Geometria diferencial

Aulas práticas & Exercícios

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Objectivos

- Pôr em prática os conceitos vistos nas aulas téoricas
- Aprender a calcular
- Aprender a demonstrar problemas simples
- Aprender a elaborar por escrito as resposta usando um software dedicado (deve permitir o uso de latex, como por exemplo overleaf que dá facilmente para partilhar)
- Trabalhar em grupo
- Participar na dinâmica da turma

Modalidades

- As questões azuis valem 2 pontos cada, as vermelhas 4 pontos

Modalidades

- Pode-se trabalhar individualmente: o objectivo é fazer um conjunto de questões que totalizem (pelo menos) 16 pontos (i.e., uma média de 3 exercicios por semana e por cabeça)
- Pode-se trabalhar em grupo de 2 alunos: o objectivo é fazer um conjunto de questões que totalizem 26 pontos
- Pode-se trabalhar em grupo de 3 alunos: o objectivo é fazer um conjunto de questões que totalizem 36 pontos
- Se for em grupo >3 alunos: o objectivo é fazer todas a questões
- O prazo é de duas semanas para entregar o trabalho por escrito
- Os exercícios são aprensentados oralmente nas aulas de téorica-pratica

Modalidades

- Irei pedir a cada aluno que prepare 3 exercícios (1 de 2 pontos, 1 de 4 e 1 téorico) para a aula TP a seguir; irei pedir ao vivo a cada que faça a apresentação oral de um dos exercícios: a mesma pode ser feita partilhando um documento escrito (à mão ou em latex) ou escrevendo a solução num tablet partilhado
- A realização dos exercícios é da responsabilidade dos alunos; o professor não apresenta soluções
- Quando uma solução for aceitavél irei pedir ao aluno/grupo de elaborar uma resposta escrita numa sebenta de exercícios partilhada
- A avaliação dos trabalhos entregues e da apresentação oral conta com 40% da nota final
- Uma parte do exame final (20%) será a resolução de exercícios feitos nas aulas

Téoria da curvas

Indicação: deve-se fazer pelo menos uma questão téorica e duas de 4 pontos. Numero total de pontos=64.

Exercicio 1 (Movimento Euclidiano)

Seja uma roto-translação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax + b$ com $A \in SO(2)$, i.e., uma matriz de rotação, e $b \in \mathbb{R}^2$ um vector fixado. (i) Mostrar que se γ é uma curva parametrizada então $F \circ \gamma$ é também uma curva parametrizada; (ii) mostrar que se γ é uma curva parametrizada pelo comprimento então $F \circ \gamma$ é também uma curva parametrizada pelo comprimento; (iii) mostrar que as duas curvas têm mesmo comprimento e mesma curvatura.

Exercicio 2 (Ortogonalidade - téorico)

Seja $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fixado. Suponhamos que a curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tenha um velocidade $\dot{\gamma}(t) \perp v$, $\forall t \in I$ e que $\gamma(0) \perp v$. Mostrar que $\gamma(t) \perp v, \forall t \in I$.

Exercicio 3 (Cicloída)

A cicloída $t \mapsto \gamma(t)$ é a trajetória efetuada por um ponto fixado a um disco rigido de raio r em rotação sobre um plano. (i) Qual é a sua equação se $\gamma(0) = (0, 1)$; (ii) Calcule a sua velocidade e determine para quais $r > 0$ a curva é regular, injectiva, uma imersão; (iii) calcule o comprimento da curva para $r = 1$ e uma rotação do disco; (iv) Para $r = 1$, calcule o seu comprimento de $\gamma(0)$ à $\gamma(T)$; (v) Para $r = 1$, calcule a sua curvatura em $\gamma(t)$.

Exercicio 4 (Geodésica euclidiana - téorico)

Seja $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$. Mostrar que o segmento $[x; y]$ é a curva que minimiza o comprimento entre todas as curvas com extremidades x e y. HINT. Toma $x = 0$ e $y = (y_1, 0, \cdots, 0)$ e minore a formúla do comprimento.

Exercicio 5 (Imagem de curvas e equivalência entre curvas)

Mostrar que as curvas $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ e $\tilde{\gamma} : t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ definidas no intervalo $I := [0, 2\pi[$ (i) têm a mesma imagem em $\mathbb{R}^2$ mas não são equivalentes (i.e. não existe um difeomorfismo suave $\varphi : I \to I$ tal que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$); (ii) se fossem definidas em 2 intervalos diferentes, em qual subinterval $J \subset I$ as duas curvas seriam equivalentes? (iii) qual das duas curvas é, se for, regular? injectiva? uma imersão em $\mathbb{R}^2$? um mergulho em $\mathbb{R}^2$ se for definida em $[0, 2\pi[$, em $[0, 2\pi]$?

Exercicio 6 (Curvatura - téorico)

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento, contida no disco de raio R (i.e. $\|\gamma(t)\| \leq R, \forall t \in I$). Mostrar que se a curva toca o circúlo de raio R $(t_0 \in I : \|c(t_0)\| = R)$, então neste ponto P vale $\kappa(t_0) \geq 1/R$. HINT: considere a regularidade da curva e a propriedade de maximalidade do comprimento em P.

Exercicio 7 (Curvatura - prático)

Determinar o máximo do raio de curvatura da curva $x(t) = a(-t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), z(t) = 4a \cos \frac{t}{2}, t \in \mathbb{R}$.

Exercicio 8 (Cúspide (cusp))

Considere a curva cúspide $t \in I \mapsto (t^2, t^3)$; (i) a curva é regular se $I = (0, +\infty)$? se $I = [0, \infty]$? (ii) calcule o comprimento da curva de $(0, 0)$ à $(x, y) = (T^2, T^3)$; (iii) calcule a curvatura κ em $0 < t < +\infty$? (iv) efetue as limites de κ quando $t \to 0$ e $t \to \infty$; explicar a falta de regularidade na origem mediante a curvatura; mostra que κ toma todos o valores positivos se $I = [0, +\infty)$.

Exercicio 9 (Elípse)

Considere a curva elípse $t \in [0, 2\pi] \mapsto (a\cos t, b\sin t)$, $(0 < b < a)$. Mostrar que o seu comprimentpo vale $b\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\epsilon^2\cos^2 t}dt$ onde $\epsilon := \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ é a exentricidade da elípse.

Exercicio 10 (Congruênçia com a hélice -téorico)

Mostar, utilizando o teorema fundamental das curvas, que se uma curva tem curvatura $\kappa > 0$ e uma torção $\xi \neq 0$ constantes, então a mesma é congruente, i.e., isométrica à uma hélice.

Exercicio 11 (Hélice)

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$ um hélice, com parâmetros $a, b > 0$. (i) Determinar a e b para que γ seja parametrizada pelo comprimento; (ii) com este valor de a, calcular a acceleração, determinar a curvatura e a normal; (iii) calcule o vector bi-normal, determine a torção da curva e a fracção κ/ξ.

Exercicio 12 (Hélice geralizado - téorico)

Uma curva γ é chamada hélice se o seu vector tangente faz um angûlo constante com uma direcção fixada b. Demonstrar que se $\xi \neq 0$ então γ é um hélice se e somente se $\kappa/\xi = \mathrm{cst}$. HINT: derivar $\tau \cdot b$.

Exercicio 13 (Frenet-Serret - téorico)

Seja uma curva cujo vector bi-normal $s \mapsto b(s)$ é conhecido. Mostrar que o valor absoluto da torção ξ e a curvatura κ podem ser determinados a partir de b.

Exercicio 14 (Frenet-Serret - prático)

Determinar (τ, n, b) e (κ, ξ) no caso da curva
$\gamma(t) = (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t + \sqrt{1+t^2}))$.

Exercicio 15 (Matriz ortonormada)

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é ortonormada se $A^T = A^{-1}$. Mostrar que A pode ser escrita como $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ se $\det A = +1$; (ii) qual'é sua express ao se $\det A = -1$? (iii) seja $e \in S^1$ um vector unitário do plano; determine o vector n unitário e ortogonal à e; verifique que a matriz $(e|n)$ é ortonormada.

Exercicio 16 (Aproximação de uma curva)

Seja uma curva suave $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento. (i) Mostrar que temos a aproximação: $\gamma(t) = \gamma(0) + se(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)n(0) + \frac{s^3}{3}(-\kappa(0)^2 e(0) + \kappa'(0)n(0)) + o(s^3)$; (ii) qual' é a formúla para uma curva espacial ($\gamma : I \to \mathbb{R}^3$)?

Exercicio 17 (Parametrização de um grafo)

Parametrizar o grafo $y = f(x), a \leq x \leq b$ e determinar a formula do comprimento da curva entre $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Exercicio 18 (Coordenadas polares)

Seja uma curva plana parametrizada em coordenades polares $\gamma \equiv r(\theta), a \leq \theta \leq b$. (i) Escrever $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$; (ii) calcular a velocidade e mostrar que o arco de comprimento é dado por $\int_a^b \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$ onde $' = \frac{d}{d\theta}$; (iii) calcular a curvatura.

Exercicio 19 (Curvatura total - téorico)

Seja γ uma curva plana regular, simples (i.e., injetiva) e fechada. Suponhamos que tenha curvatura limitada por cima por $c > 0$. Demonstrar que o comprimento da curva é limitado por baixo, i.e., $\mathcal{L}(\gamma) \geq \frac{2\pi}{c}$.

Exercicio 20 (Indíce de enrolamento)

Calcule o indíce de enrolamento das (i) cicloíde, (ii) cúspide, (iii) hélice e (iv) elípse, quando $t \in I = [0, k\pi], k \in \mathbb{N}_*$.

Geometria diferencial

Aulas práticas & Exercícios

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Exercicios: téoria das superfcies

Indicação: deve-se fazer pelo menos duas de 4 pontos, no minimo uma mas não mais do que tres em cada série "1ª forma" e "superficíe singular".

Exercicio 1 (Superfície regular - téorico)

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $f : V_0 \to \mathbb{R}$ uma funcção suave. Seja a superfície $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$. Demonstrar que se $\mathrm{grad} f(P) \neq (0, 0, 0), \forall P \in S$, então S é regular.

Exercicio 2 (Superfície regular - prático)

Aplicar o resultado anterior no caso seguinte: mostrar que o elípsoid $E \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ é uma superfície parametrizada e regular.

Exercicio 3 (Parametrização da esféra)

Seja a esfera $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Dar uma cobertura, i.e. uma parametrização de S mediante 6 cartas locais (A, p) com A aberto de $\mathbb{R}^2$. Nota: pode haver intersecções.

Exercicio 4 (Difeomorfismo -1-)

Mostrar que o elípsoid E é difeomorfo a esfera unitária, S^2, i.e. que existe uma funcção diferenciável e bijetiva $f : E \to S^2$ tal que o seu inverso é diferenciável.

Exercicio 5 (Difeomorfismo -2-)

Mostrar que a superfície
$S_1 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y),\ f \text{ suave}\}$ é difeomorfa à superfície $S_1 \equiv \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$, i.e. que existe uma funcção diferenciável e bijetiva $f : S^2$ tal que o seu inverso é diferenciável.

Exercicio 6 (Cone de luz)

Seja o cono de luz em relatividade restrita $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$. (i) Mostrar que $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é uma superfície regular; (ii) Mostrar que S não é regular em $(0, 0, 0)$. HINT: Raciocinar pelo absurdo: supor que é localmente regular na origem e encontrar a contradicção mediante o homeomorfismo entre a vizinhança de $(0, 0, 0)$ é o aberto de $\mathbb{R}^2$.

Exercicio 7 (Projecção estereografica)

Mostrar que existe uma parametrização com apenas 2 mapas (2 imersões injetivas). HINT: Trata-se da chamada projecção estereografica, que representa uma opção para realizar mapas cartograficas.

Exercicio 8 (Plano)

(i) Encontrar uma representação parametrica de um plano em $\mathbb{R}^3$; (ii) A partir da mesma, encontrar as componente da 1ª forma fundamental e a matriz "metrica" corespondente; (iii) Aplicar isto ao plano $x - y$ parametrizado pelas coordenadas Cartesianas $(u = x, v = y)$.

Exercicio 9 ($1a$ forma fundamental-1-disco)

(i) Encontrar uma representação parametrica do disco de raio R no plano $x - y$; (ii) A partir da mesma, encontrar as componente da 1ª forma fundamental e a matriz "metrica" corespondente

Exercicio 10 ($1a$ forma fundamental-2-cilíndro)

(i) Encontrar uma representação parametrica do cilíndro $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. HINT: considere coordenadas polares; (ii) A partir da mesma, encontrar as componente da 1ª forma fundamental e a matriz "metrica" corespondente

Exercicio 11 ($1a$ forma fundamental-3-esfera)

(i) Encontrar uma representação parametrica da esfera $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R\}$. HINT: considere coordenadas esfêricas; (ii) A partir da mesma, encontrar as componente da 1ª forma fundamental e a matriz "metrica" corespondente.

Exercicio 12 ($1a$ forma fundamental-4-cone)

(i) Encontrar uma representação parametrica do cono $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$. HINT: considere coordenadas polares; (ii) A partir da mesma, encontrar as componente da 1ª forma fundamental e da matriz "metrica".

Exercicio 13 ($1a$ forma fundamental-5-gráfico)

Encontrar as componente da 1ª forma fundamental a matriz "metrica" corespondente da superfície $S_1 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y),\ f \text{ diferenciável}\}$.

Exercicio 14 ($1a$ forma fundamental-6-projecção esterografica)

Encontrar as componente da 1ª forma fundamental e a matriz "metrica" corespondente da esfera parametrizada estereograficamente (ver Ex. 6).

Exercicio 15 (Superfície singular-1-chapeu de Whitney)

Determinar se a superfície seguinte é singular, em quais pontos (ou conjuntos) e mostrar a sua representação grafica (mediante um sofware de desenho): $S \equiv \{x, y, z) = (u^2, uv, v)\}$.

Exercicio 16 (Superfície singular-2-borda cuspidal)

Determinar se a superfície seguinte é singular, em quais pontos (ou conjuntos) e mostrar a sua representação grafica (mediante um sofware de desenho): $S \equiv \{x, y, z) = (u, v^2, v^3)\}$.

Exercicio 17 (Superfície singular-3-coda de borboleta)

Determinar se a superfície seguinte é singular, em quais pontos (ou conjuntos) e mostrar a sua representação grafica (mediante um sofware de desenho): $S \equiv \{x, y, z) = (3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv, v)\}$.

Exercicio 18 (Superfície singular-4-cross-cap cuspidal)

Determinar se a superfície seguinte é singular, em quais pontos (ou conjuntos) e mostrar a sua representação grafica (mediante um sofware de desenho): $S \equiv \{x, y, z) = (u, v^2, uv^3)\}$.

Exercicio 19 (Invariança da área por difeomorfismo)

Seja uma superfície $S \equiv \{(x, y, z) = p(u, v), (u, v) \in A\}$ e seja $(\xi(u, v), \eta(u, v))$ uma mudança de variável, i.e., um difeomorfismo de reparametrização. (i) Mostrar que a normal é invariante, i.e., que $\frac{\partial_u p \times \partial_v p}{\|\partial_u p \times \partial_v p\|} = \pm \frac{\partial_\xi \tilde{p} \times \partial_\eta \tilde{p}}{\|\partial_\xi \tilde{p} \times \partial_\eta \tilde{p}\|}$, onde $\tilde{p}(\xi, \eta) = p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$. (ii) De o que depende o sinal?(iii) Mostrar que a area é invariante.

Exercicio 20 (torus)

Seja o torus $T \equiv \{(x, y, z) = p(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u), 0 < b < a, 0 \leq u, v \leq 2\pi\}$. Determine (i) o elemento de comprimento, i.e., a 1ª forma fundamental; (ii) o elemento de área dA; (iii) a área do torus; (iv) compare esta última com a área do cilindro de altura $2\pi a$ e raio b.

Exercicio 21 (Valores próprios da 1ª forma)

Demonstrar que os valores próprios da 1ª forma são positivos.

Exercicio 22 (Coordenadas isotermais)

As coordenadas de uma superfície parametrizada são ditas isotermais se a 1ª forma escreve-se como multiplo da matriz identidade, i.e., $F = 0$ e $E = G = \lambda(u, v)$. Seja duas curvas $t \mapsto p(u_1(t), v_1(t))$ e $t \mapsto p(u_2(t), v_2(t))$. Mostrar que neste caso o ângulo entre as duas curvas em t é igual ao ângulo entre as duas velocidades $(\dot{u}_1(t), \dot{v}_1(t))$ e $(\dot{u}_2(t), \dot{v}_2(t))$.

Geometria diferencial

Aulas práticas & Exercícios

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Exercicios: téoria das superfícies -2- 2ª forma fundamental, curvatura normal, e mapa de Weingarten

Indicação: deve-se fazer pelo menos duas de 4 pontos, 1 téorica, e 1 em cada série "2ª forma, "mapa de Weingarten" e "curvas assintóticas".

Exercicio 1 (Ângulos entre curvas -1-)

Determinar os ângulos seguintes: (i) entre as curvas $v = u + 1$ e $v = 3 - u$ na superfície $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$; (ii) entre as duas linhas $u + v = 1$ e $u - v = 0$ no helicoíde $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$.

Exercicio 2 (Ângulos entre curvas -2-)

No plano com coordenadas (u, v), determinar o ângulo entre as curvas $v = 2u$ e $v = -2u$ nos casos seguintes: (i) no caso Cartesiano onde $ds^2 = du^2 + dv^2$; (ii) dado o elemento de comprimento $ds^2 = du^2 + 2dv^2$; (iii) dada a métrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercicio 3 (Curvatura geodésica -1- téorico)

Seja a acceleração de uma curva γ numa superfície, $a(s) := \gamma''(s)$ com s a abcissa curvilinea. A curvatura geodésica definida como $\kappa_g := a \cdot (\nu \times \gamma')$. (i) Demonstar que $a = \kappa_n \nu + \kappa_g \nu \times \gamma'$, onde $\kappa_n := \|a \cdot \nu\|$. (ii) Mostrar que $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$. (iii) Mostrar que uma curva é localmente um segmento se e somente se $\kappa_n = 0 = \kappa_g$.

Exercicio 4 (Superfície de revolução -1-)

Seja $s \mapsto (x(s), 0, z(s)) \subset \mathbb{R}^3$ uma curva plana parametrizada pela abcissa curvilinea e a superfície de revolução $p(s, \theta) = (x(s) \cos \theta,$ $x(s) \sin \theta, z(s))$. (i) Determinar a base local $\{g_s, g_\theta, \nu\}$; (ii) determinar as 1ª e 2ª formas fundamentais; (iii) Determinar a curvatura geodésica de um meridiano $\theta = \text{cst.}$ e dizer se é uma geodésica, i.e. se $\kappa_g = 0$. HINT: calcular a velocidade e a acceleração do meridiano

Exercicio 5 (Superfície de revolução -2-(téorico))

(i) Determinar a expressão da curvatura geodésica de uma curva numa superfície parametrizada por um t qualquer. HINT: calcular ds/dt e derivar em cadeia. (ii) No caso de uma superfície de revolução $p(s,\theta) = (x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s))$ (vê supra), determinar a curvatura geodésica de um parallelo $s = \mathrm{cst}$ e determinar a condição para que seja uma geodésica, i.e. t.q. $\kappa_g = 0$. HINT: calcular a velocidade de um paralelo e aplicar (i). (iii) Aplicar (ii) a esfera e determinar qual unico parallelo é uma geodésica. (iv) Determinar as geodésicas do torus.

Exercicio 6 (Tubo - téorico)

Seja um tubo construido em torno da curva regular $s \mapsto \gamma(s)$, i.e. $p(s,\theta) = \gamma(s) + a\cos\theta n(s) + a\sin\theta b(s)$ com os vetores normal e binormal n e b. (i) Explicar a construcção geometrica do tubo; (ii) mostrar que é regular se $\kappa < 1/a$ onde κ é a curvatura de γ; determinar a sua 1ª e 2ª formas fundamentais e a sua área.

Exercicio 7 (Segunda forma fundamental -1- téorico)

(i) Determinar a 1ª forma fundamental da esfera. (ii) Determinar o vetor normal da esfera de raio R. HINT: Considere o vetor posição $\vec{OP}, P \in S$. (iii) Demonstrar que a 2ª forma fundamental de uma esfera de raio R é $1/R$ vezes a sua 1ª forma. (iv) Determinar a curvatura normal de uma curva na esfera com velocidade unitária.

Exercicio 8 (Segunda forma fundamental -2-)

(i) Determinar a 2ª forma fundamental de um gráfico. (ii) Determinar uma condição do determinante de $\mathbb{I}_2$ nos pontos extremais (maximo e minimo) e nos pontos de selas.

Exercicio 9 (Segunda forma fundamental -3-)

(i) Determinar as 1ª e 2ª formas fundamentais do iperboloíde elítico $p(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$; (ii) mostrar uma representação grafica do mesmo. (iii) Determinar a imagem do círculo nesta superfície e determinar a curvatura normal da mesma.

Mapa de Weingarten

Vimos que $d\nu(x) = -\mathcal{G}(x)W(x)$ onde $\mathcal{G} := (g_u|g_v)$ ou seja pela definição de diferencial $d\nu(p)[g_\alpha] = \dot{\gamma}(0)\nu = \frac{d}{dt}\nu(\gamma(t))_{|t=0}$ com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = g_\alpha(p)$.

Exercicio 10 (Segunda forma fundamental -4-)

Demonstrar que se a 2ª forma fundamental de S é 0 em P então S é localmente plano em P. HINT: utilizar as expressões $L = -\partial_u\nu \cdot g_u$ etc, e o mapa de Weingarten.

Exercicio 11 (Mapa de Weingarten -1-)

Encontrar a normal e a expressão matricial do mapa de Weingarten nas geometrias seguintes:
(i) O plano $S = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$. (ii) O cilíndro $S = S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercicio 12 (Mapa de Weingarten -2-)

Seja $K := \det W$ onde W é o mapa de Weingarten associado a uma superfície S. (i) Mostrar que $\partial_u \nu \times \partial_v \nu = K g_u \times g_v$. (ii) Demonstar que $(\partial_u \nu \times \partial_v \nu) \cdot \nu = \frac{\det \mathbb{I}_2}{\sqrt{\det \mathbb{I}_1}}$. (iii) Sendo $\{e_1, e_2\}$ uma base movél ortonormada e suave de T_pS, demonstar que $\partial_u e_1(p) \cdot \partial_v e_2(p) - \partial_u e_2(p) \cdot \partial_v e_1(p) = \frac{\det \mathbb{I}_2}{\sqrt{\det \mathbb{I}_1}}(p)$.

Exercicio 13 (Mapa de Weingarten -3-)

Mostrar que a superfície S cujas 1ª e 2ª formas fundamentais são $\mathbb{I}_1[(du, dv)] = \cos^2 v du^2 + dv^2$ e $\mathbb{I}_2[(du, dv)] = -\cos^2 v du^2 - dv^2$ é uma esfera de raio unitário. HINT: Utilizar a matriz de Weingarten

Exercicio 14 (Mapa de Weingarten -4-)

(i) Demonstrar que a 2ª forma fundamental enquanto forma bilinear $\mathbb{I}_2(a, b)$ pode ser exprimida a partir da 1ª e do mapa de Weingarten, i.e. $\mathbb{I}_2(a, b) = \mathbb{I}_1(-Wa, b)$ onde $a, b \in \mathbb{R}^3$ e W é a matriz de Weingarten. (ii) Demonstrar que W é auto-adjunto com respeito a $\mathbb{I}_1$, i.e. $\mathbb{I}_1(Wa, b) = \mathbb{I}_1(a, Wb)$ (atenção W não deve ser simetrica).

Operador de forma

O operador de forma $\mathcal{S} : T_pS \to T_pS$ é um operador de curvatura extrínseca dado pelo mapa de Weingarten, i.e., $\mathcal{S}(p)[g_\alpha] = -(g_\alpha \cdot \nabla)\nu(p)$. A curvatura de Gauss é definida como o determinante de $\mathcal{S}$, i.e. o determinante da matriz de Weingarten W, já que $\mathcal{S}[g_\alpha] = g_\alpha W$. A terceira forma fundamental é definida como o mapa bilinear $\mathbb{I}_3(a, b) := d\nu \cdot d\nu = (S[a]|S[b])_g$ com $(\cdot|\cdot)_g$ o produto interno induzido na superfície pela metrica $g = (g_\alpha \cdot g_\beta)_{\alpha\beta}$.

Exercicio 15 (Mapa de Weingarten -5-)

(i) Determinar a matriz C associada a $\mathbb{I}_3$ na base $\mathcal{G}$. (ii) Exprimir $\mathbb{I}_3$ em funcção de $\mathbb{I}_1$ e $\mathbb{I}_2$, i.e., C em funcção das matrizes A e B. (ii) Demonstrar que o operador $\mathcal{S}$ é auto-adjuncto, i.e. que $(\mathcal{S}[u]|\mathcal{S}[v])_g = (\mathcal{S}^2[u], v) = (u|\mathcal{S}^2[v])_g$.

Exercicio 16 (Serret-Frenet nas superfícies - téorico)

Seja uma curva γ na superfície S e a base movél $\{\tau, \nu, \beta\}$ em $P = \gamma(0)$ com ν a normal a superfície, $\tau = \gamma'(0)$ e $\beta := \tau \times \nu$. Seja d'outro lado a base de Frenet-Serret $\{\tau, n, b\}$ associada a curva em P. Vimos no Ex. 3 que a acceleração da curva é $a = \gamma' = \tau' = \kappa n = \kappa_n \nu - \kappa_g \beta$. Demonstrar o analogo das formúlas de Frenet-Serret-Darboux: $\nu' = -\kappa_n t + \xi_g \beta$, $\beta' = \kappa_g \tau - \xi_g \nu$, onde definimos a torção geodésica $\xi_g := \xi + \dot{\psi}$ e ψ é o ângulo entre γ'' e ν. Mostrar tambem a relação $\kappa_n = \kappa \cos \psi$ e $\kappa_g = \kappa \sin \psi$.

HINT: exprimir ν em funcção de n, b e ψ, determinar β, e derivar ν. Para β' calcule diretamente ou considere apenas a relação de Darboux sendo que a matriz é anti-simetrica. Considere tambem o Ex. 3 (ii).

Exercício 17 (Curva assintótica - téorico)

Seja a acceleração da curva γ, $a = \gamma'' = \kappa n = \kappa_n \nu - \kappa_g \beta$. Uma curva γ é dita geodésica se $\kappa_g = 0$; γ é dita assintótica se $\kappa_n = 0$. Mostrar que uma curva assintótica verifica que γ'' faz um ângulo ψ constante com ν. HINT: utilise o resultado do Ex. 16.

Exercicio 18 (Curvas assintóticas -2-)

Determinar as 2 curvas assintóticas no helicoíde $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), a \in \mathbb{R}$. HINT. Utilizar a formúla de Meusnier e a identidade $\gamma'(0) = g_u u'(0) + g_v v'(0)$.

Exercicio 19 (Curvas assintóticas -3-)

Determinar as 2 curvas assintóticas na superfície $z = y\cos x$.
HINT. Utilizar a formúla de Meusnier e a identidade
$\gamma'(0) = g_u u'(0) + g_v v'(0)$.

Exercicio 20 (Curvas assintóticas -4-)

Seja a superfície S com equação $z = f(x) - f(y)$ com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave. (i) Determinar as 1ª e 2ª formas fundamentais de S. (ii) Determinar a equação diferencial das curvas assintóticas em S. HINT. Utilizar a formúla de Meusnier e a identidade $\gamma'(0) = g_u u'(0) + g_v v'(0)$. (iii) Mostrar que 2 curvas ortogonais $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ em S verificam $\frac{dx^2}{1+(f'(y))^2} = -\frac{dy_1 dy_2}{1+(f'(x))^2}$. (iv) Deduzir de (ii) e (iii) a expressão de f tal que as suas curvas assintóticas sejam tambem ortogonais.

Exercicio 21 (Curvatura geodésica- téorico)

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base movél ortonormada e suave de T_pS. Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, $p = \gamma(s)$ e θ o ângulo entre $\gamma'(s)$ e e_1. Mostrar que $\kappa_g(s) := \gamma''(s) \cdot (\nu(s) \times \gamma'(s)) = \theta'(s) - e_1(s) \cdot e_2'(s)$.

Exercicio 22 (Codazzi-Mainardi)

Mostrar que não existe uma superfície S cujas 1ª e 2ª formas fundamentais são $\mathbb{I}_1[(du, dv)] = du^2 + \cos^2 u dv^2$ e $\mathbb{I}_2[(du, dv)] = \cos^2 u du^2 + dv^2$. HINT: aplicar uma das relações de compatibilidade de C.-M..

Geometria diferencial

Aulas práticas & Exercícios

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Exercícios: téoria das superfícies -3- Curvaturas principais, média e de Gauss; Geodésicas

Indicação: deve-se fazer pelo menos duas de 4 pontos, duas de téorica, e duas em cada série "curvaturas principais" (2-9 e 17), e "curvatura de Gauss" (10-14 e 16-19) e uma de "geodésicas" (20-22).

Curvatura normal

Vimos que a acceleração de uma curva decompõe-se como $\gamma''(s) = \kappa_n(s)\nu(s) + \kappa_g(s)\nu(s) \times \gamma'(s)$, onde κ_n e κ_g são as curvaturas normal e geodésica. Assim $\kappa_n = \gamma'' \cdot \nu$. Seja n a normal principal da curva, i.e., $\gamma'' = \|\gamma''\| n = \kappa n$, com κ a curvatura (principal) da curva. Então $\kappa_n = \kappa n \cdot \nu$. Seja ϕ o ângulo entre a normal principal à curva n e a normal a superfície ν.

Exercício 1 (Curvatura normal -1- téorico)

(i) Mostrar que $\kappa_n = \kappa \cos\phi$ e $\kappa_g = \pm\kappa \sin\phi$.

Exercício 1 (Curvaturas principais -1- téorico)

(ii) Seja $\gamma = S_1 \cap S_2$ parametrizada pela abcissa curvilinea, e ν_1, ν_2 as normais unitárias aos planos T_pS_1 e T_pS_2 em $p \in S$. Mostrar que $\kappa_{n1}\nu_2 - \kappa_{n2}\nu_1 = \kappa\nu_1 \times \nu_2 \times n$, onde κ_{n1} e κ_{n2} são as curvaturas seccionais em S_1 e S_2. HINT: considere a identidade vetorial $a \times b \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$. (iii) Seja o ângulo entre os 2 planos. Mostrar que $\kappa^2 \sin^2 \alpha = \kappa_{n1}^2 + \kappa_{n2}^2 - 2\kappa_{n1}\kappa_{n2} \cos \alpha$.

Exercício 2 (Curvatura principais -2- téorico)

(i) Mostrar que as curvaturas principais são solução de $\det(B - \kappa A) = 0$ onde A e B são as matrizes das 1.ª e 2.ª formas fundamentais. (ii) Determinar as curvaturas principais do helicoíde $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$.HINT: vê exercícios 1 e 18 da série 3.

Exercício 3 (Formúla de Olinde Rodrigues - téorico)

Seja $\dot{\gamma} = \dot{u}g_u + \dot{v}g_v$ uma direcção principal. (i) Determinar a equação das direções principais. HINT: considere a definição:

Exercício 3 (Formúla de Olinde Rodrigues - téorico)

as curvaturas principais são os valores próprios de W. (ii) Utilizando Weingarten, demonstrar que $\dot{\nu} = -\kappa\dot{\gamma}$.

Exercício 4 (Formúla de Euler - téorico)

Seja $d\nu[\gamma'(s)] := \frac{d}{ds}\nu(u(s), v(s)) = \partial_u\nu(u, v)u'(s) + \partial_v\nu(u, v)v'(s)$ sendo que $\gamma' = u'g_u + v'g_v$. A formúla de Olinde Rodrigues diz que $d\nu[\gamma'(s)] = -\kappa(s)\gamma'(s)$ com κ uma curvatura principal. D'outro lado, a formúla de Meusnier diz que $\kappa_n = \mathbb{I}_2[\gamma'] = -d\nu[\gamma'] \cdot \gamma'$. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base de direcções principais de T_pS. Seja $v = \gamma'$ unitário e θ o ângulo entre v e e_1. Demonstrar que $\kappa_n = \kappa_m \cos^2\theta + \kappa_M \sin^2\theta$.

Exercício 5 (Linhas de curvatura - téorico)

Seja $\gamma = S_1 \cap S_2$ uma curva principal de S_1 parametrizada pela abcissa curvilinea, e ν_1, ν_2 as normais unitárias aos planos S_1 e S_2. Demonstar que γ é linha principal (ou linha de curvatura) de S_2 sse o ângulo entre os planos tangentes à S_1 e S_2 é constante. HINT: Utilizar a formúla de Rodrigues.

Exercício 6 (Linhas de curvatura -1- téorico)

(i) Determinar o sistema de equações da linhas principais $a\dot{u} + b\dot{v} = \kappa\dot{u}$ e $c\dot{u} + d\dot{v} = \kappa\dot{v}$. HINT: considerar as formúlas de Rodrigues e de Weingarten; a, b, c, d são as entradas de W. (ii) Eliminando κ no sistema acima, obter a equação das linhas principais. (iii) Verificar que as linhas principais são solução do sistema $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$. (iv) Demonstrar que, fora dos pontos umbilicais, as linhas de coordenadas $u = \mathrm{cst}$ e $v = \mathrm{cst}$ são linhas principais sse $F = M = 0$.

Exercício 7 (Linhas de curvatura -2-)

(i) Determinar as equações das linhas principais de $p(u, v) = (a(u - v), b(u + v), 0, uv)$; (ii) Determinar as linhas principais resolvendo as mesmas.

Exercício 8 (Linhas de curvatura -3-)

(i) Determinar as equações das linhas principais do helicoíde $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$; (ii) Determinar as linhas principais resolvendo as mesmas. HINT: vê exercícios 1 e 18 da série 3.

Exercício 9 (Superfície de revolução)

Seja $s \mapsto (x(s), 0, z(s)) \subset \mathbb{R}^3$ uma curva plana com velocidade unitária e a superfície de revolução $s \equiv p(s,\theta) = (x(s)\cos\theta, x(s)$ $\sin\theta,\ z(s))$. (i) A partir das 1.ª e 2.ª formas fundamentais obtidas no exercício 4 da série 3, determinar as curvaturas principais em funcção de $x(s)$ e $z(s)$ e suas derivadas. Demonstrar que (ii) S é um plano se $z' = 0$. (iii) quando $z' \neq 0$ todos os pontos são parabólicos sse $x'' = 0$. (iv) Monstrar que neste último caso, S é ou um cilíndro ou um cone circulare. (v) Determinar as curvaturas media e de Gauss.

Exercício 10 (Curvatura de Gauss -1-)

A partir das 1.ª e 2.ª formas fundamentais dos gráficos obtidas nos exercícios 13 da série 2 e 8 da série 3, determinar as curvaturas média e de Gauss de um gráfico. A partir das mesmas, determinar as curvaturas principais.

Exercício 11 (Curvatura de Gauss -2-)

Determinar a curvatura média e de de Gauss do (i) helicoíde $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$; (ii) iperboloíde elítico $p(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$. (iii) A partir das mesmas, determinar as curvaturas principais.

Exercício 12 (Curvatura de Gauss -3-)

A partir do exercício 20 da série 2, demonstrar que para $S \equiv \mathrm{torus}$, $\int_S K dS = 0$.

Exercício 13 (Curvatura de Gauss -4-)

(i) Determinar as curvaturas médias e de Gauss da superfície $S \equiv (u+v, u-v, uv)$ no ponto $(2,0,1)$. (ii) Determinar os pontos criticos de H e K e se são máximos, minimos ou pontos de sela.

Exercício 14 (Curvatura de Gauss -5-)

Demonstrar que se as coordenadas forem isotermais, i.e., $E = G = \lambda(u,v)$ e $F = 0$, então $K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda$, com o Laplaciano $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$-

Exercício 15 (Formas fundamentais)

Seja A, B e C as matrizes associadas aos mapas bilineares $\mathbb{I}_1 := dp \cdot dp, \mathbb{I}_2 = -dp \cdot d\nu$ e $\mathbb{I}_3 := d\nu \cdot d\nu$. Demonstrar que $C - 2HB + KA = 0$. HINT: Utilizar o exercício 15 da série 3 e o facto que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifica $A^2 - \text{ tr } A + \det A = 0$ (extra: se provar esta formúla de algebra linear, vale 4 pontos).

Exercício 16 (Reciproca do Teorema de Gauss)

Monstrar que as superfícies $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$ e $\tilde{p} = (u\cos v, u\sin v, v)$ têm a mesma curvatura de Gauss sem serem isométricas.

Exercício 17 (Conoíde direito)

Seja o conoíde direito $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(v))$. Demonstrar que as curvaturas princípais têm sinais opostos. HINT: calcular K.

Exercício 18 (Referêncial ortogonal -1-)

(i) Verificar a expressão de K num referêncial ortogonal: $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_v(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}}) + \partial_u(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}})\right)$; (ii) a partir da mesma, determinar a expressão de K se 1.ª forma tem expressão $ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$.

Exercício 19 (Referêncial ortogonal -2-)

A partir da expressão $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_v(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}}) + \partial_u(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}})\right)$ determinar (i) a curvatura de Gauss de uma superfície com 1.ª forma $ds^2 = B(u,v)(du^2 + dv^2)$; (ii) Mostrar que superfície com 1.ª forma $ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$ é hiperbólica em todos os pontos.

Exercício 20 (Geodésicas -1- téorico)

Lembrar as 3 definições não variacionais de geodésicas que vimos. Demonstrar as afirmações seguintes: (i) Seja $\varphi : S \to \tilde{S}$ uma isometria. Então as geodésicas de $\tilde{S}$ são as imagens das geodésicas de S por φ. (ii) Seja $\mathrm{R} \subset S$ uma reta contida numa superficie S. Então R é uma geodésica. (iii) Seja $\gamma \subset \Pi$ onde Π é um plano seccional. Então γ é uma geodésica. HINT: considere o lema que diz que a curvatura normal igual à curvatura seccional.

Exercício 21 (Geodésicas -2- tubo)

Seja um tubo construido em torno da curva regular $s \mapsto \gamma(s)$, i.e. $p(s,\theta) = \gamma(s) + a\cos\theta n(s) + a\sin\theta b(s)$ com os vetores normal e binormal n e b. Mostrar que as curvas $s = \mathrm{cst}$ são geodésicas circulares. HINT: utilizar a tese do exercício 20 (iii).

Exercício 22 (Geodésicas -3-)

A partir da 1.ª forma fundamental da esfera parametrizada em coordenadas esféricas, (i) determinar as equações das geodésicas; (ii) resolver as mesmas; (iii) demonstrar que uma geodésica é um grande círculo da esfera. HINT: utilizar a 2.ª equação do sistema. O que dá a 1.ª?

Geometria diferencial

Aulas práticas & Exercícios

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

May 17, 2021

Exercícios: téoria das superfícies -4- Aplicações do teroema de Gauss-Bonnet e Derivada covariante.

Indicação: deve-se fazer pelo menos duas de 4 pontos, duas de téorica, duas e no maximo quatro na série "triangulação", e no minimo uma na série "derivada covariante".

Exercício 1 (Triangulações elementares)

Determinar (i) uma triangulação; (ii) a caracteristica de Euler nos casos seguingtes:

- o segmento $[0;1] \subset \mathbb{R}$
- o círculo unitário S^1
- o disco unitário D_1.

HINT: o segmento e o disco têm a mesma caracteristica.

Exercício 2 (Invariança sob homeomorfismos - teórico)

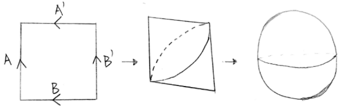
(i) Definir a caracteristica de Euler de uma superfície compacta e demonstrar que a mesma é invariante sob homeomorfismos. (ii) Discutir a reciproca: duas superfícies com mesma caracteristicas são homeomorfas?

Exercício 3 (Triangulação da esféra -1-)

(i)Triangularizar a esféra a partir do equador e de n meridianos. Qual'é o valor mínimo de n? e máximo? (ii) Determinar a caracteristica de Euler. (iii) Verificar Gauss-Bonnet.

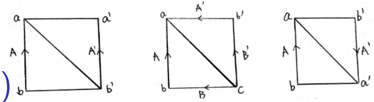
Exercício 4 (Triangulação do cubo)

(i) Triangularizar o cubo unitário. (ii) Determinar a caracteristica de Euler. (iii) Explicar porquê é igual à da esféra (iv) Verificar Gauss-Bonnet.



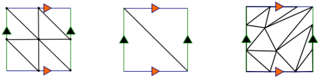
Exercício 5 (Triangulação da esféra -2-)

Conforme a figura a esféra pode ser construida a partir de um quadrado identificando algumas faces (A com A' e B com B') e vertices. (i) Indicar na figura quais vértices coincidem na construcção da esféra. (ii) Construir uma triangulação admissivel. (iii) Determinar a caracteristicas de Euler.



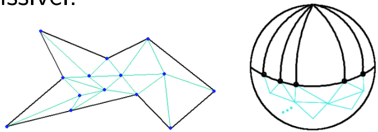
Exercício 6 (Triangulação simples)

(i) Nos três diagramas da figura quais correspondem as geometrias seguintes: torus, esféra, cilíndro, fita de Möbius? (ii) Dizer se as triangulações propostas são admissíveis e porquê? (iii) Determinar triangulações admissíveis. (iv) Determinar as caracteristicas de Euler do cilíndro, da esféra e da fita de Möbius.



Exercício 7 (Triangulação do torus)

(i) Nas três triangulações do torus da figura quais são admissiveis e porquê? (ii) Calcular a caracteristica de Euler a partir de uma triangulação admissível.



Exercício 8 (Caracteristica de um polígono)

(i) A partir do Hopf's Umlaufsatz generalizado, determinar a caracteristica de Euler de um polígono qualquer. (ii) Utilizando a tese do Ex. 2, deforme o polígono de maneira a estica-lo no hemisfêro sud de uma esféra; constroi então uma triangulação do hemisfêro norte conforme figura; determine então a caracteristica de Euler do polígono utilizando o Ex. 3 (ii).

Exercício 9 (Corolario de Gauss-Bonnet 3 - teórico)

Demonstrar que uma superfície compacta com curvatura de Gauss positiva (hipótesea alternativa: não negativa assumindo que $\exists$ $p \in \mathcal{M} : K(p) > 0$) é homeomorfa à esféra. HINT: utilize a tese do Ex. 2.

Exercício 10 (Corolario de Gauss-Bonnet 3 - teórico)

Sejam duas geodésicas fechadas em S. Se S tem curvatura de Gauss positiva, então as duas geodésicas interesam necessariamente. HINT: raciocinar pelo absurdo e utilizar a tese do Ex.9 e do Ex. 2. bem como Ex. 6 (iv).

Exercício 11 (Corolario de Gauss-Bonnet 4 - teórico)

(i) Exprimir Gauss-Bonnet no caso de $\gamma \subset S$ ser uma curva regular fechada e simples. (ii) Demonstrar que se S tem curvatura de Gauss negativa, então não existem geodésicas fechadas.

Exercício 12 (Corolario de Gauss-Bonnet 5 - teórico)

Seja uma superfície S com curvatura de Gauss $K < -1$, e seja γ um N-gono com arestas geodésicas. Demonstrar que necessariamente $N \geq 3$ e que se $N = 3$ então a área da região interior ao polígono é inferior à π.

Exercício 13 (Aplicação de Gauss-Bonnet geral)

Monstrar que se a superfície S é difeomorfa à um torus então $\int_S K dS = 0$ mas K não é igual à 0 em todos os pontos de S.

Exercício 14 (Aplicação de Gauss-Bonnet topologico)

(i) Monstrar que se a superfície compacta e fechada S tem $K > 0$ então é necessariamente homeomorfa à uma esféra. (ii) Dar um contra-exemplo a reciproca,

Exercício 15 (Superfícies compactas)

Determinar se as superfícies seguintes são compactas: (i) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$; (ii) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (iii) Se for compacta, determinar a sua caracteristica de Euler. HINT: mostrar primeiro que são fechadas e averiguar se são limitadas; mostrar enfim que é uma superfície de revolução e aplicar a tese do Ex. 2.

Exercício 16 (Derivada covariante cilíndrica)

(i) Determinar a base movél e a metrica Euclidiana $ds^2 = dx^2 + dy^2$ do plano em coordenadas cilíndricas (ii) Determinar os simbolos de Christoffel associados a mesma (HINT: considere a expressão explicita dos simbolos em funcção de $\mathbb{I}_1$). (iii) Determinar a matriz 2×2 do gradiente covariante do vetor $w = w^r g_r + w^\theta d\theta$, i.e. $(w^\beta_{;\tau})_{\beta\tau}$.

Exercício 17 (Derivada covariante isotermal)

Seja uma superfície com elemento de comprimento $ds^2 = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2)$. (i) Determinar a metrica $g_{\alpha\beta}$ e uma base movél associada, i.e., $g_\alpha \cdot g_\beta = g_{\alpha\beta}$. (ii) Determinar os simbolos de Christoffel associados a mesma (HINT: considere a expressão explicita dos simbolos em funcção de $\mathbb{I}_1$). (iii) Determinar a matriz 2×2 do gradiente covariante do vetor $w = w^u g_u + w^v g_v$, i.e. $(w^\beta_{;\tau})_{\beta\tau}$.

Exercício 18 (Derivada covariante no helicoíde)

Seja o helicoíde $(u\cos v, u\sin v, hv)$. (i) A partir da metrica e base movél associada, determinar os simbolos de Christoffel associados a mesma (HINT: considere a expressão explicita dos simbolos em funcção de $\mathbb{I}_1$). (iii) Determinar a matriz 2×2 do gradiente covariante do vetor $w = w^u g_u + w^v g_v$, i.e. $(w^\beta_{;\tau})_{\beta\tau}$.

Exercício 19 (Geodésicas ortonormadas)

Seja uma superfície $S \equiv p(u,v)$. As linhas de coordenas são as linhas com u ou v constante, i.e., $u \mapsto p(u, v_0)$ e $v \mapsto p(u_0, v)$. (i) Mostrar que se as linas de coordenadas são geodésicas, os vetores tangentes formem um base movél associada a uma metrica tal que $\partial_v E = 0 = \partial_u G$ (HINT: considere (★★)). (ii) Assumindo as geodésicas ortonormadas ($F = 0$), mostrar que mediante uma mudança de variável $u \to \tilde{u}$, $v \to \tilde{v}$, obtemos $\tilde{E} = 1, \tilde{F} = 0, \tilde{G} = 1$.

Exercício 20 (Transporte parallelo e curvatura de Gauss)

Com base o Ex. anterior demonstrar que se uma base ortonormada em $p \in S$ é transportada paralelmente numa vizinhança de $U(p)$ de p e se o resultado do transporte em $q \in V$ é independente da curva com extremidades p e q então $K = 0$ em V. HINT: utilize o facto de que existe uma parametrização cujas linhas de coordenadas em S são parallelas à uma campo vetorial diferenciável dado em S.