $x \to x + a, \quad t \to t + \tau$
- Isometrias (rotação/reflexão): $x \to Qx, Q^T Q = \mathbb{I}$
- Transformação de Galileo: $x \to x - v_0 t, \quad v \to v(x - v_0 t, t) + v_0$
- Scaling $v(x,t), p(x,t)$ solução $\Rightarrow \lambda v(, \lambda^2 t), \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ tambem é solução

Mecânica dos fluidos -7- Navier-Stokes incompressível

ENS-i: condições limites

Seja a velocidade relativa: $v_r = v - V_{\partial\Omega_t}$

- Fluido viscoso: $v_r = 0$ em $\partial\Omega_t$
- fluido perfeito: $v_r \cdot N = 0$
- Condição inicial: $(v(x,0), p(x,0)) = (v_0(x), p_0(x))$.

Adimensionalisação, Numero de Reynolds

Define $\hat{x} = x/L, \hat{t} = t/\tau, \hat{v} = v/U \ (U = L/\tau)$,
$\hat{p} = p/U^2, \hat{f} = f\tau^2/L$: a ENS-c é re-escrita como (sem os $\wedge$)

$$\begin{cases} \frac{Dv}{Dt} + \nabla p - \mathrm{Re}^{-1}\Delta v &= f \\ \mathrm{div}\ v &= 0 \end{cases}.$$

♣ O escoamento não depende de ρ_0, L, U, μ separadamente, mas sim do numero sem dimençóes $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{L^2\rho_0/\mu}{L/U}} = \frac{\text{tempo viscoso}}{\text{tempo cinetico}}$.

Mecânica dos fluidos -8- ENS-i-Conservação da energia

♣ Termo não linear: $B(u,v) = (v \cdot \nabla)u$: $\frac{Dv}{Dt} = \partial_t v + B(v,v)$.

Lema 2: $\int_\Omega B(u,v) \cdot u dx = 0$ se $v = 0$ em $\partial\Omega$ e $\operatorname{div} v = 0$ em Ω.

DEM. Temos $\int_\Omega v_i \partial_i u_j u_j dx = \int_{\partial\Omega} v_i N_i u_j u_j dS(x)$
$- \int_\Omega \partial_i (v_i u_j) u_j dx = - \int_\Omega \partial_i v_i u_j^2 dx - \int_\Omega v_i (\partial_i u_j) u_j dx \Rightarrow$
$2 \int_\Omega v_i \partial_i u_j u_j dx = - \int_\Omega (\operatorname{div} v) u^2 dx = 0$.

♣ Supomos v bastante regular. A energia cinética é igual a $\frac{1}{2}\|v\|_2^2$.

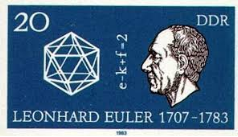
Lema 3: $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v\|_2^2 = -\mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|_2^2 + (f,v)_2$ se $u = 0$ em $\partial\Omega$.

DEM. Integramos, $\int_\Omega (\partial_t v + B(v,v)) \cdot v dx = \int_\Omega -\nabla p \cdot v dx$
$+ \int_\Omega (\mathrm{Re}^{-1}\Delta v + f) \cdot v dx = \int_\Omega p \operatorname{div} v dx - \int_\Omega \mathrm{Re}^{-1} \nabla v \cdot \nabla v dx$
$+ \int_\Omega f \cdot v dx$. Pelo Lema 2 e a incompressibilidade, temos
$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega \|v\|^2 dx = - \int_\Omega \mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|^2 dx + \int_\Omega f \cdot v dx$.

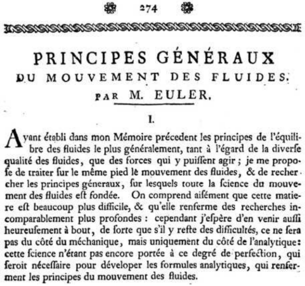
Mecânica dos fluidos -9- Navier-Stokes incompressível

Caso limite 1: $\mathrm{Re} \to \infty$: fluido perfeito: Eq. de Euler

Fluido sem dissipação viscosa, com turbulência...**não linear**:



(EE-i)
$$\begin{cases} \partial_t v + (v\nabla)\cdot v + \nabla p & = & f \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 \end{cases}$$



274

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précedent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverſe qualité des fluides, que des forces qui y puiſſent agir ; je me propoſe de traiter ſur le même pied lè mouvement des fluides, & de rechercher les principes géneraux, ſur lesquels toute la ſcience du mouvement des fluides eſt fondée. On comprend aiſément que cette matiere eſt beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'eſpère d'en venir auſſi heureuſement à bout, de ſorte que s'il y reſte des difficultés, ce ne ſera pas du côté du méchanique, mais uniquement du côté de l'analytique: cette ſcience n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui feroit néceſſaire pour déveloper les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

Caso limite 2: $\mathrm{Re} \to 0$: Eq. de Stokes

Velocidades e Re pequenos, fluido viscoso, **linear**:

(ES-i)
$$\begin{cases} \partial_t v + \nabla p - \mathrm{Re}^{-1}\Delta v & = & f \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 \end{cases}.$$

Mecânica dos fluidos -10- Stokes incompressível e estacionario (ES-i-est)

em $\mathbb{R}^3$

$$(\bigstar)\begin{cases} \mathrm{Re}^{-1}\Delta v - \nabla p & = & -f \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 \\ |v|, p & \to & 0 \quad \text{as} \quad r = |x| \to \infty \end{cases}.$$

Metodo 1: solução canonica

Seja $F \in \mathbb{R}^3$. Consideramos $(\bigstar)$ com $f = F\delta_0$ e definimos $\mathbb{V} := \frac{\mathrm{Re}}{8\pi}\left(\frac{\mathbb{I}}{r} + \frac{x\otimes x}{r^3}\right)$. Portanto $v = \mathbb{V}F, p = \frac{F\cdot x}{4\pi r^3}$ é solução.

Lema 4: $\mathrm{Re}^{-1}\Delta v - \nabla p = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

♣ DEM. Faz-se a mano.

Lema 5: $\mathrm{Re}^{-1}\Delta v - \nabla p = -F\delta_0$ em $\mathbb{R}^3$.

♣ DEM. Temos que ver se
$\mathrm{Re}^{-1}(\nabla v, \nabla w)_2 - (p, \mathrm{div}\ w)_2 = Fw(0),\ \forall w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$?

Mecânica dos fluidos -11- Stokes incompressível e estacionario em $\mathbb{R}^3$

Demonstração do Lema 5

$\mathrm{Re}^{-1}(\nabla v, \nabla w)_2 - (p, \operatorname{div} w)_2 = \int_{B_\epsilon(0)}(\mathrm{Re}^{-1}\nabla v \cdot \nabla w - p \operatorname{div} w)dx$ $+ \int_{B_\epsilon^c(0)}(\mathrm{Re}^{-1}\nabla v \cdot \nabla w - p \operatorname{div} w)dx = I + J$. Logo $|I| \le C\epsilon, C > 0$, pois $v \sim \frac{1}{r}, p \sim \frac{1}{r^2}$ e $dx = r^2 dr d\omega$. Para alem, $J = \int_{B_\epsilon^c(0)}(\nabla p - \frac{\Delta v}{\mathrm{Re}}) \cdot w dx + \int_{\partial B_\epsilon^c} \frac{\partial_N v}{\mathrm{Re}} w dS(x) + \int_{\partial B_\epsilon^c} p w N dS(x)$. Por Lema 4, $= \int_{\partial B_\epsilon^c}(\frac{\partial_N v}{\mathrm{Re}} - pN) w dS(x)$. Logo $x = r\underline{e}_r, N = -\underline{e}_r$ $\Rightarrow \partial_N v = \frac{\mathrm{Re}}{8\pi r^2}(\mathbb{I} + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)F$, $pN = \frac{-1}{4\pi r^2}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)F$. Já $\int_{\partial B_\epsilon^c}(\frac{\partial_N v}{\mathrm{Re}} - pN) w dS(x) = \mathcal{O}(\epsilon) + \frac{w(0)}{8\pi}\int_{S^2}(\mathbb{I} + 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) d\omega F$ $= \mathcal{O}(\epsilon) + \frac{w(0)}{8\pi}(4\pi\mathbb{I} + 3\frac{4\pi}{3})F = \mathcal{O}(\epsilon) + w(0)F$ (exprimir $\underline{e}_r$ na base Cartesiana para integrar). Deixar $\epsilon \to 0$.

Corollario: a solução de (★) é $v = \mathbb{V} \star f, p = \frac{x}{4\pi r^3} \cdot \star f$

DEM. Imediato, pois que $f = f \star \delta_0$.

Mecânica dos fluidos -12- ES-i-est em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Solução explicita no caso $f = 0$ (Papkovich–Neuber)

Seja o vector Φ e o escalar χ tais que $\Delta\Phi = \Delta\chi = 0$. Logo

$$\begin{cases} v(x) = 2\mathrm{Re}\left(\nabla(x \cdot \Phi + \chi)(x) - 2\Phi(x)\right) \\ p(x) = \mathrm{div}\ \Phi(x) \end{cases}$$ é solução.

♣ Exemplo:$\chi = 0$ e $x \cdot \partial_i \Phi - \Phi_i = 0$ em $\partial\Omega$ implica $v = 0$ em $\partial\Omega$.

♣ Seja $V := \{v \in H_0^1(\Omega) : \mathrm{div}\ v = 0\}$ e
$L_0^2(\Omega) := \{p \in L^2 : \int_\Omega p dx = 0\}$.

Teorema de existência no caso $v = 0$ em $\partial\Omega$.

Seja Ω conexo, Lipschitz, e $f \in H^{-1}(\Omega)$. Portanto
$\exists!(v, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$ solução de (ES-c) com $v = 0$ em $\partial\Omega$.

♣ DEM. Seja $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_2$ e L: $(L, w) = \langle f, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1}$.
Sendo a uma norma para H_0^1 e L linear e continua em V,
Lax-Milgram implica existência de um unico $(v, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$ tal que $a(v, w) = L(w)$. Logo $\langle -\Delta v - f, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0$, $\forall w \in V$.
Pelo teorema de de Rahm, $\exists p \in L^2(\Omega) : \nabla p = -\Delta v - f$.

Mecânica dos fluidos -13- ES-i-est em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Problema de minimização e multiplicador de Lagrange

A solução obtida e o unico minimo de $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$: $J(w) := \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega f \cdot w dx, \ \forall w \in V$. O gradiente de J em v é $\mathrm{Grad}\ J(v) := -\Delta v - f \in H^{-1}(\Omega)$. Visto que v minimza J no sub-espaço V de vectores com divergência nula, o vinculo é a mapa linear $\mathrm{div}\ : H_0^1(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$, pelo que o teorema dos multiplicadores de Lagrange implica que $\mathrm{Grad}\ J(v) = \Pi \circ \mathrm{div}$, com $\Pi \in \left(L_0^2(\Omega)\right)' = L_0^2(\Omega)$. Logo, $\exists p$:
$\mathrm{Grad}\ J(v)[w] = \langle \Pi \circ \mathrm{div}\ , w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$
$= (p, \mathrm{div}\ w)_2 = \langle -\nabla p, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ e portanto a pressão pode ser vista como um multiplicador de Lagrange para o vinculo $\mathrm{div}\ v = 0$.

Mecânica dos fluidos -14- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

$$(\blacksquare)\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t v + \nabla p - \mathrm{Re}^{-1}\Delta v & = & f \quad \Omega \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 \quad \Omega \\ v & = & 0 \quad \partial\Omega \\ v(0) & = & v_0 \end{array}\right. .$$

Formulação fraca (J.-L. Lions: 1928-2001)

Seja $v(\cdot,t) \in V$. Multiplicando ($\blacksquare$) por $w \in V$, temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)w(x)dx + a(v,w) = \int_\Omega f(x,t)\cdot w(x)dx,$$

onde $a(v,w) := \mathrm{Re}^{-1}\int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx$

♣ A mesma reescreve-se como uma ODE: procura-se $v(t)$ uma funcção em $]0,T[$ com valores em V tal que

$$(\square)\left\{\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}(v(t),w)_{L^2(\Omega)} + a(v(t),w) & = & (f(t),w)_{L^2(\Omega)}, \\ v(0) & = & v_0 \end{array}\right. ,$$

$\forall w \in V, 0 < t < T$, e onde v é continua em 0.

Mecânica dos fluidos -15- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Seja
$V \curvearrowright W := \{v \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega), \gamma_{\partial\Omega}(v)N = 0\}$.
Introduzimos $E_V^W := L^2(]0,T[;V) \cap \mathcal{C}([0,T];W)$.

Teorema de existência de uma solução fraca; formulação geral

Seja $V \subset W$, dois espaços de Hilbert. Seja $a(u,v)$ uma forma simetrica, bilinear, continua e coerciva em $V \times V$. Seja $T > 0$, $v_0 \in W$ e $f \in L^2(]0,T[;W)$. Portanto o problema (□) tem uma solução unica em E_V^W, e existe uma constante $C > 0$ tal que $\|v\|_{L^2(]0,T[;V)} + \|v\|_{\mathcal{C}([0,T];W)} \leq C \left(\|v_0\|_W + \|f\|_{L^2(]0,T[;W)}\right)$.

♣ Assumindo bastante regularidade, $(\partial_t v + \mathrm{Re}^{-1}\Delta v - f, w)_2 = 0$, $\forall w \in V$ e portanto temos (■) pelo teorema de de Rahm.

Mecânica dos fluidos -16- ES-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ $\forall t: \ \frac{dv(t)}{dt} \in V'$: $\forall w \in V : \langle \frac{dv(t)}{dt}, w\rangle_{V',V} := \Pi'(t) \in \mathcal{D}'([0,T])$, onde $\Pi(t) := (v(t), w)_{L^2(\Omega)} \in L^2(]0,T[)$. Temos $\Pi'(t) \in \mathrm{Der}\ \mathcal{C}([0,T])) : \langle \Pi'(t), \varphi(t)\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^T \Pi(t)\varphi'(t)dt$. Geralmente, $\Pi'(t) \notin L^1(]0,T[)$, pois $\mathrm{Der}\ \mathcal{C}([0,T])) \nsubseteq W^{1,1}(]0,T[)$.

♣ Se $v(t)$ for solução de ($\square$), vê-se logo que $\Pi' \in L^1(]0,T[)$, pois que $(f(t), w)_{L^2(\Omega)} - a(v(t), w) \in L^1(]0,T[)$. Logo $\langle \frac{dv(t)}{dt}, w\rangle_{V',V}$ $\in L^1(]0,T[)$, pelo que $\langle v(t), w\rangle_{V',V} := (v(t), w)_{L^2(\Omega)}$ $\in W^{1,1}(]0,T[) \curvearrowright \mathcal{C}([0,T])) \Rightarrow v$ é $\star$-fraco continuo com valores em $V' \Rightarrow$ tomar $v_0 \in V'$, pois $v(t) \rightharpoonup v(0) = v_0$ em V', $t \to 0$.

♣ Formulação fraca com funções test que dependem do tempo:

$$(\Diamond)\forall \psi \in \mathcal{C}_c(]0,T[;V) : 0 =$$
$$\int_0^T \left(\langle \frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)\rangle_{V',V} + a(v(t), \psi(t)) - \langle f(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}\right) dt.$$

Mecânica dos fluidos -17- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Consideramos $(\bigstar)$ $\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t v + B(v,v) + \nabla p & = & f = -\nabla \mathcal{P} \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 \\ \gamma_{\partial\Omega}(v) N & = & 0 \end{array}\right.$.

Lema 6:
$B(v,v) := (v\nabla)\cdot v = \mathrm{div}\ (v \otimes v) = \nabla \frac{|v|^2}{2} + (\mathrm{Curl}\ v) \times v$ e $\mathrm{div}\ B(v,v) = \nabla v \cdot \nabla^T v$.

DEM. Imediato por cálculo indicial.

Equação da vorticidade: $\omega := \mathrm{Curl}\ v$.

(cf. o vetor rotação infinitesimal em elasticidade).

♣ Tomando o curl de $(\bigstar)$, temos
$\partial_t \omega + \mathrm{Curl}\ (\omega \times v) = \partial_t \omega + (v\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)v = \frac{D\omega}{Dt} - (\omega\cdot\nabla)v = 0.$

♣ A $2D$, temos $\omega\cdot\nabla = 0$ e portanto $\frac{D\omega}{Dt} = 0$. Logo
$\int_\Omega \omega(x,t)dx = \int_\Omega \omega(x,0)dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot dL(x)$, por Stokes.

$\Rightarrow$ Há de resolver o sistema acoplado completo: $\Rightarrow \exists! v = \hat{v}(\omega)$.

Mecânica dos fluidos -18- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Lembrando-se de
$W := \{v \in L^2(\Omega) : \text{ div } v = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega), \gamma_{\partial\Omega}(v)N = 0\}$.

Leray decomposition

$L^2(\Omega) = W \bigoplus W^\perp, W^\perp = \{u \in L^2(\Omega) : \exists \varphi \in H^1(\Omega), u = \nabla\varphi\}$.

♣ Pois que $\nabla p \in W^\perp$, a projeção de ($\bigstar$) sobre W é
$v \in W \subset H_0^1(\Omega) : \partial_t v + \tilde{B}(v, v) = 0$, onde $\tilde{B}$ é a projecção de B sobre W. Depois: $p \in W^\perp : \Delta p = \text{ div } f - \rho_0 \nabla v \cdot \nabla^T v$.

Lema 7: Conservação da energia cinética $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\int_\Omega \|v\|^2 dx$

DEM. Temos $\frac{d}{dt}E_{\text{cin}} = \int_\Omega \partial_t v \cdot v dx =$
$-\int_\Omega (B(v, v) + \nabla(p + \mathcal{P})) \cdot v dx = -\int_\Omega \text{ div } (bv) dx = 0$, onde
$b = \frac{|v|^2}{2} + p + \mathcal{P}$ pelo Lema 1, pelo teorema de Gauss e $vN = 0$.

Mecânica dos fluidos -19- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Problema de Cauchy: $\partial_t v + \tilde{B}(v,v) = 0,\ v(0) = v_0,$
onde a forma bilinear $\tilde{B}$ é tal que: $\Big(\tilde{B}(u,v), u\Big)_{L^2(\Omega)} = 0$.

Existência em tempos curtos (Lichtenstein ~ 1925)

Seja $v_0 \in H^s(\Omega)$ $(s > 1 + d/2)$. Existe um tempo $0 < T \leq \infty$ e uma solução unica $v \in \mathcal{C}([0,T[; H^s(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T[; H^{s-1}(\Omega))$ do problema de Cauchy.

♣ Pois que $H^s(\Omega) \curvearrowright C^1(\bar{\Omega})$ e $H^{s-1}(\Omega) \curvearrowright C(\bar{\Omega})$ temos uma unica solução classica $v \in \mathcal{C}^1(\Omega \times [0,T[)$, pois $\|v(t,\cdot) - v(t_0,\cdot)\|_{\mathcal{C}^1} \to 0$ e $\|\partial_t v(t,\cdot) - \partial_t v(t_0,\cdot)\|_{\mathcal{C}} \to 0$ quando $t \to 0$.

Mecânica dos fluidos -20- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ Pela formulação em rotor, temos: $\int_0^T \|\omega(t)\|_= \infty$ onde T: tempo maximo de existência. Portanto

Extensão temporal (Beale–Kato–Majda, 1984)

A mesma solução pode ser extendida de modo unico e regular ao intervalo $[T, T+\delta[, \delta > 0$ se $\omega \in L^1(]0, T[; L^\infty(\Omega))$.

♣ Fisicamente: existe uma instabilidade em $t = T$ se a vorticidade não estiver limitada.

Problema:

Gostariamos de haver um resultado de existência num intervalo I independente da condição inicial, e para condições iniciais não tão regulares como $\mathcal{C}^1$.

♣ Fisicamente temos que haver a energia cinética limitada, ou seja $\int_I \|v\|_2^2 dt < \infty$, dar um sentido fraco a $\operatorname{div}(v \otimes v)$ e ∇p. Para alem temos $v_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ e v deve ser pelo menos continua para darmos um sentido á condição inical.

Mecânica dos fluidos -21- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Solução fraca

O par (v, p) é solução no sentido das distribuições de $(\bigstar)$ se $v \in \mathcal{C}(I; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)) \cap L^2_{\text{loc}}(I \times \mathbb{R}^d), p \in L^1_{\text{loc}}(I \times \mathbb{R}^d)$.

♣ Nota-se que nesta definição, não é exigido a conservação da energia: não resulta automaticamente, pois que $\partial_t v \in \mathcal{D}'$ (sentido de $\int_\Omega v \cdot \partial_t v dx$?)

Paradoxo de Scheffer-Schnirelman $(1993, 1997)$)

Seja $f = 0$. Existe uma solução fraca de $(\bigstar)$ não nula e com suporte compato em $I \times \mathbb{R}^d$.

♣ Solução não é fisica, visto que existe um campo de velocidades não nulo, sem forçagem e com uma C.I. nula, e que volta a ser nulo num instante.

Mecânica dos fluidos -22- EE-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Teorema de De Lellis e Székelyhidi (2009)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto, $T > 0$, e $\bar{e} :]0, T[\times\Omega \to \mathbb{R}_*$ uniformemente continua e tal que $\bar{e} \in L^\infty(]0, T[; L^1(\Omega))$. Para $f = 0$ e qualquer $\eta >$ existe uma solução fraca tal que

(i) $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}^d; \text{fraco}))$,
(ii) $v(t, x) = 0$ se $(x, t) \notin]0, T[\times\Omega$,
(iii) $\frac{|v(t,x)|^2}{2} = -\frac{d}{2}p(t, x) = \bar{e}(t, x)$, $\forall t \in]0, T[$ e q.t. $x \in \Omega$,
(iv) $\sup_{0\leq t\leq T} \|v(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta$.

♣ Nota se que (iii)$\Rightarrow$ velocidade pode ser localmente grandes quanto quizer num dominio pequeno quanto quizer, e a pressão constante ($\bar{e} = \mathrm{cste} \Rightarrow$sem interacções entre partículas); (iv) $\Rightarrow$ velocidade macroscopica quase invisível, com oscilações rápidas ($\partial_t v \sim \nabla\bar{e}$).

Mecânica dos fluidos -23- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Formulação forte

$$(\blacksquare) \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p - \mathrm{Re}^{-1} \Delta v & = & f & \Omega \\ \mathrm{div}\ v & = & 0 & \Omega \\ v & = & 0 & \partial\Omega \\ v(0) & = & v_0 & \Omega \end{cases}.$$

Formulação fraca 1: funcções test independente do tempo

Procura-se $v \in L^2(]0,T[;V)$ tal que $\forall w \in V$:
$(\square) 0 =$
$\frac{d}{dt}(v(t),w)_{L^2(\Omega)} + a(v(t),w) + (B(v,v),w)_2 - \langle f(t), w\rangle_{H^{-1},H_0^1}$
vale em $\mathcal{D}'(]0,T[)$, e $v(0) = v_0$ vale em V'
(i.e., continuidade fraca-$\bigstar$: $\langle v(t), \varphi\rangle_{V',V} \to \langle v_0, \varphi\rangle_{V',V}$).

Mecânica dos fluidos -24- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Formulação fraca 2: funcções test dependente do tempo

Procura-se $v \in L^2(]0,T[;V)$ tal que $\frac{dv}{dt} \in L^1(]0,T[;V')$, que verifique $\forall \psi \in \mathcal{C}_c(]0,T[;V)$:

$$(\square\square) \int_0^T \Big(\langle \frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)\rangle_{V',V} + a(v(t),\psi(t)) + (B(v(t),v(t)),\psi(t))_2$$
$$-\langle f(t),\psi(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} dt = 0.$$

Lema 8: Equivalência das formulações

Seja $v \in L^2(]0,T[;V)$ e $f \in L^1(]0,T[;V')$. São equivalentes (i) v solução de $(\square)$ e $\frac{dv}{dt} \in L^1(]0,T[;V')$, (ii) v solução de $(\square)$, e (iii) $v(t)$ é solução de $(\square\blacksquare)$ em V' para quase todos os t.

Mecânica dos fluidos -25- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Teorema (Leray ~ 1930)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Lipschitziano, $\mathrm{Re} > 0$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(]0, \infty[; H^{-1}(\Omega))$, e $v_0 \in W$. Portanto existe $v \in L^\infty(]0, T[, W) \cap L^2(]0, T[; V)$ e $p \in W^{-1,\infty}(]0, T[; L^2_0(\Omega)$ solução de (□□) t.q $\frac{dv}{dt} \in L^{4/3}(]0, T[; V')$ (i.e., $v \in \mathcal{C}([0, T]; V')$, pela imersão de Morrey: $\|v\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq \|v\|_{W^{1,p}}$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p} = 1/4$).

♣ Temos a desigualdade de energia:

$$\frac{1}{2}\|v\|_2^2(t) + \mathrm{Re}^{-1}\int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s)ds \leq \frac{1}{2}\|v\|_2^2(0) + \int_0^t \langle f, v\rangle_{H^{-1}, H^1_0}(s)ds$$

♣ Em $2d$ temos uma **unica** $v \in \mathcal{C}([0, T]; W)$ e vale a **conservação** da energia:

$$\frac{1}{2}\|v\|_2^2(t) + \mathrm{Re}^{-1}\int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s)ds = \frac{1}{2}\|v\|_2^2(0) + \int_0^t \langle f, v\rangle_{H^{-1}, H^1_0}(s)ds$$

♣ Nota que se quisessemos falar de um valor puntual de $v(t)$ com $0 \leq t \leq T$ então $v(t) \in V'$.

Mecânica dos fluidos -26- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

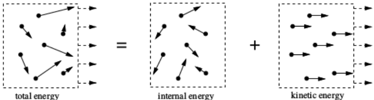
Relação com a 1^a Lei

Temos sempre $\frac{d}{dt}\left(E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}\right) = \text{Contribuições de Calor.}$

Pelo teorema $\frac{d}{dt}\left(E_{\text{int}} - \mathrm{Re}^{-1}\int_0^t \|\nabla v\|_2^2(s)ds\right) = \text{Calor.}$

♣ Escrevemos: $\mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|_2^2(t) = \frac{d}{dt}E_{\text{int}}(t) - \text{Calor}$, i.e., interpretar $\mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|_2^2$ como uma dissipação viscosa (fonte de calor intrinseca).

♣ Interpretação: em $2d$, $E_{\text{int}} = \int_0^t \mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|_2^2(s)ds + \text{Calor}$ (Energia interna= energia criada pelo fluido sobre si mesmo mais o calor externo=fornecido), enquanto em $3d$, pelo teorema, $E_{\text{int}} \geq \int_0^t \mathrm{Re}^{-1}\|\nabla v\|_2^2(s)ds + \text{Calor}$. $\Rightarrow$ Parece que em $3d$ a energia interna (i.e., das moleculas do fluido) tem comportamento mais complexo (i.e, existe formas de dissipação...).



Mecânica dos fluidos -27- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

♣ A solução fraca é que da existência global no tempo.

Extenção ao intervalo $[0, \infty[$ a $2d$ e $3d$.

Visto que $v(T) \in V'$ em vez de W não se pode considerar o teorema num intervalo $[T, T+\delta]$.
♣ Em $2d$: define v_n solução em $[0, n]$. Pela unicidade temos $v_n = v_m$ em $[0, n]$ se $n < m$ e portanto $v(t) := v_n(t)$ se $t \in [0, n]$.
Em $3d$ não se pode proceder desta forma, pela falta de unicidade (mas vale o mesmo).

Dúvida: com uma condição inicial mais forte, será que existe uma solução forte que seja unica?

SIM: $f \in L^2_{\text{loc}}(]0, \infty[; L^2(\Omega))$, e $v_0 \in V \Rightarrow v \in \mathcal{C}([0, T^\star[; V)$, para o unico $T^\star : T^\star = \left(2C\mathrm{Re}^3(\|v_0\|_2^2 + C\mathrm{Re}\int_0^{T^\star} \|f\|_2^2(s)ds)\right)^{-1}$.
Nota-se que $T^\star \to \infty$ se os dados forem pequenos $(v_0, f \to 0)$.

Mecânica dos fluidos -28- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Extenção ao intervalo $[0, +\infty[$?

Visto que $v(T^\star) \in V$ pode-se considerar existência num intervalo $[T, T+\delta]$. Mas, quem nos garante que pode-se chegar a $+\infty$? (Pois que δ depende de $T^\star$).

♣ Temos $T^\star = \infty$ se $\|\nabla v_0\|_2^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\mathrm{Re}^2}, \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega))} \leq \frac{C(\Omega)}{\mathrm{Re}^4}$.

♣ Voltamos á solução fraca: $\forall 0 \leq t_0 < \infty$, só temos continuidade fraca para v, ou seja $\forall w \in W : (v(t) - v(t_0), w)_2 \to 0$, $t \to t_0$. Sabemos tambem que $\forall T > 0 : \sup\limits_{t \in]0,T[} \|v(t)\|_2 < \infty$.

♣ Em particular, não sabemos nada em termos de limite puntual. Nota-se que a velocidade só é definida em quase todos os pontos.

Conjunto singular (Solução com blow-up.)

Definimos $S(v) := \{(t,x) : \forall \delta > 0 : v \notin L^\infty \left(B_\delta(t,x)\right)\}$.

Mecânica dos fluidos -29- ENS-i-td em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado.

Teoremas (Serrin $\sim 1962, 63$, Caffarelli-Kohn-Nirenberg ~ 1982)

Se $(t, x) \notin S(v) \Rightarrow \forall k \in : v \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(B_{\delta/2}(t, x)), \alpha > 0$.
Temos

- $\mathcal{H}^1(S) = 0 \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(S) \leq 1$.
- $\mathcal{H}^{1/2}(\pi S) = 0 \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(\pi S) \leq 1/2$, onde πS é o conjunto dos tempos singulares.
- uma solução fraca só pode bifurcar nos tempos singulares.

♣ O blow-up significa fisicamente transferência de energia ás escadas sempre mais pequenas, pois no final trata-se de energia concentrada num conjunto fractal.

Mecânica dos fluidos -30- ENS-c-td. Conclusão.

Solução com blow-up.

- Não são fisicas: as ENS não estão validas se tiverem lugar.
- Argomento mais forte: a velocidade de um fluido não pode ser superior a velocidade do som.
- O matematico italiano Giovanni Prouse demostrou no 1979 que existe uma unica solução continua com este vincúlo.
- O problema é a condição $\operatorname{div} v = 0$ que é uma aproximação que torna as equaõese eliticas (i.e., com propagação infinita).